

О ПОДОБНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕРАВНОМЕРНОМ ВНЕШНЕМ ПОТОКЕ

Ю. А. ДЕМЬЯНОВ, А. Н. ПОКРОВСКИЙ, В. Н. ШМАНЕНКОВ

(Москва)

Исследуются подобные решения уравнений ламинарного несжимаемого пограничного слоя, формирующегося в завихренном внешнем потоке. Такие задачи возникают при анализе течения в пограничном слое при резком изменении граничных условий (например, при дискретном вдуве в пограничный слой), при гиперзвуковом обтекании притупленных тел и т. д. Различные подходы к их решению предлагались ранее в [1-4]. Ниже решается так называемая обратная задача теории пограничного слоя (см. [3], стр. 200), когда контур тела, который обуславливает данное течение вне пограничного слоя, заранее неизвестен и отыскивается в ходе решения задачи в связи с сопряжением продольных и поперечных скоростей.

Подробно рассмотрены случаи параболического ($u_e \sim y^2$) и линейного ($u_e = a(x) + b(x)y$) законов изменения скорости внешнего потока в поперечном направлении. Последний включает в себя исследование течения в окрестности критической точки затупленного тела с учетом завихренности потока в ударном слое.

1. Задача о ламинарном пограничном слое в неравномерном внешнем потоке может быть сведена к следующей краевой задаче (так называемая обратная задача [3, 4]):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (1.1)$$

при граничных условиях

$$\psi = \psi_w, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad y = y_w(x); \quad \psi \rightarrow \psi_e(x, y), \quad y \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Здесь $xL, yL / R^{1/2}$ — прямоугольная система координат с началом в точке образования пограничного слоя, ось x направлена вдоль линии $\psi_e = 0$, проходящей через начало координат, $UL\psi(x, y) / R^{1/2}$ — функция тока, ρ — плотность, $\rho U^2 P$ — давление, $R = UL / \nu$ — число Рейнольдса, U — характерная скорость, L — длина, ν — кинематическая вязкость, $y_w(x)$ — уравнение стенки, определяемое в ходе решения задачи; индексы: w — стенка, e — внешний поток.

Заданная величина ψ_w в общем случае может быть не равна нулю (вдув или отсос). Условие на бесконечности означает, что при достаточно большом удалении от стенки функция тока (и все ее производные $\partial^n \psi / \partial y^n$, $n = 1, 2, \dots$) отличается от соответствующих величин во внешнем течении на малую, убывающую экспоненциально величину.

Данная постановка задачи для случая, когда $u_e = a(x) + b(x)y$, эквивалентна двум приближениям по методу сращиваемых асимптотических разложений Ван-Дайка [3]. Она является весьма плодотворной при решении задач теории пограничного слоя с резким изменением граничных условий, когда приходится рассматривать «новый» пограничный слой, развивающийся в «старом» [1, 4, 8].

Следуя [4], будем искать подобные решения системы (1.1), (1.2) в виде

$$\psi(x, y) = \delta(x)f(\eta), \quad \eta = \psi_e(x, y) / \delta(x) \quad (1.3)$$

Здесь $\delta(x)$ — произвольная функция x , обращающаяся в нуль при $x = 0$. Предложенная форма координаты подобия η и безразмерной функции тока $f(\eta)$ охватывает не только все известные случаи существования подобных решений уравнений пограничного слоя в равномерном потоке, но и позволяет найти более общий класс подобных решений в неравномерном внешнем потоке.

С учетом (1.3) уравнение (1.1) принимает вид

$$f''' + \alpha_1 f'' + \alpha_2 (f' - 1) + \alpha_3 f f'' + \alpha_4 f' (f' \eta - f) + \alpha_5 (f'^2 - 1) = 0 \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3\delta(\partial^2 \psi_e / \partial y^2)}{(\partial \psi_e / \partial y)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\delta^2(\partial^3 \psi_e / \partial y^3)}{(\partial \psi_e / \partial y)^3}, \quad \alpha_3 = \frac{\delta' \delta}{(\partial \psi_e / \partial y)} \\ \alpha_4 &= \frac{-\delta' \delta^2 (\partial^2 \psi_e / \partial y^2)}{(\partial \psi_e / \partial y)^3}, \quad f' \equiv \frac{df}{d\eta}, \quad \delta' \equiv \frac{d\delta}{dx} \\ \alpha_5 &= \frac{-\delta^2 [(\partial \psi_e / \partial y) \partial^2 \psi_e / \partial x \partial y - (\partial \psi_e / \partial x) \partial^2 \psi_e / \partial y^2]}{(\partial \psi_e / \partial y)^3} \end{aligned} \quad (1.5)$$

При выводе (1.4), (1.5) предполагалось, что внешний поток описывается уравнением типа (1.1). Сюда относятся, в частности, случаи параболического и линейного законов изменения скорости внешнего потока.

Граничные условия (1.2) переписутся в виде

$$f = f_w, \quad f' = 0 \quad (\eta = \eta_w); \quad f \rightarrow \eta \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Здесь η_w — уравнение стенки в координатах подобия. Для определения η_w и трех постоянных интегрирования имеем четыре граничных условия (четвертым условием является $f' \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow \infty$).

В силу условий подобия безразмерные функции α_i ($i = 1, \dots, 5$) должны либо зависеть только от η , либо быть постоянными.

Легко видеть, что система (1.5) не является независимой и может быть сведена к следующим соотношениям:

$$\alpha_1 = -3\alpha_3' / \alpha_3, \quad \alpha_2 = 3\alpha_3'^2 / \alpha_3^2 - \alpha_3'' / \alpha_3 \quad (1.6)$$

$$\alpha_4 = \alpha_3', \quad \left(1 + \frac{\alpha_5}{\alpha_3} + \eta \frac{\alpha_3'}{\alpha_3}\right) + \frac{\delta'' \delta}{\delta'^2} = 0$$

Так как выражение в скобках является функцией только переменной η , а δ — функцией только x , то

$$1 + \frac{\alpha_5}{\alpha_3} + \eta \frac{\alpha_3'}{\alpha_3} = k, \quad \frac{\delta'' \delta}{\delta'^2} = -k$$

k — постоянная величина. Интегрируя уравнение для функции δ , получаем

$$\delta(x) = [c(k+1)x]^{1/(k+1)} \quad (1.7)$$

Пользуясь произволом выбора функции δ , полагаем $c(k+1) \equiv 1$. Из (1.6) следует, что все коэффициенты уравнения (1.4) выражаются через функцию $\alpha_3(\eta)$, вид которой определяется профилем скорости $u_e = \partial \psi_e / \partial y$ во внешнем потоке

$$\alpha_3(\eta) = \frac{x^{(1-k)/(1+k)}}{(k+1)u_e} \quad (1.8)$$

Последнее равенство можно рассматривать в качестве уравнения для определения профиля $u_e(x, y)$, при котором допускаются подобные решения. Из (1.8) следует также, что при нахождении подобных решений возможен переход от координаты η к новой переменной y/x^m , которая встречалась ранее, например при выводе уравнения Фолкнера — Скэн [7].

В качестве примера рассмотрим случай, когда профиль скорости во внешнем потоке является параболическим, т. е. $\psi_e(x, y) = c_1 y^3$, $dp/dx = 6c_1$, $c_1 > 0$ — постоянная величина.

Из (1.3), (1.7) и (1.8) имеем

$$\eta = \frac{c_1 y^3}{x^{1/(1+k)}}, \quad \alpha_3 = \frac{x^{(1-3k)/3(1+k)}}{3(k+1)c_1^{1/3}\eta^{2/3}}$$

Из условия, что α_3 является функцией только η , следует, что $k = 1/3$. Таким образом, определяется вид всех коэффициентов α_i , входящих в исходное уравнение (1.4).

Преобразование

$$z = \frac{3^{3/4}(\eta^{1/3} - \eta_w^{1/3})}{2c_1^{1/12}}, \quad F(z) = \frac{3^{3/4}f}{4c_1^{1/4}}$$

приводит указанное уравнение к универсальной форме, не зависящей от постоянной c_1 и от η_w

$$F''' + 2FF'' - 4/3(F'^2 + 1) = 0 \quad (1.9)$$

Граничные условия могут быть переписаны в виде

$$F = F_w, \quad F' = 0 \quad (z = 0) \quad (1.10)$$

$$F \rightarrow 2/9(z + z_w)^3, \quad F' \rightarrow 2/3(z + z_w)^2 \quad (z \rightarrow \infty), \quad z_w = 3^{3/4}\eta_w^{1/3}/2c_1^{1/12}$$

Здесь F_w — заданная постоянная величина. При $F_w = 0$ имеем тривиальное решение

$$F \equiv 2/9z^3, \quad z_w = 0$$

Уравнение (1.9) решалось численно на ЭВМ для случая, когда на стенке была отлична от нуля поперечная составляющая вектора скорости (отсос). При решении краевой задачи (1.9), (1.10) можно было воспользоваться методом пристрелки, задавая различные значения F_w'' при $z = 0$. Однако более эффективным при численных расчетах является метод квазилинеаризации, изложенный в работе [6]. Все представленные здесь результаты получены на основании этого метода.

Условия на бесконечности (1.10) могут быть сведены к

$$F''' \rightarrow 4/3, \quad F'' \rightarrow 4/3(z + z_w)$$

Добиваясь выполнения первого из этих условий (например, подбором F_w''), получаем в процессе численного счета величину $F''(\infty)$, т. е. значение постоянной z_w .

Особенностью данного решения является его двузначность — при заданном F_w существует два значения F_w'' (и, соответственно, два значения координаты стенки z_w), при которых удовлетворяется условие на бесконечности (см. фиг. 1). Кроме обычных профилей скорости ($F' \geq 0$ во всей области течения) уравнение (1.9) допускает также семейство профилей с возвратными токами вблизи стенки. Интересно отметить, что аналогичные два решения имеет уравнение Фолкнера — Скэн в области положительного градиента давления [5].

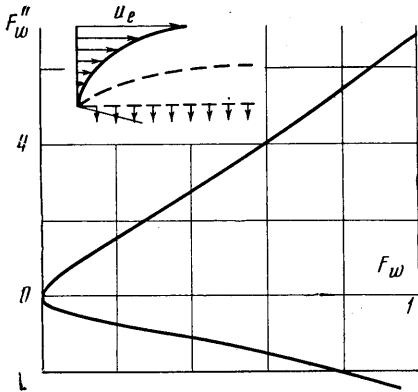
В качестве примера на фиг. 2 представлены безразмерные профили скорости в пограничном слое для первого (кривая 1) и второго (кривая 2) семейств при $F_w = 0.4$.

Рассмотренный выше пример можно обобщить на более сложный, а именно когда

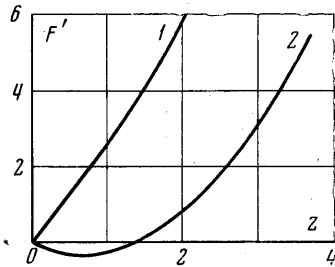
$$\psi_e = c_1 y^3 + c_2 x^{1/2} y^2 + c_3 x^{1/2} y + c_4 x^{3/4} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 = \text{const})$$

2. Рассмотрим класс подобных решений уравнений пограничного слоя, когда функция тока внешнего течения задана полиномом второй степени

$$\psi_e(x, y) = F_1(x)y + F_2(x)y^2$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Вид функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ не может быть произвольным и определяется условиями существования подобных решений. Из (1.5), (1.6) имеем

$$\alpha_1 = \frac{6\alpha_3^2 F_2}{\delta'^2 \delta}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{1}{(c_2 \eta + c_3)^{1/2}} = \frac{\delta' \delta}{F_1 + 2F_2 y}$$

Здесь c_2, c_3 — постоянные интегрирования. Так как α_1 и α_3 являются функциями только η , то

$$F_1 = \frac{c_3^{1/2} x^{(1-k)/(1+k)}}{1+k} \sim \delta \delta', \quad F_2 = \frac{c_2 x^{(1-2k)/(1+k)}}{4(k+1)^2} \sim \delta \delta'^2$$

Таким образом, в исходное уравнение (1.4) входят три константы: k, c_2 и c_3 , которые характеризуют степень завихренности внешнего потока, продольный градиент давления и т. д. Здесь возможны следующие варианты.

1. $c_2 = 0$, скорость внешнего потока не зависит от y и является степенной функцией x : $u_e = c_3^{1/2} x^{(1-k)/(1+k)} (k+1)^{-1}$.

Это классический случай точного решения уравнений Прандтля, рассмотренный в работе [7]. Действительно, заменой переменных

$$f_1(\eta_1) = f c_3^{-1/4}, \quad \eta_1 = (\eta - \eta_w) c_3^{-1/4}$$

уравнение (1.4) сводится к известному уравнению Фолкнера — Скэн (при этом граничные условия также совпадают).

2. $c_2 \neq 0$, скорость внешнего потока линейно меняется по y . Замена переменных $\zeta = (c_2 \eta + c_3)^{1/2} / c_2^{1/2}$, $\Phi(\zeta) = f / c_2^{1/2}$ приводит уравнение (1.4) и граничные условия к виду

$$\Phi''' + 2\Phi\Phi'' + 2\Phi'^2(k-1) - 4\zeta^2(2k-1) + 4\gamma = 0 \tag{2.1}$$

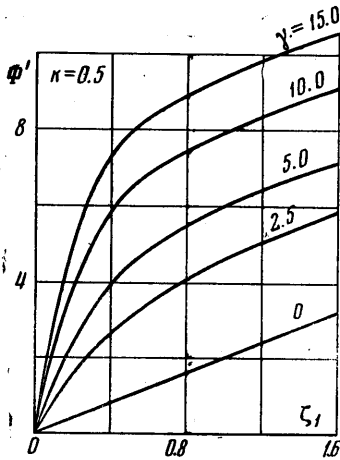
$$\Phi = \Phi_w, \quad \Phi' = \Phi_w', \quad \zeta = \zeta_w, \quad \Phi \rightarrow \zeta^2 - \gamma, \quad \zeta \rightarrow \infty$$

В отличие от уравнения Фолкнера — Скэн, в которое входит лишь один параметр β ($\beta = 1 - k$), уравнение (2.1) содержит два параметра k и $\gamma = c_3 / c_2^{1/2}$. Последний характеризует степень завихренности внешнего потока. Частные варианты уравнения (2.1) рассматривались ранее в работах [1, 8].

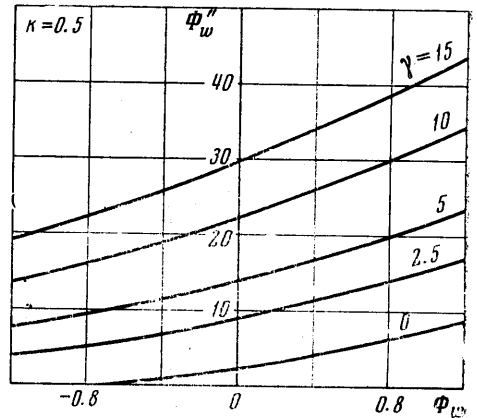
Рассмотрим некоторые новые решения системы (2.1). Заметим, что функция $\Psi_e = F_1 y + F_2 y^2$ тождественно удовлетворяет уравнениям пограничного слоя лишь при

$$F_2(x) \equiv \text{const}, \quad k = 1/2, \quad dp/dx = -F_1 F_1' \sim x^{-1/2}$$

В этом случае удобно сделать замену переменных $\zeta_1 = \zeta - \zeta_w$, а граничное условие на бесконечности свести к $\Phi'' \rightarrow 2$ при $\zeta_1 \rightarrow \infty$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Расчеты на ЭВМ были проведены при $\gamma = 0, 2.5, 5, 10$ и 15 и при различных значениях параметра вдува (или отсоса) $\Phi_w, \Phi_w' = 0$. На фиг. 3 представлены безразмерные профили продольной составляющей вектора скорости в пограничном слое для случая отсутствия вдува. Влияние вдува или отсоса на безразмерный коэффициент трения на стенке ($c_f \sqrt{R} \sim \Phi_w''$) показано на фиг. 4.

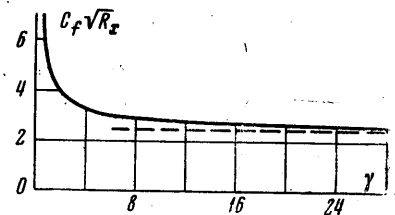
В заключение рассмотрим случай $k = 0$. Он соответствует течению в пограничном слое на затупленном теле вблизи критической точки при наличии завихренности внешнего потока (т. е. потока между телом и ударной волной в случае сверхзвукового обтекания). Действительно, при $k = 0$, имеем $u_e \sim (a_1 x + b_1 xy)$. В то же время профиль скорости в ударном слое вблизи критической точки может быть аппроксимирован зависимостью

$$u_e / v_* = ax / r + bxy / r^2$$

где a, b — постоянные величины (вообще говоря, эти коэффициенты являются функциями числа Маха набегающего потока), v_* — максимальная скорость, r — радиус тела. При этом параметр

$$\gamma = a^2 R_*^{2/3} / (2b)^{1/3}, \quad R_* = U_* r / \nu$$

т. е. при достаточно больших числах Рейнольдса он становится также большим. Строго говоря, необходимо было бы рассмотреть решение уравнения (2.1) при $\gamma \rightarrow \infty$, однако этот случай не представляет интереса, так как при $\gamma \rightarrow \infty$ уравнение (2.1) сводится к известному уравнению Фолкнера — Скэн [7]. В связи с этим уравнение (2.1) решалось при умеренных γ (0, 0.5, 1.0, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0, 5.0, 10, 15, 20, 30). Сравнение с классическим решением [7] проводилось по безразмерному комплексу $c_f \sqrt{R_x}$ (см. фиг. 5, где c_f — коэффициент трения, R_x — местное число Рейнольдса, пунктиром показано решение уравнения Фолкнера — Скэн для критической точки $c_f \sqrt{R_x} = 2.465$). Из сравнения данных следует, что при $\gamma \rightarrow \infty$ параметр $c_f \sqrt{R_x}$ асимптотически стремится к 2.465.



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldstein S. Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1930, vol. 26, pt 1.
2. Murray J. D. The boundary layer on a flat plate in a stream with uniform shear. J. Fluid. Mech., 1961, vol. 11, pt. 2.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
4. Демьянов Ю. А. Об одном способе построения решения уравнений типа Прандтля в окрестности точек нарушения аналитичности граничных условий. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 7, № 4.
5. Stewartson K. Further solutions of the Falkner — Skan equation. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1954, vol. 50, p. 3.
6. Беллман Р. Е., Калаба Р. Е. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., «Мир», 1968.
7. Falkner V. M., Skan S. W. Some approximate solutions of the boundary layer equations. Philos. Mag., 1931, vol. 12, p. 865.
8. Шманенков В. Н. К исследованию ламинарного пограничного слоя за точкой скачкообразного изменения граничных условий. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.