

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И МИНИМАЛЬНОГО ПОТОКА К ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА ПРИ РАЗЛИЧНОМ ХАРАКТЕРЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. Д. ПЕРМИНОВ, Е. Е. СОЛОДКИН

(Москва)

Получены приближенные формулы, позволяющие рассчитывать распределение напряжения трения и местного потока тепла по поверхности тела произвольной формы по заданному распределению давления как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течения в пограничном слое. Эти приближенные формулы были использованы для решения вариационных задач об определении формы осесимметричных тел минимального сопротивления или минимального полного потока тепла к поверхности (в классе тел, состоящих из плоского переднего торца и боковой поверхности) в гиперзвуковом потоке вязкого газа.

При решении вариационных задач по определению оптимальной формы тела из условий минимального сопротивления или минимального полного потока тепла к поверхности необходимо уметь определять распределение давления, напряжения трения и местного потока тепла вдоль поверхности тела произвольной формы.

При больших числах Рейнольдса задача определения распределения давления сводится к решению уравнений Эйлера при соответствующих граничных условиях. Однако эффективных методов решения такой задачи в настоящее время нет (по крайней мере с точки зрения их использования для решения вариационных задач), что заставляет при решении вариационных задач использовать для определения распределения давления различные приближенные методы (например, метод касательных клиньев или конусов, метод Ньютона и др.). Использование таких приближенных формул делает неоправданным точное решение уравнений пограничного слоя, для которых распределение газодинамических параметров на внешней границе пограничного слоя (в том числе и распределение давления) должно быть известно заранее. Это приводит к необходимости построения приближенных формул для определения напряжения трения  $\tau_w$  и местного потока тепла  $q_w$ , точность которых на произвольном теле в значительной степени определялась бы точностью задания газодинамических параметров на внешней границе пограничного слоя.

Ниже приведен вывод таких зависимостей для ламинарного и турбулентного течения в пограничном слое.

**1. Определение величины напряжения трения.** Из расчетов для ламинарного пограничного слоя [1] и результатов обработки экспериментальных данных для турбулентного пограничного слоя [2] известно, что формулу для местного коэффициента сопротивления трения пластины можно записать в виде

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_e u_e^2} = \frac{A_n}{R_x^{1/n}}, \quad R_x = \frac{\rho_e u_e x}{\mu_e} \quad (1.1)$$

где  $n = 2$  и  $5$  соответственно для ламинарного и турбулентного пограничного слоя, а

$$A_2 = 0.664[0.45 + 0.55h_w/h_e + 0.09(\gamma - 1)M_e^2 P^{1/2}]^{1/2(\alpha-1)} \quad (1.2)$$

$$A_5 = 0.0592[1 + (\gamma - 1)P^{1/3}M_e^2/2]^{-0.55} (h_w/h_r)^{-0.21} \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho_e$ ,  $u_e$ ,  $\mu_e$ ,  $h_e$ ,  $M_e$  — соответственно плотность, скорость, динамический коэффициент вязкости, энтальпия и число Маха на внешней границе пограничного слоя,  $h_w$  — энтальпия при температуре поверхности,

$\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей,  $P$  — число Прандтля,  $\omega$  — показатель степени в зависимости вязкости от температуры.

Интегральное соотношение импульсов для пластины имеет вид

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} = \frac{1}{2} c_f, \quad \delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (1.4)$$

Отсюда, интегрируя выражение (1.4), принимая во внимание (1.1), получаем

$$c_f = \frac{2(n-1)\delta_2}{nx} = \frac{2(n-1)R_2}{nR_x}, \quad R_2 = \frac{\rho_e u_e \delta_2}{\mu_e} \quad (1.5)$$

Исключая из выражений (1.1) и (1.5) величину  $R_x$ , сначала получаем связь между  $c_f$  и  $R_2$

$$c_f = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\kappa_1} \frac{A_n^{\kappa_1}}{R_2^{\kappa_1}}, \quad \kappa = \frac{n}{n-1}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{n-1}$$

а затем после несложных преобразований — выражение, устанавливающее связь между  $\tau_w$ ,  $\delta_2$  и газодинамическими параметрами потока для пластины

$$y^j \tau_w = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_1}{2}\right)^{\kappa_1} (A_n y^j)^{\kappa} \rho_e^{\kappa-2\kappa_1} u_e^{2\kappa-3\kappa} \mu_e^{\kappa_1} (y^j \delta_2)^{-\kappa} \quad (1.6)$$

где  $j = 0$  и  $1$  соответственно для плоского и осесимметричного тела.

В общем случае связь между напряжением трения  $\tau_w$ , толщиной потери импульса  $\delta_2$ , величиной формпараметра  $H = \delta_1/\delta_2$  и газодинамическими параметрами потока определяется интегральным соотношением импульса для произвольного тела

$$y^j \tau_w = \frac{d}{ds} (\rho_e u_e^2 y^j \delta_2) + \rho_e u_e u_e' H y^j \delta_2, \quad \delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \quad (1.7)$$

Для исключения величины  $\delta_2$  и соотношения (1.7) воспользуемся гипотезой локального подобия, т. е. будем считать, что зависимость  $\delta_2$  от  $\tau_w$  и параметров потока в любом сечении плоского или осесимметричного тела такая же, как при обтекании пластины при том же числе Маха и той же температуре поверхности. Кроме того, будем предполагать, что зависимость  $H$  от параметров потока в каждом сечении тела будет такой же, как и в случае пластины.

Как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя зависимость величины  $H$  от параметров потока для пластины может быть представлена в виде

$$H = a_n + b_n M_e^2 \quad (1.8)$$

причем коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  не зависят от условий на внешней границе пограничного слоя.

Для ламинарного пограничного слоя эта зависимость, полученная по методу определяющей температуры, имеет вид

$$H = \frac{1}{B_4} \left[ B_0 + B_1 \frac{T_w}{T_e} - B_3 + (\gamma - 1) B_2 M_e^2 \right]$$

Отсюда

$$a_2 = \frac{1}{B_4} \left( B_0 + B_1 \frac{T_w}{T_0} - B_3 \right), \quad b_2 = \frac{\gamma - 1}{2B_4} \left( B_1 \frac{T_w}{T_0} + 2B_2 \right) \quad (1.9)$$

$$B_0 = 2.7261, \quad B_1 = 1.3652, \quad B_2 = 0.1943, \quad B_3 = 2.8741, \quad B_4 = 0.4676$$

Здесь  $T_0$  — температура торможения во внешнем потоке.

Аналогичная зависимость для турбулентного пограничного слоя имеет вид

$$H = 0.183M_e^2 + (1.4 + 0.245M_e^2)T_w/T_0 \quad (1.10)$$

Отсюда

$$a_5 = 1.4T_w/T_0, \quad b_5 = 0.183 + 0.245T_w/T_0 \quad (1.11)$$

Подставляя в (1.7) вместо  $y^j \delta_2$  и  $H$  выражения из (1.6) и (1.8) и учитывая, что  $u_e' M_e^2 / u_e = -\rho_e' / \rho_e$ , получаем дифференциальное уравнение Бернулли для определения величины  $y^j \tau_w$ , интеграл которого легко выписывается

$$y^j \tau_w = 1/2 (A_n y^j)^{\kappa} \rho_e^{\alpha_1} u_e^{\alpha_2} \mu_e^{\kappa_1} \left[ \int_0^{\cdot} (A_n y^j)^{\kappa} \rho_e^{\beta_1} u_e^{\beta_2} \mu_e^{\kappa_1} ds \right]^{-1/n} \quad (1.12)$$

$$\alpha_1 = \kappa - \kappa_1 (b_n - 1), \quad \alpha_2 = 2\kappa + \kappa_1 (a_n - 1), \\ \beta_1 = 1 - \kappa b_n, \quad \beta_2 = \kappa (a_n + 2) - \kappa_1 \quad (1.13)$$

Таким образом, выражение (1.12) устанавливает искомую связь между величиной напряжения трения и газодинамическими параметрами потока в данном сечении тела. Заметим, что при выводе формулы (1.12) предполагалось, что  $y^j \tau_w = 0$  при  $s = 0$ . Это означает, что формула становится несправедливой для плоских острых тел.

**2. Определение местного потока тепла.** Если воспользоваться аналогией Рейнольдса, то коэффициент теплопередачи для пластины можно представить следующим образом:

$$c_h = \frac{q_w}{\rho_e u_e (h_r - h_w)} = \frac{B_n}{R_x^{1/n}}, \quad B_n = \frac{A_n}{2s_n} \quad (2.1)$$

Здесь  $s_n$  — коэффициент аналогии Рейнольдса, а  $h_r$  — энтальпия теплоизолированной поверхности.

В случае пластины связь между местным потоком тепла  $q_w$ , толщиной потери энергии  $\theta$  и газодинамическими параметрами потока может быть установлена, если воспользоваться интегральным соотношением энергии для пластины, которое имеет следующий вид:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{q_w}{\rho_e u_e H_0} = \frac{h_r - h_w}{H_0} c_h, \quad \theta = \int_0^{\cdot} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left( 1 - \frac{H}{H_0} \right) dy \quad (2.2)$$

Здесь  $H$  — полная энтальпия в пограничном слое,  $H_0$  — энтальпия торможения.

Интегрируя это уравнение будем иметь

$$c_h = \frac{n-1}{n} \frac{H_0}{h_r - h_w} \frac{R_0}{R_x}, \quad R_0 = \frac{\rho_e u_e \theta}{\mu_e} \quad (2.3)$$

Исключая из выражений (2.1) и (2.3) величину  $R_x$ , получаем

$$c_h = \left( \kappa \frac{h_r - h_w}{H_0} \right)^{\kappa_1} \frac{B_n^{\kappa_1}}{R_0^{\kappa_1}}$$

$$y^j q_w = [(h_r - h_w) y^j B_n \rho_e u_e]^{\kappa_1} \left( \frac{\kappa \mu_e}{H_0 y^j \theta} \right)^{\kappa_1} \quad (2.4)$$

В каждом сечении произвольного тела зависимость  $q_w$  от  $\theta$  и от параметров потока и формы тела определяется интегральным соотношением энергии

$$\frac{d}{ds} (\rho_e u_e y^j \theta) = \frac{y^j q_w}{H_0} \quad (2.5)$$

Подставляя в (2.5) величину  $(y^j q_w)$ , из (2.4) получаем дифференциальное уравнение для определения величины  $\rho_e u_e y^j \theta$ , интеграл которого совместно с (2.4) дает искомое выражение для  $y^j q_w$

$$y^j q_w = \varphi \left[ \int_0^s \varphi ds \right]^{-1/n}, \quad \varphi = [B_n y^j (h_r - h_w)]^{\kappa_1} \rho_e u_e \mu_e^{\kappa_1} \quad (2.6)$$

При выводе формулы (2.6) предполагалось, что  $\rho_e u_e y^j \theta = 0$  при  $s = 0$ . Поэтому формула становится несправедливой для плоских острых тел.

Формула (2.6) для случая ламинарного пограничного слоя получена ранее в работе [7].

Для суждения о том, насколько правильно предложенные формулы предсказывают распределение напряжения трения и местного потока тепла вдоль тела произвольной формы, формула (1.12) и (2.6) были использованы для расчетов коэффициента

$$\tau_1 = \frac{\tau_w R_0^{1/2}}{\rho_0^* V_m^2} \left( R_0 = \frac{\rho_0^* V_m r}{\mu_0^*}, V_m = \frac{2\gamma p_0^*}{(\gamma - 1)\rho_0^*} \right)$$

а также  $q/q_0$  на сферически затупленных конусах с полууглами раствора  $\alpha = 0, 10$  и  $30^\circ$  при ламинарном течении в пограничном слое ( $n = 2$ ). Здесь  $r$  — радиус затупления, а индекс  $(^*)$  относится к параметрам в критической точке за прямым скачком уплотнения. При этом распределение давления определялось по модифицированной формуле Ньютона

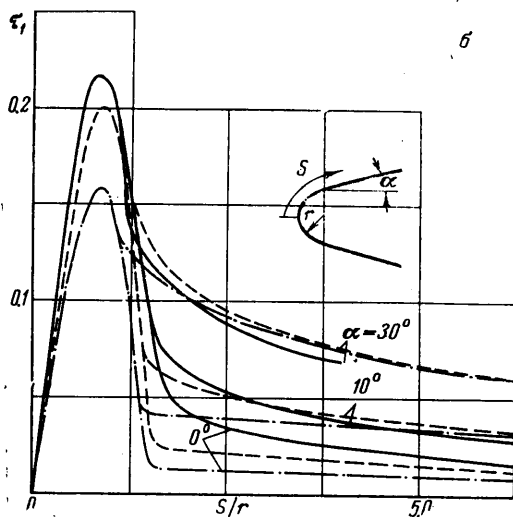
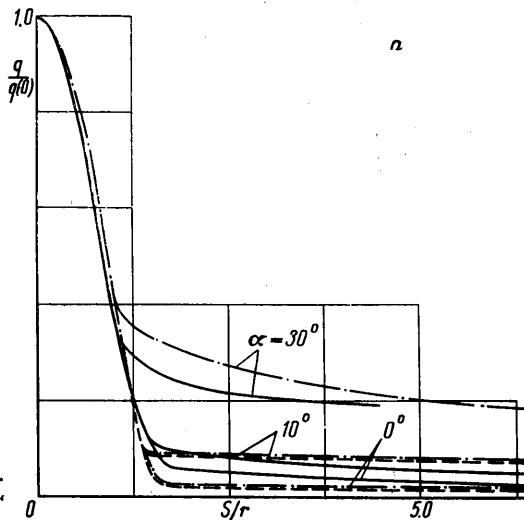
$$\pi = \frac{p}{p_0^*} = \pi_\infty + (1 - \pi_\infty) \frac{y^2}{1 + y^2}, \quad y = \frac{dy}{dx}, \quad \pi_\infty = \frac{p_\infty}{p_0^*} \quad (2.7)$$

а другие газодинамические параметры выражались через  $\pi$  в предположении изэнтропичности течения за ударной волной вдоль линии тока.

Результаты этих расчетов при  $M = 10$ ,  $T_w/T_0 = 0.05$ ,  $P = 0.7$  и  $\omega = 0.5$  приведены пунктиром на фиг. 1, а и б. Там же для сравнения сплошной кривой приведены результаты точных расчетов, заимствованные из работы [3], и штрих-пунктиром — результаты расчетов по методу локального подобия [4]. Заметим, что в точных расчетах пограничного слоя зависимость вязкости от температуры определялась по формуле Сюзерленда, а распределение давления на внешней границе пограничного слоя бралось из таблиц работы [3]. Последнее существенно отличается от распределения давления, полученного по модифицированной формуле Ньютона вблизи точки разрыва кривизны. Этим, по-видимому, объясняется наибольшее различие между результатами точных и приближенных расчетов в окрестности этой точки. В целом можно сказать, что приближенные формулы (1.12) и (2.6) позволяют получить правильную картину распределения напряжения трения и местного потока тепла и пригодны для сравнительного анализа влияния формы тела на сопротивление тре-

ния и тепловой поток  $q$ , в частности, для решения вариационных задач по определению формы тела из условия минимального сопротивления и минимального потока тепла к поверхности.

В случае турбулентного течения в пограничном слое сравнение величин напряжения трения и местного потока тепла, вычисленных по приближенным формулам



Фиг. 1

трения определяется по формуле (1.12), а не по методу локального подобия, как в работе [1]. Поэтому в данной работе приводятся лишь краткое описание постановки задачи и основные формулы.

Коэффициент сопротивления плоского или осесимметричного тела, обтекаемого потоком газа, определяется по формуле

$$c_x = \frac{X}{q_\infty S} = \frac{1}{S} \int_0^{\bar{S}} [-c_p(n, u_x) + c_f(t, u_x)] dS = c_{xp} + c_{xf}$$

(1.12) и (2.6), с результатами эксперимента не проводилось. Это объясняется двумя причинами: во-первых, в литературе практически полностью отсутствуют экспериментальные данные по распределению величин напряжения трения и местного потока тепла при полностью турбулентном пограничном слое и, во-вторых, из-за малой точности разброс этих данных настолько велик, что вряд ли они могут быть использованы для суждения о пригодности полученных приближенных формул. С другой стороны, как при ламинарном, так и при турбулентном течении в пограничном слое формулы (1.12) и (2.6) были получены при одних и тех же предположениях. Точность этих формул в значительной мере зависит от того, насколько точно определена зависимость местного коэффициента сопротивления пластины от числа Рейнольдса, числа  $M$  и температурного фактора. Однако при отсутствии продольного градиента давления существует большое число экспериментальных данных, которые позволяют с хорошей точностью определить эту зависимость в случае турбулентного пограничного слоя. Это дает основание полагать, что приближенные формулы (1.12) и (2.6) позволяют получить правильную картину распределения напряжения трения и местного потока тепла вдоль тела и при турбулентном течении в пограничном слое.

**3. Осесимметричные тела минимального сопротивления или минимального потока тепла.** Постановка задачи о теле минимального полного сопротивления в работе отличается от постановки задачи, изложенной в работе [1], лишь тем, что напряжение

где  $u_x$  — единичный вектор вдоль оси  $x$ , совпадающей с направлением невозмущенного потока,  $n$  и  $t$  — соответственно единичные нормальный и касательный векторы к элементу поверхности тела  $dS$ .

Как известно, в предположении ньютоновского течения величина теплового потока в критической точке затупления обратно пропорциональна корню квадратному из радиуса кривизны затупления. Отсюда, следует, что телом с минимальным полным потоком тепла при этих предположениях является цилиндр с плоским передним торцом, тепловой поток к которому равен нулю.

Будем искать решение задачи в классе тел, состоящих из переднего торца, для расчета распределения давления, на котором можно использовать метод интегральных соотношений в простейшем виде [6, 7, 4], и боковой поверхности, распределение давления на которой определяется по модифицированной формуле Ньютона (2.7). При этом предположение о звуковой скорости на кромке торца, используемое в работе [6], приводит к ограничению на максимальное значение давления на боковой поверхности. Согласно (2.7) это соответствует ограничению на максимальный угол наклона боковой поверхности

$$y'^2 \leq \frac{\pi_* - \pi_\infty}{1 - \pi_*}, \quad \pi_* = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/b}, \quad b = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad (3.1)$$

Пусть контур плоского ( $j = 0$ ) или осесимметричного ( $j = 1$ ) тела описывается уравнением  $y_1 = y_1(x)$ . Тогда, воспользовавшись предположением об изэнтропичности течения вдоль линии тока за ударной волной и соотношениями (1.12) и (2.6), исходные формулы для коэффициентов сопротивления и теплопередачи можно записать в следующем виде [4]:

$$c_x = [y(0)]^{1+j} J_{xj} + c_{xp} + c_{xj} \quad (3.2)$$

$$c_{xp} = \frac{2^{1+j}(1 - \pi_\infty)\tau^2}{\gamma\pi_\infty M_\infty^2} \int_0^1 \frac{y'^3 y^j}{1 + \tau^2 y'^2} dx, \quad x = \frac{x_1}{l}, \quad y = \frac{y_1}{R}, \quad \tau = \frac{R}{l}$$

$$c_{xj} = \frac{2^{1+j}}{(\gamma - 1)\pi_\infty M_\infty^2 R_0^{1/n} \tau^{1/n}} \int_0^1 (A_n y^j)^{\kappa} \pi^{c_1} (1 - \pi^b)^{c_2} \left[ (y(0))^{1+j} J_{xj} + \int_0^x (A_n y^j)^{\kappa} \pi^{c_3} (1 - \pi^b)^{c_4} \sqrt{1 + \tau^2 y'^2} dx \right]^{-1/n} dx$$

$$\chi = (c_{H^* S_n})^{\kappa} R_*^{\kappa_1} = [y(0)]^{1+j} J_{xj} + B_5 \left[ \frac{\kappa T_0}{2(T_0 - T_w)} \right]^{\kappa} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[ A_n \left( \pi^b + P_n^d (1 - \pi^b) - \frac{T_w}{T_0} \right) y^j \right]^{\kappa} \pi^{c_5} \sqrt{(1 - \pi^b)(1 + \tau^2 y'^2)} dx \quad (3.3)$$

$$R_0 = \frac{\rho_0^* V_m R}{\mu_0^*}, \quad c_{H^*} = \frac{Q}{2\pi^j (H_0 - h_w) l R^j \rho_* u_*}$$

$$R_* = \frac{\rho_* u_* l}{\mu_*} = \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\sigma_1} \frac{R_0}{\tau}, \quad B_5 = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\sigma_2} \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2}$$

$$c_1 = b\omega\kappa_1 + \frac{1 - \kappa_1 b_n}{\gamma}, \quad c_2 = \kappa + \kappa_1 \frac{a_n - 1}{2}, \quad c_3 = c_1 - \frac{b_n}{\gamma}$$

$$c_4 = c_2 + \frac{a_n}{\gamma}, \quad c_5 = c_1 + \frac{b_n \kappa_1}{\gamma}, \quad d_n = \frac{3}{n+4}$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{\gamma-1} - \omega, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{\gamma-1} + \frac{\omega}{n-1}$$

Здесь  $l$  и  $R$  — соответственно длина и радиус миделя тела, а звездочкой обозначены критические параметры потока за прямым скачком уплотнения. Приведем также выражения для интегралов  $J_{x_0}$ ,  $J_{\xi_1}$  и  $J_{x_1}$ , вывод которых аналогичен приведенному в работе [1]

$$J_{x_0} = \frac{4\delta_0}{\gamma(\gamma+1)\pi_\infty M_\infty^2} \int_0^1 (1-\lambda^2) (\varphi^{1/b} - \pi_\infty) \varphi^{c_5-1} \xi d\lambda$$

$$J_{\xi_0} = \frac{2\tau\delta_0}{\gamma+1} \int_0^1 A_n^* (1-\lambda^2) (1-\varphi)^{c_4} \varphi^{c_5+c_6-1} \xi d\lambda$$

$$J_{x_0} = \frac{2B_5\tau\delta_0}{\gamma+1} \varepsilon_n \int_0^1 \left[ A_n \left( \varphi + P^{d_n} (1-\varphi) - \frac{T_w}{T_0} \right) \right]^* \times$$

$$\times (1-\lambda^2) (1-\varphi)^{1/2} \varphi^{c_7+c_8-1} \xi d\lambda$$

$$J_{x_1} = \frac{4\delta_1}{\gamma\pi_\infty M_\infty^2} \int_0^1 \lambda (1-\lambda^2) (\varphi^{1/b} - \pi_\infty) \psi^{c_{10}} d\lambda$$

$$J_{\xi_1} = \tau\delta_1 \int_0^1 (A_n\lambda)^* (1-\lambda^2) \varphi^{c_9} (1-\varphi)^{c_4} \psi^{c_9} d\lambda$$

$$J_{x_1} = \varepsilon_n \tau B_5 \delta_1 \int_0^1 \left[ \lambda A_n \left( \varphi + P^{d_n} (1-\varphi) - \frac{T_w}{T_0} \right) \right]^* \times$$

$$\times (1-\lambda^2) \varphi^{c_7} (1-\varphi)^{1/2} \psi^{c_9} d\lambda$$

$$\varphi = \pi^b = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2, \quad \xi = \frac{(\gamma+1) [(1+\lambda^2)\varphi^{c_5} - \pi_\infty] - 2\lambda^2\gamma\varphi^{c_5}}{[(1+\lambda^2)\varphi^{c_5} - \pi_\infty]^2}$$

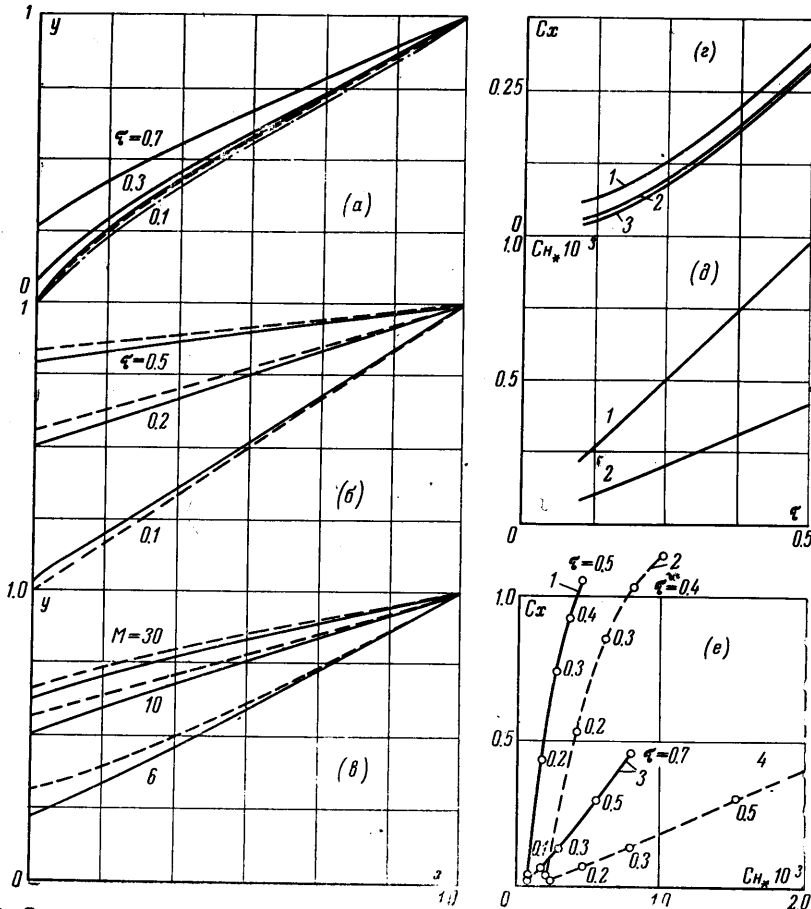
$$\psi = \delta_1 + \frac{3\gamma+1}{4\gamma+2} \lambda^2, \quad \delta_0 = 1 - \frac{\pi_\infty}{2} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{c_9}, \quad \delta_1 = \frac{\gamma+1}{4\gamma+2}$$

$$C_6 = \omega\kappa_1 + (1 + \kappa b_n) C_9, \quad C_7 = C_9 + \omega\kappa_1, \quad C_8 = - \frac{\kappa(2\gamma+1) + 5\gamma+2}{3\gamma+1}$$

$$C_9 = \frac{1}{\gamma-1}, \quad C_{10} = - \frac{7\gamma+3}{3\gamma+1}, \quad \varepsilon_n = \left[ \frac{\kappa}{2(1-T_w/T_0)} \right]^*$$

Теперь задачу о форме осесимметричного тела заданных размеров, состоящего из плоского переднего торца и пологой боковой поверхности и обладающего минимальным сопротивлением (или минимальным потоком тепла) в гиперзвуковом потоке вязкого газа, можно сформулировать следующим образом: найти функцию  $y = y(x)$ , минимизирующую функционал (3.2) (или (3.3)) и удовлетворяющую условию (3.1) и условию  $y(1) = 1$ .

Сформулированные вариационные задачи решались численно модифицированным методом локальных вариаций [3, 4] при  $j = 1$ ,  $M_\infty = 10$ ,  $P = 0.7$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $T_w/T_0 = 0.1$ ,  $R_0 = 10^4, 10^6$  (ламинарный пограничный слой) и  $R_0 = 10^6$  (турбулентный пограничный слой) при различных относительных толщинах  $\tau$ . Результаты расчетов приведены на фиг. 2. На фиг. 2, а приведены формы тел минимального сопротивления (сплошные кривые соответствуют  $R_0 = 10^6$  и  $n = 2$ , пунктирные —  $R_0 = 10^6$  и  $n = 5$ , штрих-пунктирные —  $R_0 = 10^4$  и  $n = 2$ ). При  $\tau \geq 0.3$  форма тел минимального сопротивления не зависит ни от числа  $R_0$ , ни от характера течения в пограничном слое и кривые сливаются. Для этих значений  $\tau$  задача о форме тела минимального полного сопротивления эквивалентна задаче о форме тела минимального волнового сопротивления. Однако даже при  $\tau = 0.1$  изменение характера тече-



Фиг. 2

ния в пограничном слое приводит лишь к очень малому изменению формы оптимального тела. При числе  $R_0 = 10^4$  форма тела становится существенно более полой, приближаясь к затупленному конусу.

Отметим, что эти результаты качественно согласуются с выводами работы [4], однако при  $\tau = 0.1$  не получается тел с «иглой» в передней части.

На фиг. 2, в приведены зависимости коэффициента сопротивления  $C_x$  от относительной толщины  $\tau$  для тел минимального сопротивления (кривая 1 соответствует  $R_0 = 10^4$ , кривые 2 и 3 —  $R_0 = 10^6$  для случаев турбулентного и ламинарного течения в пограничном слое соответственно).

На фиг. 2, д приведены зависимости коэффициента теплопередачи  $C_{ht}$  от относительной толщины  $\tau$  при  $R_0 = 10^6$  для тел с минимальным полным потоком тепла (кривая 1 соответствует  $n = 5$ , а кривая 2 — значению  $n = 2$ ). Эти зависимости почти линейны.

На фиг. 2, б приведены формы тел с минимальным полным потоком тепла при  $R_0 = 10^6$  (сплошные кривые соответствуют  $n = 2$ , а пунктирные —  $n = 5$ ). Интересно



отметить, что влияние характера течения в пограничном слое различно для разных  $\tau$ : при  $\tau = 0.2$  и  $0.5$  тела при  $n = 5$  толще, чем при  $n = 2$ , а при  $\tau = 0.1$  наоборот. Кроме того, полученные тела имеют существенно большие торцы в передней части по сравнению с телами минимального сопротивления, что должно приводить к существенному увеличению сопротивления. Это хорошо видно на фиг. 2, *e*, где приведены зависимости коэффициента сопротивления  $c_x$  от коэффициента теплопередачи  $c_H$ . Кривые 1 и 2 относятся к телам с минимальным потоком тепла, а кривые 3 и 4 — к телам с минимальным сопротивлением. При этом сплошные кривые соответствуют  $n = 2$ , а пунктирные —  $n = 5$ ; кружочками на кривых отмечены значения относительной толщины  $\tau$ .

Анализируя приведенные результаты, можно видеть, что независимо от характера течения в пограничном слое относительно небольшое уменьшение потока тепла, достигаемое на телах с минимальным потоком тепла по сравнению с телами минимального сопротивления для каждого заданного  $\tau$  приводит к существенному росту сопротивления. При малых  $\tau$  (тонкие тела) характеристики тел с минимальным потоком тепла близки к характеристикам тел с минимальным сопротивлением, что качественно подтверждает вывод работы [9] о том, что тонкие тела минимального сопротивления близки к оптимальным и в смысле полного потока тепла.

Отметим еще, что форма тел с минимальным потоком тепла сильно меняется при изменении числа  $M_\infty$ . Характер этого изменения можно видеть на фиг. 3, *e*, где для  $\tau = 0.2$  приведены формы тел с минимальным потоком тепла при  $n = 2$  (сплошные кривые) и  $n = 5$  (пунктир) и различных числах  $M_\infty$ . Видно, что с уменьшением числа  $M_\infty$  происходит резкое уменьшение радиуса торца, которое приводит к уменьшению сопротивления. Изменяется также и кривизна контура. И хотя числа  $M_\infty$ , при которых происходит изменение знака кривизны, несколько зависят от  $\tau$ , приближенно можно считать, что при  $M_\infty > 10$  оптимальные тела выпуклы, а при  $M_\infty < 10$  — вогнуты.

Поступило 30 VI 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Современное состояние аэродинамики больших скоростей», М., Изд-во иностр. лит., 1955.
2. Козлов Л. В. Экспериментальное исследование поверхностного трения на плоской пластине в сверхзвуковом потоке при наличии теплообмена. Изв. АН СССР, 1963, ОТН, Механика и машиностроение, № 2.
3. Башкин В. А., Колина Н. П. Расчет сопротивления трения и теплового потока на сферически затупленных круговых конусах в сверхзвуковом потоке. Тр. ЦАГИ, 1968, вып. 1106.
4. Перминов В. Д. Осесимметричные тела минимального сопротивления в вязком гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
5. Чушкин П. И. Шулишина Н. П. Таблицы сверхзвукового течения около затупленных конусов. М., ВЦ АН СССР, 1961.
6. Черный Г. Г. Гиперзвуковое обтекание крыльев при больших углах атаки. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 2.
7. Белянин Н. М. Определение формы тела с минимальным тепловым потоком при ламинарном режиме течения в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
8. Черноусько Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 4.
9. Гродзовский Г. Л. О телах вращения с минимальным коэффициентом лобового сопротивления и малой теплопередачей при больших сверхзвуковых скоростях полета. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 5.