УДК 532.5 : 532.529.6

К ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ НАПОЛНЕННОЙ ГАЗОМ ОБОЛОЧКИ ПЛОСКИМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

О. М. КИСЕЛЕВ

(*Казань*)

Рассматривается обтекание плоским потоком идеальной жидкости некоторого объема газа, ограниченного твердой прямолинейной пластинкой, перпендикулярной набегающему потоку, и абсолютно гибкой пленкой, закрепленной на концах пластинки. В некотором диапазоне изменения параметров доказывается существование решения и указывается способ его нахождения.

Задача об обтекании плоским потоком жидкости гибкой оболочки, наполненной газом, в математическом отношении очень близка к задаче об обтекании газового пузыря, на границе которого действуют силы поверхностного натяжения. Обе названные задачи исследовались в работах [1–5] при условии, что граница пузыря не содержит твердых участков. В работе [6] рассмотрено обтекание газового пузыря, примыкающего к бесконечной прямолинейной твердой стенке.

1. Плоский установившийся потенциальный поток невесомой несжимаемой жидкости плотности ρ набегает по нормали на пластинку AC, к концам которой прикреплена абсолютно гибкая растяжимая пленка ABC (фиг. 1). Пленка с пластинкой образуют оболочку, содержащую внутри себя газ под давлением p_1. Длина пластинки $2a$, а длина пленки L связана с натяжением T формулой

$$L = l + \eta T \tag{1.1}$$

где l и η — некоторые постоянные.

Зная скорость потока на бесконечности V_∞ и давление в точке торможения $p_0 < p_1$, требуется найти форму оболочки, поле скоростей и натяжение пленки T.

Направим ось x вдоль пластинки, ось y по направлению потока, а начало координат совместим с критической точкой O на пластинке. Будем искать функцию $z(\zeta)$, конформно отображающую верхний полукруг единичного радиуса плоскости ζ ($\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$, $|\zeta| \leqslant 1$) на область течения в плоскости $z = x + iy$, предполагая, что последняя симметрична относительно оси y. При этом потребуем, чтобы отрезку AC соответствовал вещественный диаметр, а точке разветвления потока O — точка $\zeta = 0$ (фиг. 2). Контуру пленки ABC будет соответствовать дуга окружности $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$, а бесконечно удаленной точке D — некоторая точка $\zeta = i\varkappa$ на мнимой оси. Производная от комплексного потенциала течения в плоскости ζ легко строится

$$\frac{dw}{d\zeta} = NV_\infty \frac{\zeta(1-\zeta^4)}{(\zeta^2+\varkappa^2)^2(\varkappa^2\zeta^2+1)^2} \tag{1.2}$$

Здесь N — постоянная, имеющая размерность длины.

На контуре ABC должно выполняться условие

$$p_1 - p = T / R \tag{1.3}$$

Здесь p — давление в жидкости, R — радиус кривизны контура ($R > 0$). Когда скорость жидкости $V_\infty \to 0$, из (1.3) в пределе получим

$$R = T / (p_1 - p_0) \tag{1.4}$$

Таким образом, в этом случае контур ABC будет дугой окружности.

Обозначим через $\beta\pi$ угол в точке C между контуром ABC и осью x, а индексом 0 будем отмечать величины, получающиеся в пределе при $V_\infty \to 0$. Нетрудно убедиться в справедливости следующих формул:

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_0 = -\frac{8a(1+\beta)(1-\zeta^2)^{1+2\beta}}{[(1-\zeta)^{2+2\beta}+(1+\zeta)^{2+2\beta}]^2}$$

$$\frac{1}{V_\infty}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 = -\frac{\tau_0\zeta(1-\zeta^4)[(1-\zeta)^{2+2\beta}+(1+\zeta)^{2+2\beta}]^2}{(\zeta^2+\varkappa_0^2)^2(\varkappa_0^2\zeta^2+1)^2(1-\zeta^2)^{1+2\beta}}$$

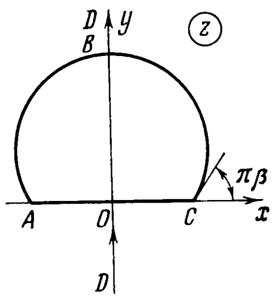
$$\varkappa_0 = \operatorname{tg}\{\pi[4(1+\beta)]^{-1}\},$$

$$\tau_0 = \varkappa_0(1-\varkappa_0^4)(1+\varkappa_0^2)[4(1+\beta)^2]^{-1}$$

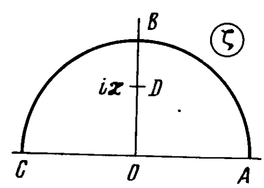
Исключая T из (1.1) и (1.4) и учитывая, что при $V_\infty = 0$ $L = L_0 = 2\pi a(1-\beta)/\sin\pi\beta$, $R = R_0 = a/\sin\pi\beta$ получаем уравнение

$$\sin\pi\beta = [2\pi(1-\beta) - \eta(p_1 - p_0)]a/l \tag{1.5}$$

Из (1.5) при условии, что $\eta(p_1 - p_0) < 2\pi$, однозначно определяется $\beta \in (0, 1)$. После этого находится $T = T_0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. В общем случае безразмерную комплексно сопряженную скорость будем искать в форме

$$\frac{1}{V_\infty}\frac{dw}{dz} = -\frac{\tau\zeta(1-\zeta^4)[(1-\zeta)^{2+2\beta}+(1+\zeta)^{2+2\beta}]^2}{(\zeta^2+\varkappa_0^2)^2(\varkappa_0^2\zeta^2+1)^2(1-\zeta^2)^{1+2\beta}}e^{-\Omega(\zeta)} \tag{2.1}$$

Здесь $\Omega(\zeta)$ — функция, голоморфная в круге $|\zeta| \leqslant 1$ и вещественная при $\operatorname{Im}\zeta = 0$. Учитывая симметрию потока относительно оси y, можем представить функцию $\Omega(\zeta)$ в виде ряда

$$\Omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\zeta^{2k} \tag{2.2}$$

с неизвестными вещественными коэффициентами.

Согласно (1.2) и (2.1)

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{N(1-\zeta^2)^{1+2\beta}(\zeta^2+\varkappa_0^2)^2(\varkappa_0^2\zeta^2+1)^2e^{\Omega(\zeta)}}{\tau[(1-\zeta)^{2+2\beta}+(1+\zeta)^{2+2\beta}]^2(\zeta^2+\varkappa^2)^2(\varkappa^2\zeta^2+1)^2} \tag{2.3}$$

Параметры, входящие в выражения (2.1), (2.3), должны удовлетворять геометрическим и кинематическим условиям

$$z(-1) - z(1) = 2a, \quad \left.\frac{1}{V_\infty}\frac{dw}{dz}\right|_{\zeta=i\varkappa} = -i, \quad \operatorname*{Res}_{\zeta=i\varkappa}\frac{dz}{d\zeta} = 0$$

Последние приводятся соответственно к виду

$$\frac{N}{\tau}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1+2\beta}(\zeta^2+\varkappa_0^2)^2(\varkappa_0^2\zeta^2+1)^2e^{\Omega(\zeta)}\,d\zeta}{[(1-\zeta)^{2+2\beta}+(1-\zeta)^{2+2}]^2(\zeta^2+\varkappa^2)^2(\varkappa^2\zeta^2+1)^2}=2a \tag{2.4}$$

$$\frac{4\tau\varkappa(1-\varkappa^4)(1+\varkappa^2)}{(\varkappa_0^2-\varkappa^2)^2(1-\varkappa_0^2\varkappa^2)^2}\cos^2[2(1+\beta)\operatorname{arc\,tg}\varkappa]\,e^{-\Omega(i\varkappa)}=1 \tag{2.5}$$

$$J(\beta,\varkappa)=\omega(\varkappa),\qquad \omega(\varkappa)=\frac{d}{d\varkappa}\Omega(i\varkappa) \tag{2.6}$$

$$J(\beta,\varkappa)=\frac{1-5\varkappa^4}{\varkappa(1-\varkappa^4)}-\frac{2(1-3\varkappa_0^2\varkappa^2-2\varkappa_0^3\varkappa)}{(\varkappa+\varkappa_0)(1-\varkappa_0^2\varkappa^2)}-$$

$$-\frac{2}{\varkappa-\varkappa_0}-\frac{4(1+\beta)}{1+\varkappa^2}\operatorname{tg}[2(1+\beta)\operatorname{arc\,tg}\varkappa]+\frac{2\varkappa}{1+\varkappa^2}$$

Заметим, что функция $J(\beta,\varkappa)$ голоморфна по $\varkappa$ в окрестности $\varkappa=\varkappa_0$, причем $J(\beta,\varkappa_0)=0$.

Условие (1.3) на контуре ABC при помощи уравнения Бернулли можно записать в виде

$$\pm\frac{d\theta}{d\varphi}=\frac{p_1-p_0}{T}\frac{1}{V}+\frac{\rho}{2T}V \tag{2.7}$$

Здесь φ — потенциал скорости, V — модуль скорости, θ — угол наклона скорости к оси x; знак плюс относится к участку CB, знак минус — к участку AB. Вводя обозначения

$$\lambda=\operatorname{Re}\Omega(e^{i\sigma})=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}\cos 2k\sigma,\quad \mu=\operatorname{Im}\Omega(e^{i\sigma})=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}\sin 2k\sigma \tag{2.8}$$

из (1.2) и (2.1) при $\zeta=e^{i\sigma}$, $0\leqslant\sigma\leqslant\pi$ получим

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}=\frac{2NV_\infty\sin 2\sigma}{(1+\varkappa^4+2\varkappa^2\cos 2\sigma)^2}$$

$$\frac{V}{V_\infty}=8\tau|\sin 2\sigma|\times$$

$$\times\frac{[(\sin{}^1/_2\sigma)^{4+4\beta}-2\cos\pi\beta(\sin{}^1/_2\sigma\cos{}^1/_2\sigma)^{2+2\beta}+(\cos{}^1/_2\sigma)^{4+4\beta}]}{(1+\varkappa_0^4+2\varkappa_0^2\cos 2\sigma)^2(\sin{}^1/_2\sigma\cos{}^1/_2\sigma)^{1+2\beta}e^{\lambda}}$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma}=\frac{d\mu}{d\sigma}-\frac{2(1+\beta)\sin\pi\beta(\sin{}^1/_2\sigma\cos{}^1/_2\sigma)^{1+2\beta}}{(\sin{}^1/_2\sigma)^{4+4\beta}-2\cos\pi\beta(\sin{}^1/_2\sigma\cos{}^1/_2\sigma)^{2+2\beta}+(\cos{}^1/_2\sigma)^{4+4\beta}}$$

Подставив эти выражения в уравнение (2.7), будем иметь

$$U\frac{d\mu}{d\sigma}=AU-\gamma AU^{(0)}e^{\lambda}-\delta He^{-\lambda}\qquad(0\leqslant\sigma\leqslant\pi) \tag{2.9}$$

$$U=U(\varkappa,\sigma)=(1+\varkappa^4+2\varkappa^2\cos 2\sigma)^2,\qquad U^{(0)}=U(\varkappa_0,\sigma)$$

$$A=A(\beta,\sigma)=\frac{2(1+\beta)\sin\pi\beta(\sin{}^1/_2\sigma\cos{}^1/_2\sigma)^{1+2\beta}}{(\sin{}^1/_2\sigma)^{4+4\beta}-2\cos\pi\beta(\sin{}^1/_2\sigma\cos{}^1/_2\sigma)^{2+2\beta}+(\cos{}^1/_2\sigma)^{4+4\beta}}$$

$$H=H(\beta,\sigma)=2(1+\beta)\sin\pi\beta\sin^2 2\sigma[U^{(0)}A]^{-1}$$

$$\delta=8\tau\rho V_\infty^2NT^{-1},\qquad \gamma=N(p_1-p_0)[8\tau T(1+\beta)\sin\pi\beta]^{-1} \tag{2.10}$$

Ниже будет показано, как из системы уравнений (2.6), (2.9) определить зависимости $\Omega(\zeta;\beta,\delta)$, $\varkappa(\beta,\delta)$, $\gamma(\beta,\delta)$.

Пусть $\delta=0$, тогда можно удовлетворить систему уравнений (2.6), (2.9), положив $\gamma=1$, $\varkappa=\varkappa_0$, $\Omega(\zeta)=0$ ($\lambda=\mu=\omega=0$). В общем случае будем искать решение задачи в виде рядов по степеням δ

$$\Omega(\zeta)=\sum_{m=1}^{\infty}\delta^m\Omega_m(\zeta),\qquad \Omega_m(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}^{(m)}\zeta^{2k}\tag{2.11}$$

$$\gamma=1+\sum_{m=1}^{\infty}\delta^m\gamma_m,\qquad \varkappa=\varkappa_0+\sum_{m=1}^{\infty}\delta^m\varkappa_m\tag{2.12}$$

причем коэффициенты γ_m, $\varkappa_m$, $a_{2k}^{(m)}$ зависят только от β.

Согласно (2.8) и (2.6) при этом будем иметь

$$\lambda=\sum_{m=1}^{\infty}\delta^m\lambda_m,\qquad \frac{d\mu}{d\sigma}=\sum_{m=1}^{\infty}\delta^m\mu_m',\qquad \omega=\sum_{m=1}^{\infty}\delta^m\omega_m\tag{2.13}$$

$$\lambda_m=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}^{(m)}\cos 2k\sigma,\qquad \mu_m'=\sum_{k=1}^{\infty}2ka_{2k}^{(m)}\cos 2k\sigma\tag{2.14}$$

$$\omega_m=\frac{d}{d\varkappa}\Omega_m(i\varkappa)=\sum_{k=1}^{\infty}2k(-1)^k a_{2k}^{(m)}\varkappa^{2k-1}\tag{2.15}$$

Докажем следующую теорему:

Теорема. В некотором интервале $\beta_0<\beta\leqslant{}^1/_2$ и для достаточно малых δ решение системы уравнений (2.6), (2.9) вида (2.12) — (2.15) существует и единственно. Для указанных β и δ и при $|\zeta|$, $|\varkappa|\leqslant 1$ ряды (2.11) — (2.15) абсолютно сходятся.

Подставим ряды (2.12) — (2.15) в уравнения (2.6) и (2.9), заменяя при этом функции $J(\beta,\varkappa)$, $U(\varkappa,\sigma)$, $\omega_m(\varkappa)$ соответствующими рядами Тейлора по степеням $\varkappa-\varkappa_0$, а функции $\exp(\pm\lambda)$ — рядами Тейлора по степеням λ. Сравнивая коэффициенты при δ^n, из (2.6) и (2.9) соответственно получим

$$\varkappa_n=[\omega_n^{(0)}+D_n-E_n][j^{(1)}]^{-1}\quad(n=1,2,\ldots)\tag{2.16}$$

$$\mu_n'=\varkappa_nAU^{(1)}[U^{(0)}]^{-1}-(\lambda_n+\gamma_n)A-G_n\quad(n=1,2,\ldots)\tag{2.17}$$

Здесь

$$D_1=E_1=0,\qquad E_n=\left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\delta^n}\left[\sum_{m=2}^{n}\frac{J^{(m)}}{m!}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\delta^k\varkappa_k\right)^m\right]\right\}_{\delta=0}\quad(n\geqslant2)\tag{2.18}$$

$$D_n=\left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\delta^n}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\delta^m\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega_m^{(k)}}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\delta^i\varkappa_i\right)^k\right]\right\}_{\delta=0}\quad(n\geqslant2)\tag{2.19}$$

$$G_1=\frac{H}{U^{(0)}},\quad G_n=\frac{H}{U^{(0)}}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\delta^{n-1}}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\sum_{m=1}^{n-1}\delta^m\lambda_m\right)^k\right]\right\}_{\delta=0}+$$

$$+\frac{1}{U^{(0)}}\left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\delta^n}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\delta^m\mu_m^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{U^{(k)}}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\delta^i\varkappa_i\right)^k\right]\right\}_{\delta=0}+A\left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\delta^n}\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_{m=1}^{n-1}\delta^m\lambda_m\right)^k+\sum_{m=1}^{n-1}\delta^m\gamma_m\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\delta^i\lambda_i\right)^k\right]\right\}_{\delta=0}-\frac{A}{U^{(0)}}\left\{\frac{1}{n!}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d^n}{d\delta^n}\left[\sum_{m=2}^{n}\frac{U^{(m)}}{m!}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\delta^k\varkappa_k\right)^m\right]\right\}_{\delta=0}\quad(n\geqslant2)\tag{2.20}$$

$$J^{(m)}=\left.\frac{\partial^m J}{\partial\varkappa^m}\right|_{\varkappa_0},\quad \omega_m^{(k)}=\left.\frac{d^k\omega_m}{d\varkappa^k}\right|_{\varkappa_0},\quad U^{(m)}=\left.\frac{\partial^m U}{\partial\varkappa^m}\right|_{\varkappa_0}\quad(m=0,1\ldots)\tag{2.21}$$

Подставим (2.16) в (2.17)

$$\mu_n' = \omega_n^{(0)}B - (\lambda_n + \gamma_n)A - C_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.22}$$

$$B = AU^{(1)}[J^{(1)}U^{(0)}]^{-1}, \qquad C_n = G_n + B(E_n - D_n) \tag{2.23}$$

Таким образом, система уравнений (2.6), (2.9) свелась к двум бесконечным последовательностям уравнений (2.16), (2.22).

Члены D_n, E_n, C_n содержат неизвестные с индексами не выше чем $n-1$. Величины A, B, C_1 — известные функции β и σ, $J^{(1)}$ — известная функция β

$$J^{(1)} = -\frac{1+14\varkappa_0^4+\varkappa_0^8}{2\varkappa_0^2(1-\varkappa_0^4)^2} - \frac{2[(2+2\beta)^2-1]}{3(1+\varkappa_0^2)^2}$$

3. Функции A, B заданы на интервале $\sigma \in [0, \pi]$. Предположим, что неизвестные, входящие в выражение C_n, определены, тогда C_n можно также считать известной функцией β и σ. Продолжая функции A, B, C_n по σ четным образом, разложим их в ряды Фурье с коэффициентами, зависящими от β

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}\cos 2k\sigma, \qquad B = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}\cos 2k\sigma, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^{(n)}\cos 2k\sigma \tag{3.1}$$

(легко убедиться, что все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю).

Будем называть нормой функции, разлагающейся в ряд Фурье по σ, сумму модулей коэффициентов разложения. Таким образом

$$\|A\| = \sum_{k=0}^{\infty}|A_{2k}|, \qquad \|B\| = \sum_{k=0}^{\infty}|B_{2k}|, \qquad \|C_1\| = \sum_{k=0}^{\infty}|C_{2k}^{(n)}|$$

Для произвольных функций $\varphi_1(\sigma)$, $\varphi_2(\sigma)$, разложимых в ряд Фурье, справедливы неравенства

$$\|\varphi_1+\varphi_2\| \leqslant \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|, \qquad \|\varphi_1\varphi_2\| \leqslant \|\varphi_1\|\,\|\varphi_2\| \tag{3.2}$$

Подставим (2.14) и (3.1) в (2.22) и сравним коэффициенты при косинусах с одинаковыми аргументами. Учитывая, что

$$\lambda_n A = A_0\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^{(n)}\cos 2k\sigma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} A_{2i}\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^{(n)}[\cos 2(k-i)\sigma + \cos 2(k+i)\sigma]$$

$$\omega_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k(-1)^k a_{2k}^{(n)}\varkappa_0^{2k-1}$$

и вводя обозначения

$$x_0 = 2\gamma_n, \qquad x_k = 2ka_{2k}^{(n)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

получим бесконечную систему уравнений

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i \qquad (i = 0, 1, \ldots) \tag{3.3}$$

$$c_{0,0} = 0, \quad c_{i,0} = \alpha_i A_{2i}, \quad \alpha_i = -(2 + A_0/i)^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$c_{0,k} = -A_0^{-1}[A_{2k}/2k - (-1)^k\xi_0^{(2k-1)}] \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$c_{ik} = \alpha_i[(A_{2k-2i}^1 + A_{2k+2i}^1)/2k - (-1)^k\xi_{2i}^{(2k-1)}] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

$$A_{2k-2i}^1 = A_{|2k-2i|} \text{ при } i \neq k, \quad A_0' = 0, \quad \xi_{2i}^{(2k-1)} = 2B_{2i}\varkappa_0^{2k-1}$$

$$b_0 = -2A_0^{-1}C_0^{(n)}, \qquad b_i = 2\alpha_i C_{2i}^{(n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

При исследовании системы (3.3) используем следующую лемму [6].

Лемма 1. Пусть коэффициенты бесконечной системы уравнений (3.3) удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{i,k}| \leqslant d < 1 \quad (i=0,1,\ldots), \qquad \sum_{i=0}^{\infty} |c_{i,k}| \leqslant g < 1 \quad (k=0,1,\ldots) \tag{3.4}$$

Кроме того, свободные члены b_i ограничены в совокупности. Тогда система (3.3) имеет единственное ограниченное решение x_i' $(i = 0, 1,\ldots)$, причем такое, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i'| \leqslant (1-g)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$$

Пусть $\beta = 1/2$. При этом

$$J^{(1)} = -\frac{63}{8}, \quad A = \frac{6-6\cos 2\sigma}{10+6\cos 2\sigma}, \quad B = -\frac{64\sqrt{3}(1+3\cos 2\sigma)}{63(10+6\cos 2\sigma)} A$$

$$\begin{gathered} A_0 = 1, \quad B_0 = 16\sqrt{3}(63)^{-1}, \quad A_{2k} = 4(-3)^{-k} \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ B_{2k} = 32(4k-1)\sqrt{3}(-3)^{-k}(63)^{-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{3.5}$$

Используя равенства (3.5), нетрудно показать, что при $\beta = 1/2$ условия (3.4) выполняются, причем d, $g < 0.9$. Покажем, что эти условия выполняются в некотором интервале $\beta_0 < \beta \leqslant 1/2$.

Пусть ε — фиксированное число, $0 < \varepsilon < 1/2$. На отрезке $\varepsilon \leqslant \beta \leqslant 1/2$ функции $A(\beta, \sigma)$, $B(\beta, \sigma)$ непрерывны вместе со своими первыми производными по σ. Следовательно, существуют положительные числа a_ε, b_ε, зависящие только от ε и такие, что

$$|A_{2k}| \leqslant a_\varepsilon (2k)^{-2}, \qquad |B_{2k}| \leqslant b_\varepsilon (2k)^{-2} \qquad (i = 0, 1, \ldots) \tag{3.6}$$

Легко видеть, что

$$A > 2^{-2\beta}(1+\beta) \sin \pi\beta (\sin \sigma)^{1+2\beta}$$

$$A_0 > 2\pi^{-1}(1+\beta) \sin \pi\beta \Gamma^2(\beta+1)\Gamma^{-1}(2\beta+2) \tag{3.7}$$

$$|\alpha_i| < 1/2 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

Введем обозначения

$$d_i(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} |c_{i,k}| \quad (i=0,1,\ldots), \qquad g_k(\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} |c_{i,k}| \quad (k=0,1,\ldots) \tag{3.9}$$

Коэффициенты A_{2k}, B_{2k}, $\varkappa_0$, а с ними и $c_{i,k}$ — непрерывные функции β при $\beta \in [\varepsilon, 1/2]$. При помощи неравенств (3.6) — (3.8) можно построить мажоранты рядов (3.9). Этим доказывается равномерная сходимость рядов (3.9) и, следовательно, непрерывность функций $d_i(\beta)$, $g_k(\beta)$.

Согласно сказанному выше

$$d_i(1/2), \quad g_k(1/2) < 0{,}9 \quad (i, k = 0, 1, \ldots)$$

Из непрерывности функций $d_i(\beta)$, $g_k(\beta)$ следует существование такого $\beta_0 (0 < \beta_0 < 1/2)$, что при $\beta_0 < \beta \leqslant 1/2$ условия (3.4) выполняются. При этом, очевидно

$$d = d(\beta) = \sup_i d_i(\beta), \qquad g = g(\beta) = \sup_k g_k(\beta)$$

Если $\|C_n\| < \infty$, то, учитывая соотношения

$$|b_k| \leqslant 2|C_{2k}^{(n)}|h, \qquad h = \max(A_0^{-1}, {}^1/_2) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

и опираясь на лемму 1, можно утверждать, что при $\beta_0 < \beta \leqslant {}^1/_2$ существует единственное ограниченное решение системы уравнений (3.3), которое может быть найдено методом последовательных приближений, причем для этого решения

$$2\gamma_n + \sum_{k=1}^{\infty} 2k\,|a_{2k}^{(n)}| \leqslant 2\|C_n\|h(1-g)^{-1} \tag{3.10}$$

Определив γ_n, $a_{2k}^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, из (2.16) найдем $\varkappa_n$, после чего величины D_{n+1}, E_{n+1}, C_{n+1} становятся известными функциями β и σ. Вычислив $C_{2k}^{(n+1)}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, найдем из (3.3) γ_{n+1}, $a_{2k}^{(n+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и т. д. Отправляясь от $n = 1$, таким путем можно определить все необходимые для решения величины.

4. Докажем ограниченность $\|C_n\|$ и сходимость рядов (2.11) — (2.15) при $\beta_0 < \beta \leqslant {}^1/_2$. При этом будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 2. Если коэффициенты степенного ряда

$$\tau(\nu) = d_1^{(1)}\nu + d_2^{(1)}\nu^2 + \ldots + d_n^{(1)}\nu^n + \ldots$$

удовлетворяют неравенствам

$$|d_n^{(1)}| \leqslant D(n+1)^{-2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

то коэффициенты ряда

$$\tau^k(\nu) = d_1^{(k)}\nu + d_2^{(k)}\nu^2 + \ldots + d_n^{(k)}\nu^n + \ldots$$

получающегося из первого путем возведения его в k-ю степень, удовлетворяют неравенствам

$$|d_n^{(k)}| \leqslant D^k\alpha^{k-1}(n+1)^{-2}, \qquad \alpha = 1.520 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Эта лемма есть следствие леммы Л. В. Канторовича (см. [7], стр. 454).

Получим оценки величин $|\omega_m^{(k)}|$, $|J^{(m)}|$, $\|U^{(m)} / U^{(0)}\|$. Из определений (2.15), (2.21) следует, что

$$|\omega_m^{(k)}| = \left|\frac{d^{k+1}\Omega_m}{d\zeta^{k+1}}\right|_{i\varkappa_0}$$

При $|\zeta| \leqslant 1$

$$\left|\frac{d\Omega_m}{d\zeta}\right| \leqslant \|\mu_m'\|$$

Если $\|\mu_m'\| < \infty$, то $d\Omega_m / d\zeta$ — функция, голоморфная в круге $|\zeta| \leqslant 1$. В круге $|\zeta - i\varkappa_0| \leqslant 1 - \varkappa_0$ ее можно представить рядом Тейлора

$$\frac{d\Omega_m}{d\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - i\varkappa_0)^k}{k!} \left.\frac{d^{k+1}\Omega_m}{d\zeta^{k+1}}\right|_{i\varkappa_0} \tag{4.1}$$

Используя неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда, получаем

$$\frac{1}{k!}\left|\frac{d^{k+1}\Omega_m}{d\zeta^{k+1}}\right|_{i\varkappa_0} \leqslant \frac{\|\mu_m'\|}{(1-\varkappa_0)^k}, \qquad |\omega_m^{(k)}| \leqslant \frac{k!\,\|\mu_m'\|}{(1-\varkappa_0)^k} \tag{4.2}$$

Учитывая, что $J(\beta,\zeta)$ — функция, голоморфная в круге K_0, $|\zeta-\varkappa_0|\leqslant (1-\varkappa_0)/2$, аналогичным образом получим оценку

$$|J^{(m)}|\leqslant Pm!2^m(1-\varkappa_0)^{-m},\qquad P=\max|J(\beta,\zeta)|,\qquad \zeta\in K_0 \tag{4.3}$$

Непосредственно вычисляя норму функции $U^{(m)}$ (2.21) и используя свойства нормы (3.2), будем иметь

$$\|U^{(m)}/U^{(0)}\|\leqslant K,\qquad K=u_0\cdot 3\cdot 8!,\qquad U_0=\|1/U^{(0)}\| \tag{4.4}$$

Заметим, что нормы функций $1/U^{(0)}$, A, B, $H/U^{(0)}$ ограничены, поскольку каждая из этих функций при $0<\beta\leqslant {}^1/_2$ удовлетворяет условиям теоремы Зигмунда ([8], стр. 385).

Лемма 3. Если при $k=1, 2, \ldots n-1$ и некоторых положительных M, Q, R

$$|\gamma_k|,\ \|\lambda_k\|\leqslant MR^{k-1}[2(k+1)^2]^{-1},\qquad \|\mu_k'\|\leqslant MR^{k-1}(k+1)^{-2} \tag{4.5}$$

$$|\varkappa_k|\leqslant QR^{k-1}(k+1)^{-2} \tag{4.6}$$

причем

$$r\equiv Q\alpha(1-\varkappa_0)^{-1}R^{-1}<{}^1/_2 \tag{4.7}$$

то справедливы неравенства

$$|D_n|\leqslant R^{n-1}(n+1)^{-2}Mr(1-r)^{-1} \tag{4.8}$$

$$|E_n|\leqslant R^{n-1}(n+1)^{-2}4PQ(1-\varkappa_0)^{-1}r(1-2r)^{-1}+ \tag{4.9}$$

$$\|C_n\|\leqslant R^{n-1}(n+1)^{-2}\{K_1r(1-r)^{-1}+K_2r(1-2r)^{-1}+ \\ +K_3[\exp(M_\alpha/2R)-1]+K_4[\exp(Q\alpha/R)-1]\} \tag{4.10}$$

$$K_1=M\|B\|,\qquad K_3=M\|A\|+9\|H/U^{(0)}\|(4\alpha)^{-1}$$

$$K_2=4PQ\|B\|(1-\varkappa_0)^{-1},\qquad K_4=KM\|1/U^{(0)}\|+KQ\|A/U^{(0)}\|$$

Согласно (2.19), (4.2), (4.5)

$$|D_n|\leqslant\left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\delta^n}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\delta^m\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\|\mu_m'\|}{(1-\varkappa_0)^k}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\delta^iQR^{i-1}}{(i+1)^2}\right)^k\right]\right\}_{\delta=0}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{R}\left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\delta^n}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\delta^mR^m}{(m+1)^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r^k}{\alpha^k}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\delta^iR^i}{(i+1)^2}\right)^k\right]\right\}_{\delta=0}=MR^{n-1}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\nu^n}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\nu^m}{(m+1)^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r^k}{\alpha^k}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\nu^i}{(i+1)^2}\right)^k\right]\right\}_{\nu=0}$$

Здесь $\nu=\delta R$. Обозначим через $d_i^{(k)}$ коэффициент при ν^i в выражении

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1}\nu^i(i+1)^{-2}\right)^k.$$

Тогда из последнего соотношения получим

$$|D_n|\leqslant MR^{n-1}\left[\frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r^k}{\alpha^k}d_{n-1}^{(k)}+\frac{1}{3^2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{r^k}{\alpha^k}d_{n-2}^{(k)}+\ldots+\frac{1}{n^2}\frac{r}{\alpha}d_1^{(1)}\right]$$

Применяя для оценки $d_i^{(k)}$ лемму 2 и учитывая (4.7), будем иметь

$$|D_n| \leqslant \frac{MR^{n-1}}{\alpha}\frac{r}{1-r}\left[\frac{1}{2^2}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3^2}\frac{1}{(n-1)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\frac{1}{2^2}\right]$$

Сумма в квадратных скобках меньше, чем $\alpha(n+1)^{-2}$ ([7], стр. 455). Учитывая это, приходим к неравенству (4.8).

Неравенства (4.9), (4.10) выводятся аналогичным образом из соотношений (2.18), (2.20), (2.23) на основе оценок (4.2) — (4.7) с использованием леммы 2 и свойств нормы (3.2).

Положим

$$M = 8h\|H / U^{(0)}\|(1-g)^{-1}, \qquad Q = 2M|J^{(1)}|^{-1} \tag{4.11}$$

и покажем, что постоянную R можно подобрать таким образом, чтобы при любом k были верны оценки (4.6) и

$$\|C_k\| \leqslant M(1-g)R^{k-1}[2h(k+1)^2]^{-1} \tag{4.12}$$

Поскольку $C_1 = H / U^{(0)}$, оценка (4.12), (4.11) действительно имеет место при $k=1$. Из (4.12) и (3.10) следуют неравенства (4.5), поэтому $\|\mu_1'\| \leqslant M / 4$. Наконец из (2.16) и (4.2) при $k=1$ получим

$$|\varkappa_1| = |\omega_1^{(0)} / J^{(1)}| \leqslant \|\mu_1'\| |J^{(1)}|^{-1} \leqslant M|4J^{(1)}|^{-1} < M|2J^{(1)}|^{-1}$$

Таким образом, оценка (4.6), (4.11) верна при $k=1$.

Предположим, что оценки (4.11), (4.6), (4.12), а следовательно, и (4.5), имеют место при $k=1, 2, \ldots n-1$. Подчиним R условию (4.7). Тогда из леммы 3 следует неравенство (4.10). Чтобы оценка (4.12) была справедлива при $k=n\geqslant 2$, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$K_1r(1-r)^{-1}+K_2r(1-2r)^{-1}+K_3[\exp(M\alpha / 2R)-1]+$$
$$+K_4[\exp(Q\alpha / R)-1] \leqslant M(1-g)(2h)^{-1} \tag{4.13}$$

При фиксированном β правая часть неравенства (4.13) — положительная константа, левая часть при $2Q\alpha(1-\varkappa_0)^{-1}\leqslant R \leqslant \infty$ есть монотонная положительная функция R, меняющаяся от бесконечности до нуля. Существует минимальное $R=R_0$, удовлетворяющее условию (4.7), и такое, что при $R\geqslant R_0$ неравенство (4.13), а вместе с ним и оценка (4.12) будут справедливы при $k=n\geqslant 2$.

Продолжая рассуждения, из (4.12), (3.10) и (4.2) получим

$$|\omega_n^{(0)}| \leqslant \|\mu_n^1\| \leqslant MR^{n-1}(n+1)^{-2} \tag{4.14}$$

Из (2.16) с учетом (4.8), (4.9), (4.14) будем иметь

$$|\varkappa_n| \leqslant [M(1-r)^{-1}+4PQ(1-\varkappa_0)^{-1}r(1-2r)^{-1}]|J^{(1)}|^{-1}R^{n-1}(n+1)^{-2}$$

Чтобы оценка (4.6), (4.11) была справедлива при $k=n\geqslant 2$, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$(1-r)^{-1}+8P|J^{(1)}|^{-1}(1-\varkappa_0)^{-1}r(1-2r)^{-1} \leqslant 2$$

Последнее будет, в частности, иметь место, если

$$r \leqslant {}^1/_4, \qquad r \leqslant |J^{(1)}|(1-\varkappa_0)(24P)^{-1}$$

или, учитывая определение r (4.7)

$$R \geqslant 4Q\alpha(1-\varkappa_0)^{-1}, \qquad R \geqslant 24PQ\alpha|J^{(\prime)}|^{-1}(1-\varkappa_0)^{-2}$$

Таким образом, доказали следующее предложение. Если неравенства (4.6), (4.12), а следовательно, и (4.5), имеют место при $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то они справедливы и при $k = n \geqslant 2$. При этом, M, Q определяются равенствами (4.11), а R — неравенством

$$R \geqslant R_1 = \max\left\{R_0, \frac{4Q\alpha}{1-\varkappa_0}, \frac{24PQ\alpha}{|J^{(1)}|(1-\varkappa_0)^2}\right\} \tag{4.15}$$

Применяя метод математической индукции, можем утверждать, что оценки (4.6), (4.12), (4.5) при (4.11), (4.15) верны для любого $k \geqslant 1$. Из (4.5), (4.6) при $\delta \leqslant \delta = 1/R_1$, $|\zeta|$, $|\varkappa| \leqslant 1$ следует абсолютная сходимость рядов (2.11)—(2.15). Теорема, сформулированная в п. 2, доказана.

Будем считать известными параметры a, l, β, δ и определим по ним величины

$$T / a\rho V_\infty^2, \qquad (p_1 - p_0) / \rho V_\infty^2, \qquad \eta(p_1 - p_0).$$

Согласно (2.3) — (2.5)

$$N = 2aF_1F_3, \qquad L = 2aF_1F_2, \qquad \tau = F_3 \tag{4.16}$$

$$F_1 = F_1(\beta, \delta) = -\left(\frac{\tau}{N}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta\right)^{-1}$$

$$F_2 = F_2(\beta, \delta) = \frac{\tau}{N}\int_0^\pi\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=e^{i\sigma}} d\sigma$$

$$F_3 = F_3(\beta, \delta) = \frac{(\varkappa_0^2 - \varkappa^2)^2(1-\varkappa_0^2\varkappa^2)^2 e^{\Omega(i\varkappa)}}{4\varkappa(1-\varkappa^4)(1+\varkappa^2)\cos^2[2(1+\beta)\operatorname{arctg}\varkappa]}$$

С учетом (4.16) из (2.10) и (1.1) получим

$$(p_1 - p_0) / \rho V_\infty^2 = 64\delta^{-1}\gamma(1+\beta)\sin\pi\beta\, F_3^2$$

$$\eta(p_1 - p_0) = 4\gamma(1+\beta)\sin\pi\beta(2F_1F_2 - l/a)F_1^{-1}$$

$$T / a\rho V_\infty^2 = 16\delta^{-1}F_1F_3^2$$

Поступило 2 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. Полн. собр. соч., т. 3. М.— Л., ОНТИ, 1936.
2. Слезкин Н. А. Обтекание наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости. Уч. зап. МГУ, 1951, т. 3, вып. 152.
3. Mc Leod E. B. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension. J. Rat. Mech. and Analysis, 1955, vol. 4, No. 4.
4. Beyer K. Existenzbeweis fur ein randwertproblem mit freien Rand. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1966, vol. 23, No. 1.
5. Петрова С. И. Форма равновесия полости, ограниченной упругой пленкой, в однородном потоке жидкости. В сб. «III Всес. съезд по теорет. и прикл. механ.», Аннот. докл., М., 1968.
6. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 2. М., «Мир», 1965.