

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ КРЫЛЕ

В. В. БОГДАНОВА

(Ленинград)

Рассмотрена задача о движении несжимаемой жидкости в пограничном слое на равномерно вращающемся крыле вокруг оси, перпендикулярной размаху крыла. Для решения задачи применен параметрический метод и введены три ряда параметров, от которых зависят характеристики пограничного слоя. Установлена соответствующая система универсальных уравнений, которая проинтегрирована в широком диапазоне изменения параметров. Полученные результаты позволяют исследовать основные закономерности течения в пограничном слое на вращающемся крыле. Выявлено влияние вращения на отрыв и другие характеристики пограничного слоя.

1. Основные уравнения движения. Рассмотрим ламинарный пограничный слой на крыле, которое вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной размаху крыла. Для исследования движения вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое введем связанную с крылом систему координат x, y, z , где ось x направлена по обводу сечения крыла, z — по размаху крыла, y — перпендикулярно поверхности крыла. При обычных предположениях теории пограничного слоя уравнения пространственного пограничного слоя в рассматриваемом случае имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\omega_y w - \omega^2 x^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + 2\omega_y u - \omega^2 z^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

с граничными условиями:

$$u = v = w = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.4)$$

$$u \rightarrow U(x, z), \quad w \rightarrow W(x, z) \quad \text{при } y \rightarrow \infty$$

Здесь приняты следующие обозначения: u, v, w — проекции вектора скорости в пограничном слое на оси x, y, z ; U, W — проекции скорости внешнего потока на оси x, z ; p — давление; ρ — плотность; ν — коэффициент кинематической вязкости; ω_y — проекция вектора угловой скорости вращения крыла на ось y ; x^*, z^* — проекции на оси x и z вектора, направленного по кратчайшему расстоянию от оси вращения к рассматриваемой точке и равного по величине этому расстоянию.

Связь между давлением и составляющими вектора скорости внешнего потока определяется из соответствующих «усеченных» [1] уравнений Эйлера

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} - 2\omega_y W - \omega^2 x^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.5)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} + 2\omega_y U - \omega^2 z^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.6)$$

При использовании уравнений (1.5), (1.6) нет необходимости делать предположение о потенциальности внешнего потока в неподвижной системе координат; достаточно потребовать, чтобы в неподвижной системе две составляющие вихря в плоскости, касательной к обтекаемой поверхности, были равны нулю. Третья составляющая вихря, нормальная к обтекаемой поверхности, может быть и не равна нулю.

Если принять, что вектор $\omega^2 r^*$ слабо меняется внутри пограничного слоя, то, подставляя выражения (1.5), (1.6) в уравнения (1.1) — (1.3), получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\omega_y w = U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} - 2\omega_y W + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + 2\omega_y u = U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} + 2\omega_y U + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.9)$$

граничные условия

$$u = v = w = 0 \quad \text{при } y = 0; u \rightarrow U(x, z),$$

$$w \rightarrow W(x, z) \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Следует отметить, что ранее рядом авторов [2-5] рассматривалась задача о вращающемся цилиндрическом крыле. Однако в отличие от данной, в этих работах исследовалось движение в пограничном слое в сечениях крыла, расположенных на расстоянии нескольких хорд от оси вращения, и предполагалось, что составляющие скорости в направлении размаха (трансверсальные скорости) малы по сравнению с составляющими скоростей вдоль хорды (продольные скорости). Это предположение приводит к тому, что в уравнениях (1.7), (1.9) отбрасываются слагаемые, содержащие w , и эти уравнения становятся такими же, как в плоском случае. Таким образом, в этой упрощенной постановке продольное течение не зависит от трансверсального.

Для решения системы уравнений (1.7) — (1.9) применим параметрический метод [6], обобщенный на случай пространственного пограничного слоя в работе [7]. Основная идея этого метода заключается в том, что система уравнений (1.7) — (1.9) сводится к системе универсальных уравнений, которая не зависит от конкретных условий во внешнем потоке и поэтому может быть проинтегрирована раз и навсегда. С помощью затабулированных решений универсальных уравнений можно сравнительно просто производить расчет характеристик пограничного слоя для любого заданного внешнего потока. Кроме того, результаты интегрирования системы универсальных уравнений позволяют исследовать общие закономерности течения в пограничном слое.

Приведем здесь необходимые для дальнейшего интегральные соотношения, которые можно получить обычным способом из системы уравнений (1.7) — (1.9). Эти соотношения имеют вид

$$\frac{\partial(\delta_{11}^* U^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta_{21}^{**} UW)}{\partial z} + U \frac{\partial U}{\partial x} \delta_1^* + W \frac{\partial U}{\partial z} \delta_2^* - 2\omega_y W \delta_2^* - \frac{\tau_{wx}}{\rho} = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial(\delta_{12}^{**} UW)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta_{22}^{**} W^2)}{\partial z} + U \frac{\partial W}{\partial x} \delta_1^* + W \frac{\partial W}{\partial z} \delta_2^* +$$

$$+ 2\omega_y U \delta_1^* - \frac{\tau_{wz}}{\rho} = 0 \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}\tau_{wx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, & \tau_{wz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \\ \delta_{11}^{**} &= \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy, & \delta_1^* &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \\ \delta_{12}^{**} &= \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{w}{W} \right) dy, & \delta_{21}^{**} &= \int_0^\infty \frac{w}{W} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \\ \delta_{22}^{**} &= \int_0^\infty \frac{w}{W} \left(1 - \frac{w}{W} \right) dy, & \delta_2^* &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{w}{W} \right) dy\end{aligned}$$

Здесь τ_{wx}, τ_{wz} — трение на поверхности крыла.

2. Вывод системы универсальных уравнений. Введем новую переменную

$$\eta = B \frac{y}{l(x, z)} \quad (2.1)$$

где B — нормирующий множитель, $l(x, z)$ — линейный масштаб координаты y . Полагая

$$u = U \frac{\partial \Phi_1(x, z, \eta)}{\partial \eta}, \quad w = W \frac{\partial \Phi_2(x, z, \eta)}{\partial \eta}$$

и используя уравнение неразрывности (1.9), можно уравнения (1.7), (1.8) переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \eta^3} + \frac{f_{10}^{[1]}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\sigma f_{01}^{[1]}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \frac{f_{10}^{[1]}}{B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \\ + \frac{f_{01}^{[2]}}{B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} - \frac{2f_{00}^{[3]}\sigma}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \frac{U}{2B^2} \frac{\partial t}{\partial x} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \\ + \frac{W}{2B^2} \frac{\partial t}{\partial z} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} = \frac{tU}{B^2} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \right. \\ \left. + \sigma \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right) \right] \quad (2.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \eta^3} + \frac{f_{10}^{[2]}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \sigma \frac{f_{01}^{[2]}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ + \sigma \frac{f_{10}^{[1]}}{B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{f_{01}^{[2]}}{B^2} \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta^2} + \frac{2f_{00}^{[3]}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \\ + \sigma \frac{U}{2B^2} \frac{\partial t}{\partial x} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{W}{2B^2} \frac{\partial t}{\partial z} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} = \sigma \frac{tU}{B^2} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial \eta} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \sigma \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right) \right] \quad (2.3)\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}t = \frac{l^2}{\nu}, \quad f_{10}^{[1]} = \frac{\partial U}{\partial x} t, \quad f_{01}^{[1]} = \frac{\partial U}{\partial z} t, \quad f_{10}^{[2]} = \frac{\partial W}{\partial x} t \\ f_{01}^{[2]} = \frac{\partial W}{\partial z} t, \quad f_{00}^{[2]} = \frac{W}{U} = \sigma, \quad f_{00}^{[3]} = \omega_y t \quad (2.4)\end{aligned}$$

На основании входящих в уравнения (2.2) и (2.3) комплексов (2.4) составим следующие ряды параметров:

$$f_{ki}^{[1]} = U^{k+i-1} \frac{\partial^{k+i} U}{\partial x^k \partial z^i} t^{k+i}, \quad f_{ki}^{[2]} = U^{k+i-1} \frac{\partial^{k+i} W}{\partial x^k \partial z^i} t^{k+i}$$

$$f_{ki}^{[3]} = U^{k+i} \frac{\partial^{k+i} \omega_y}{\partial x^k \partial z^i} t^{k+i-1}, \quad \left(\begin{array}{l} k=0,1,2,\dots \\ i=0,1,2,\dots \end{array} \right) \quad (2.5)$$

от которых будут зависеть искомые функции Φ_1 и Φ_2 , определяющие профили скоростей в пограничном слое. Параметры $f_{ki}^{[1]}$ и $f_{ki}^{[2]}$ определяют влияние распределения продольной и трансверсальной скоростей внешнего потока, а параметры $f_{ki}^{[3]}$ характеризуют непосредственное влияние вращения.

Ранее в работе (7) указывалось, что удачный выбор масштаба l может значительно упростить систему универсальных уравнений. В рассматриваемой задаче выберем масштаб l так, чтобы удовлетворить уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta_{11}^{**} U^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta_{21}^{**} UW) = \frac{\partial}{\partial x} (U^2 l) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta_{12}^{**} UW) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta_{22}^{**} W^2) + 2\omega_y U \delta_1^* +$$

$$+ U \frac{\partial W}{\partial x} \delta_1^* - \frac{\tau_{wz}}{\rho} = \frac{\partial}{\partial z} (W^2 l) \quad (2.7)$$

Отметим, что в частных случаях плоского течения и крыла со скольжением из (2.6) и (2.7) следует обычное определение масштаба $l = \delta_{11}^{**}$.

При помощи (2.6) и (2.7) и интегральных соотношений (1.10) и (1.11) получим

$$U \frac{\partial t}{\partial x} = F_1, \quad W \frac{\partial t}{\partial z} = F_2 \quad (2.8)$$

Здесь

$$F_1 = 2[\zeta_1 - f_{10}^{[1]}(2 + H_1) - f_{01}^{[1]} \sigma H_2 + 2\sigma f_{00}^{[3]} H_2], \quad H_1 = \frac{\delta_1^*}{l} \quad (2.9)$$

$$F_2 = -2f_{01}^{[2]}(2 + H_2), \quad H_2 = \frac{\delta_2^*}{l}, \quad \zeta_1 = \left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/l)} \right]_{y=0}$$

Имея в виду, что функции Φ_1 и Φ_2 являются функциями переменной η и параметров $f_{ki}^{[r]}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, i = 0, 1, 2, \dots, r = 1, 2, 3$), произведем в уравнениях (2.2), (2.3) переход от производных по переменным x и z к производным по параметрам в соответствии с формулами

$$Ut \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{r=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial f_{ki}^{[r]}} \Theta_{ki}^{[r]} \right), \quad \Theta_{ki}^{[r]} = Ut \frac{\partial f_{ki}^{[r]}}{\partial x}$$

$$Wt \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{r=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial f_{ki}^{[r]}} \Phi_{ki}^{[r]} \right), \quad \Phi_{ki}^{[r]} = Wt \frac{\partial f_{ki}^{[r]}}{\partial z}$$

Кроме того, заметим, что имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
 Ut \frac{\partial f_{ki}^{[r]}}{\partial x} &= (k+i-1)f_{i0}^{[1]}f_{ki}^{[r]} + f_{k+i,i}^{[r]} + (k+i)f_{ki}^{[r]}F_1 \\
 Wt \frac{\partial f_{ki}^{[r]}}{\partial z} &= (k+i-1)\sigma f_{01}^{[1]}f_{ki}^{[r]} + \sigma f_{k,i+1}^{[r]} + (k+i)f_{ki}^{[r]}F_2 \quad (r=1,2) \\
 Ut \frac{\partial f_{ki}^{[3]}}{\partial x} &= (k+i)f_{i0}^{[1]}f_{ki}^{[3]} + f_{k+i,i}^{[3]} + (k+i+1)f_{k,i}^{[3]}F_1 \\
 Wt \frac{\partial f_{ki}^{[3]}}{\partial z} &= (k+i)\sigma f_{01}^{[1]}f_{ki}^{[3]} + \sigma f_{k,i+1}^{[3]} + (k+i+1)f_{ki}^{[3]}F_2
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Тогда при помощи соотношений (2.8) и (2.10) уравнения (2.2) и (2.3) можно записать в универсальном виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \eta^3} + \frac{f_{i0}^{[1]}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\sigma f_{01}^{[1]}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\sigma \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) - \\
 - \frac{2f_{00}^{[2]}\sigma}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \frac{2f_{i0}^{[1]} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \\
 + \frac{2f_{01}^{[2]} + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} = K_1 + L_1 \\
 \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \eta^3} + \frac{f_{i0}^{[2]}}{\sigma B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \frac{f_{01}^{[2]}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\
 + \frac{2f_{00}^{[3]}}{\sigma B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \frac{2f_{i0}^{[1]} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \\
 + \frac{2f_{01}^{[2]} + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} = K_2 + L_2 \\
 K_n = \frac{1}{B^2} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta \partial f_{ki}^{[r]}} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{ki}^{[r]}} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta^2} \right) \theta_{ki}^{[r]}, \tag{2.12} \\
 L_n = \frac{1}{B^2} \sum_{r=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta \partial f_{ki}^{[r]}} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{ki}^{[r]}} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta^2} \right) \theta_{ki}^{[r]} \quad (n=1,2)
 \end{aligned}$$

Граничные условия

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \\
 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

$$\Phi_1 = \Phi^{(0)}(\eta), \quad \Phi_2 = \Phi^{(0)}(\eta) \quad \text{при } f_{ki}^{[r]} = 0 \quad (\sigma \neq 0, f_{00}^{[1]} \neq 0)$$

При этом функция $\Phi^{(0)}(\eta)$ при соответствующем выборе нормирующего множителя B является решением уравнения Блазиуса.

Полученная система уравнений (2.12) будет универсальной, так как ни сами уравнения, ни граничные условия не зависят явно от формы вращающегося крыла и скоростей внешнего потока.

3. Интегрирование системы универсальных уравнений. Система (2.12) была решена в локально-параметрическом приближении с сохранением в ней конечного числа параметров $f_{i0}^{[1]}$, $f_{01}^{[1]}$, σ , $f_{i0}^{[2]}$, $f_{01}^{[2]}$, $f_{00}^{[3]}$. Кроме

того, основываясь на предположении, что главную роль играет параметр $f_{10}^{[1]}$, характеризующий изменение продольной скорости вдоль хорды сечения крыла, в правой части уравнений (2.12) были оставлены производные только по этому параметру. Для упрощения записи введем для оставшихся параметров следующие обозначения

$$f_{10}^{[1]} = f_{10}, \quad f_{01}^{[1]} = f_{01}, \quad f_{10}^{[2]} / \sigma = q_{10}, \quad f_{01}^{[2]} = q_{01}, \quad 2f_{00}^{[3]} / \sigma = \lambda.$$

В указанном локально-параметрическом приближении и при принятых обозначениях уравнения (2.12) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \eta^3} + \frac{f_{10}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\sigma f_{01}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \\ + \frac{2f_{10} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \frac{2q_{01} + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda \sigma^2}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) = \\ = \frac{f_{10}}{B^2} \left[F_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial f_{10} \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{10}} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right) + \right. \\ \left. + F_2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial f_{10} \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{10}} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \eta^3} + \frac{q_{01}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{q_{10}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \\ + \frac{2f_{10} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \frac{2q_{01} + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \frac{\lambda}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) = \\ = \frac{f_{10}}{B^2} \left[F_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial f_{10} \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{10}} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right) + F_2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial f_{10} \partial \eta} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{10}} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right) \right]; \end{aligned}$$

причем

$$F_1 = 2[\zeta_1 - f_{10}(2 + H_1) - f_{01}\sigma H_2 + \sigma^2 \lambda H_2], \quad F_2 = -2q_{01}(2 + H_2)$$

Граничные условия:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

$$\Phi_r = \Phi_r^{(0)} \quad (\eta, f_{01}, q_{10}, q_{01}, \lambda, \sigma), \quad (r = 1, 2) \quad \text{при } f_{10} = 0.$$

Функции $\Phi_1^{(0)}$ и $\Phi_2^{(0)}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta^3} + \frac{\sigma f_{01}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta} \right) + \frac{F_1^{(0)}}{2B^2} \Phi_1^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta^2} + \\ + \frac{2q_{01} + F_2^{(0)}}{2B^2} \Phi_2^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda \sigma^2}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta} \right) = 0, \\ \frac{\partial^3 \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta^3} + \frac{q_{01}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{q_{10}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta} \right) + \\ + \frac{F_1^{(0)}}{2B^2} \Phi_1^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{2q_{01} + F_2^{(0)}}{2B^2} \Phi_2^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\lambda}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$F_1^{(0)} = 2[\zeta_1^{(0)} - f_{01}\sigma H_2^{(0)} + \sigma^2 \lambda H_2^{(0)}], \quad F_2^{(0)} = -2q_{01}(2 + H_2^{(0)})$$

Граничные условия:

$$\Phi_1^{(0)} = \Phi_2^{(0)} = \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

Если, как и в работах [2-5], предположить, что трансверсальные скорости малы по сравнению с продольными, т. е. малы параметры σ , q_{01} , то, пренебрегая малыми величинами, получаем следующую систему универсальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^3} + \frac{f_{10}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{2f_{10} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} = \quad (3.2)$$

$$= \frac{f_{10}}{B^2} F_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial f_{10} \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{10}} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \eta^3} + \frac{q_{10}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \frac{2f_{10} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} +$$

$$+ \frac{\lambda}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) = \frac{f_{10}}{B^2} F_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial f_{10} \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{10}} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right)$$

$$F_1 = 2[\zeta_1 - f_{10}(2 + H_1)]$$

Граничные условия:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(0)}(\eta), \quad \Phi_2 = \Phi_2^{(0)}(\eta, q_{10}, \lambda) \quad \text{при } f_{10} = 0$$

Функция $\Phi_1^{(0)}(\eta)$ при соответствующем выборе нормирующего множителя B удовлетворяет уравнению Блазиуса, функция $\Phi_2^{(0)}$ — уравнению

$$\frac{\partial^3 \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta^3} + \frac{q_{10}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta} \right) + \frac{F_1^{(0)}}{2B^2} \Phi_1^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi_2^{(0)}}{\partial \eta^2} +$$

$$+ \frac{\lambda}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \eta} \right) = 0$$

$$F_1^{(0)} = 2\zeta_1^{(0)} \quad (B^2 = \zeta_1^{(0)})$$

Первое из уравнений системы (3.2) полностью совпадает с уравнением для случая плоского течения [6]. Таким образом, в этой упрощенной постановке не учитывается влияние на продольное течение параметров σ , q_{01} , f_{01} . В связи с этим представляет интерес вопрос о том, как велика роль этих параметров в формировании течения в пограничном слое на вращающемся крыле. Поэтому были проинтегрированы обе системы (3.1) и (3.2).

Для интегрирования заменой

$$\omega = \partial \Phi_1 / \partial \eta, \quad \varphi = \partial \Phi_2 / \partial \eta$$

был понижен порядок уравнений систем (3.1) и (3.2); а производные по

параметру f_{10} были заменены разностными аналогами по двухточечной схеме. В результате были получены две системы нелинейных уравнений второго порядка. На каждом шаге по параметру f_{10} эти системы решались методом прогонки с итерациями. Для применения метода прогонки необходимо было ограничить промежуток интегрирования по η ($0 \leq \eta \leq \eta_\infty$). Расчеты показали, что можно принять $\eta_\infty = 6.0$, так как во всех рассмотренных случаях профили продольной и трансверсальной скоростей достаточно близко проходят к единице при $\eta < 6.0$. Шаг по переменной η (при прогонке) был равен 0.05.

Расчеты были выполнены при $f_{10} \leq 0$. Шаг по параметру f_{10} обычно принимался равным $0.5 \cdot 10^{-2}$. Но в области вблизи точек отрыва ($\zeta_1 = 0$) и в области, где функция F_1 близка к нулю, сходимость итерационного процесса ухудшалась и, в этих областях шаг по f_{10} приходилось уменьшать. Процесс итераций заканчивался после того, как максимальная разность значений искомым функций в двух последовательных приближениях становилась меньше $\varepsilon = 0.1 \cdot 10^{-3}$. Все расчеты были выполнены В. Ф. Володиной и Л. Н. Душиной на БЭСМ-2.

4. Результаты расчетов. Уравнения (3.1) и (3.2) были проинтегрированы в широком диапазоне изменения основных параметров в различной их комбинации. Параметр f_{10} изменялся в пределах от его значений в точках отрыва ($\zeta_1 = 0$) до значений в точках, где функции $F_1 = 0$. Остальные параметры изменялись в следующих пределах:

$$0 \leq q_{10} \leq 1.0, \quad -3.0 \leq \lambda \leq 0, \quad -0.5 \leq \sigma \leq 0, \quad -0.03 \leq \sigma f_{01} \leq 0, \\ 0 \leq q_{01} \leq 0.01$$

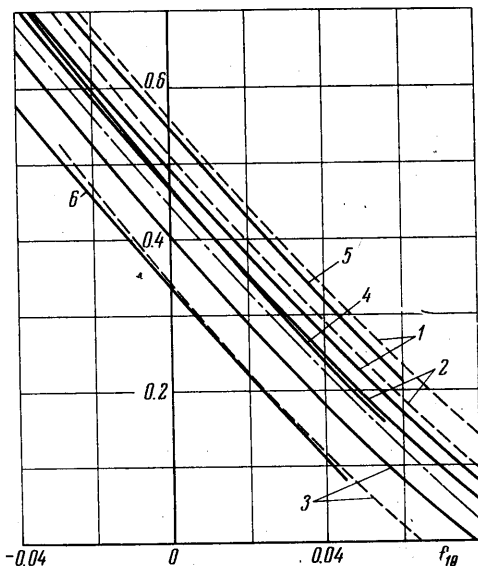
Область изменения параметров q_{10} , λ , f_{01} , σ была выбрана на основании оценки их значений для конкретных крыльев; при этом скорости внешнего потока определялись по работе [8]. Параметр q_{01} (в работе [8] трансверсальная скорость не зависит от z) принимался равным 0, 0.005, 0.010.

В результате решения уравнений (3.1) и (3.2) были получены функции $\partial F_1 / \partial \eta$ и $\partial F_2 / \partial \eta$, определяющие продольные и трансверсальные профили скоростей в пограничном слое, и основные характеристики пограничного слоя — F_1 , ζ_1 , H_1 , H_{11} , H_{12} , H_{22} , H_2 , ζ_2 , F_2 .

Наибольший интерес представляют необходимая для расчета пограничного слоя в конкретных случаях задания внешнего потока функция F_1 и безразмерные коэффициенты трения ζ_1 и ζ_2 . Кривые зависимости этих функций от параметра f_{10} для различных значений остальных параметров построены на фиг. 1—3. На этих фигурах сплошные ($\sigma f_{01} = -0.01$) и пунктирные ($\sigma f_{01} = -0.02$) линии относятся к решению системы уравнений (3.1); штрих-пунктирные кривые на фиг. 3 соответствуют решению системы уравнений (3.2), а на фиг. 1, 2 — решению двумерной задачи, которое совпадает с решением первого уравнения системы (3.2). Кривые 1, 2, 3 получены для значений $q_{01} = 0$, $\sigma = -0.1$, $\lambda = -0.5$ и $q_{10} = 0, 0.1, 0.5$ соответственно; кривые 4, 5 — для $q_{10} = 0.1$, $q_{01} = 0.01$, $\sigma f_{01} = -0.01$, $\sigma = -0.1$, $\lambda = -0.5$, -1.0 , а кривая 6 — для $q_{10} = 0.1$, $q_{01} = 0$, $\sigma f_{01} = -0.01$, $\lambda = -0.5$, $\sigma = -0.25$.

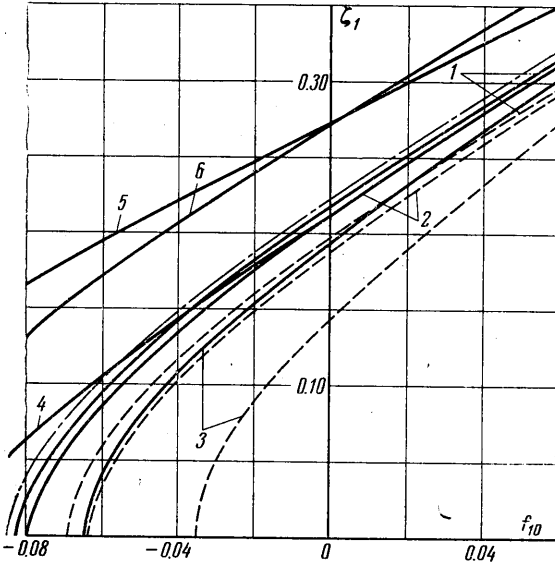
При помощи приведенных результатов расчета можно судить о влиянии параметров задачи на основные характеристики пограничного слоя.

Из фиг. 1 видно, что зависимости $F_1(f_{10})$ при всех значениях параметров остаются близкими к прямым линиям. Это свойство функции F_1 может быть использовано



Фиг. 1

при расчетах пограничного слоя в конкретных случаях. Следует отметить, что кривые $F_1(f_{10})$ отличаются от аналогичной зависимости в случае плоского течения, с которой, как говорилось раньше, совпадает решение задачи о вращающемся крыле в упрощенной постановке (уравнение (3.2)).



Фиг. 2

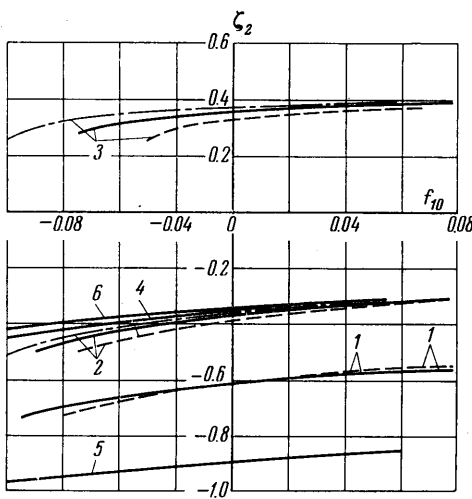
Фиг. 2 показывает, что характер зависимости $\zeta_1(f_{10})$ такой же, как и в двумерном случае. Однако и на величину коэффициента трения ζ_1 и на значение параметра f_{10} , при котором происходит отрыв (f_{10}^*), значительное влияние оказывают параметры σf_{01} , λ , q_{01} , q_{10} , σ , характеризующие вращение. Отметим, что при расчетах отрыв определялся условием $\zeta_1 = 0$. В диффузорной области для продольного потока ($f_{10} < 0$) влияние этих параметров более существенно. С увеличением параметров q_{10} и σf_{01} (по абсолютной величине) коэффициент трения ζ_1 уменьшается при всех значениях параметра f_{10} , а отрыв наступает раньше. Увеличение параметров q_{01} и $|\lambda|$, $|\sigma|$ затягивает отрыв, при этом

q_{01} оказывает заметное влияние только при приближении к отрыву.

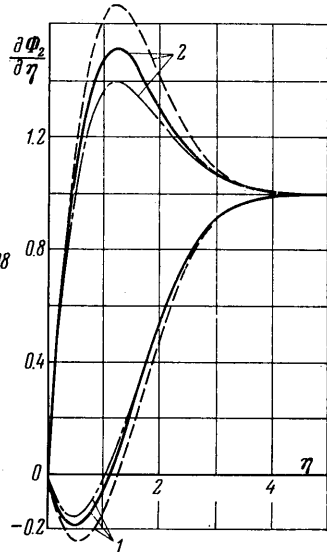
Отмеченную выше роль параметров σf_{01} , λ , σ в изменении значения f_{10}^* можно непосредственно проследить, записав уравнение (1.5) в виде

$$\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \omega^2 x^* \right) t = U(f_{10} + \sigma f_{01} - \lambda \sigma^2) \quad (4.1)$$

Из соотношения (4.1) видно, что увеличение $|\sigma f_{01}|$ уменьшает значение $|f_{10}^*|$, а увеличение $|\lambda|$ и σ увеличивает значение $|f_{10}^*|$. Соотношение (4.1) показывает также затягивающее влияние центробежной силы на отрыв.



Фиг. 3



Фиг. 4

Влияние параметров q_{10} , q_{01} на характеристики продольного течения, в том числе на отрыв, осуществляется более сложно — через характеристики трансверсального потока — и оценить его с помощью одного соотношения (4.1) невозможно.

Из фиг. 3 видно, что и коэффициент трения трансверсального потока ζ_2 зависит от всех параметров задачи. Так, заметное влияние на ζ_2 оказывают параметры σf_{01} (кривые 2, 3), σ (кривые 1, 6) и q_{01} (кривые 2, 4), которые не учитываются при решении задачи в упрощенной постановке. Следует обратить внимание на то, что ζ_2 для различных вариантов параметров может иметь разные знаки. Это тесно связано с видом профилей трансверсальной скорости. Наряду с обычными профилями с монотонным изменением скорости в пограничном слое для трансверсального потока наблюдаются профили с отрицательными безразмерными скоростями ($\partial\Phi_2/\partial\eta < 0$) внутри пограничного слоя и со скоростями, превышающими трансверсальную скорость внешнего потока ($\partial\Phi_2/\partial\eta > 1$). На фиг. 4 для примера приведены такие профили скоростей для двух вариантов:

- (1) $q_{10} = 0.1$, $\sigma f_{01} = -0.01$, $q_{01} = 0$, $\lambda = -0.5$, $\sigma = 0.1$
 (2) $q_{10} = 1.0$, $\sigma f_{01} = -0.01$, $q_{01} = 0.008$, $\lambda = -0.1$, $\sigma = -0.1$

На этой фигуре сплошные линии соответствуют $f_{10} = 0$, штриховые — $f_{10} = -0.04$, штрих-пунктирные — $f_{10} = 0.04$.

Анализ результатов расчетов показал, что профили с отрицательными безразмерными трансверсальными скоростями и, соответственно, отрицательными коэффициентами ζ_2 имеют место при достаточно больших значениях $|\lambda|$ по сравнению с q_{10} и q_{01} , а профили со скоростями, превышающими скорость внешнего потока, и $\zeta_2 > 0$ — при больших q_{10} и q_{01} . При промежуточных значениях этих параметров профили трансверсальной скорости имеют монотонный характер.

Появление отрицательных безразмерных скоростей в пограничном слое, т. е. появление в пограничном слое течения, противоположного внешнему потоку, можно объяснить наличием достаточно сильного отрицательного перепада давления вдоль размаха крыла ($\partial p/\partial z < 0$). Оценим знак перепада давления $\partial p/\partial z$. Для этого перепишем уравнение (1.6) в виде

$$\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \omega^2 z^*\right) t = W(q_{10} + q_{01} + \lambda) \quad (4.2)$$

Так как $W < 0$, q_{10} и $q_{01} > 0$, а $\lambda < 0$, из выражения (4.2) следует, что $\partial p/\partial z$ может оказаться меньше нуля только при достаточно больших $|\lambda|$. Если же $q_{01} + q_{10}$ превышает $|\lambda|$, имеет место положительный перепад давления, который усиливает течение в пограничном слое в направлении, совпадающем с направлением во внешнем потоке.

Поступило 10 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданова В. В. Осесимметричный ламинарный пограничный слой в закрученном потоке. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Техническая гидрогазодинамика, 1965, № 248.
2. Fogarty L. The laminar boundary layer on a rotating blade. J. Aeronaut. Sci., 1951, vol. 18, No. 4.
3. Tan H. S. On laminar boundary layer over a rotating blade J. Aeronaut. Sci., 1953, vol. 20, No. 11.
4. Rott N., Smith W. Some examples of laminar boundary layer flow on rotating blades. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 11.
5. McCroskey W. I., Jaggy P. F. Laminar boundary layers on helicopter rotors in forward flight. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 10. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 10).
6. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
7. Богданова В. В. Универсальные уравнения теории пространственного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
8. Sears W. R. Potential flow around a rotating cylindrical blade. J. Aeronaut. Sci., 1950, vol. 17, No. 3.