

О ДВИЖЕНИИ УДАРНОГО ФРОНТА, ОТРАЖЕННОГО ОТ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА

А. К. ПОЛУБОЯРИНОВ

(Ленинград)

Получено точное дифференциальное уравнение для определения величины нестационарного отхода центра симметричного скачка от сферических или цилиндрических тел. Независимой переменной введено число Маха отходящего фронта, некоторые функции от которого явно входят в уравнение.

В полученное уравнение входят также две требующие дополнительного определения величины: радиус кривизны отраженного фронта на оси симметрии и производная от скорости газа сразу за скачком. Находятся точные зависимости для определения начальных значений этих величин, а для радиуса кривизны фронта найдено также значение скорости изменения его в момент отражения.

В конце приводится достаточно простой приближенный метод определения нестационарного отхода отраженного фронта от сферы. Нестационарному отражению ударных волн от затупленных тел в последнее время уделяется в научной литературе определенное внимание. Результаты исследования формирования отшедшей волны отображены в сборнике [1]. Отражению сильных ударных волн от сферы и цилиндра посвящена работа [2], результаты численного решения задачи даны в статье [3]. В работе [4] приведен большой экспериментальный материал по отражению волн от различных затупленных тел.

1. Пусть на затупленное тело плоской или осевой симметрии падает ударный фронт с равномерным спутным потоком за ним. Считаем, что плоскость фронта перпендикулярна оси или плоскости симметрии, а для цилиндрического тела дополнительно полагаем, что фронт параллелен образующим тела. После соприкосновения фронта с телом образуется отраженный ударный фронт, отходящий от неподвижного тела.

На оси симметрии между телом и ударным фронтом уравнения движения идеального газа могут быть в безразмерных параметрах сведены к виду

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \gamma \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \gamma \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\gamma \rho \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Здесь p , ρ — давление и плотность газа, отнесенные к величине этих параметров в спутном потоке падающего фронта; v , a — скорости газа и звука, отнесенные к скорости звука в спутном потоке a_∞ ; γ — отношение теплоемкостей; $\nu = 2$ для осевой симметрии; $\nu = 1$ для плоской симметрии; θ — угол наклона скорости к оси x , совпадающей с осью симметрии и направленной против направления движения отходящего фронта.

Координаты x и y , как и все другие параметры длины, обезразмерены радиусом кривизны передней точки тела R , а безразмерное время τ связано с размерным t зависимостью

$$\tau = \frac{a_\infty}{R} t \quad (1.2)$$

Пусть ε — безразмерный отход скачка вдоль оси от тела. Тогда

$$d\varepsilon / d\tau = M - M_\infty \quad (1.3)$$

где M, M_∞ — числа ударного фронта на оси и набегающего равномерного потока.

Для газодинамических величин в точке, движущейся вдоль оси непосредственно за ударным фронтом, справедливы зависимости

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)_1 &= \frac{dv_1}{d\tau} + (M - M_\infty) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_1 &= \frac{dp_1}{d\tau} + (M - M_\infty) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1, \end{aligned}$$

где индексом 1 отмечены параметры в названной выше точке.

Сразу за фронтом на оси имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_1 = \frac{\Delta v(M)}{v_1} \frac{1}{r}$$

где r — безразмерный радиус кривизны фронта на оси, а

$$\Delta v(M) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(M - \frac{1}{M}\right) \quad (1.4)$$

Тогда система уравнений (1.1) для точки, лежащей сразу за фронтом, принимает вид

$$\begin{aligned} (M - \Delta v) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 + \gamma p_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1 &= -\gamma p_1 \Delta v \frac{1}{r} - \frac{dp_1}{d\tau} \quad (1.5) \\ \frac{1}{\gamma p_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 + (M - \Delta v) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1 &= -\frac{dv_1}{d\tau} \end{aligned}$$

Здесь

$$p_1 = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \rho_1 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} M^2\right)^{-1}, \quad v_1 = M_\infty - \Delta v$$

Производя замену

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dM}{d\varepsilon} (M - M_\infty) \frac{d}{dM}$$

нетрудно из системы (1.5) найти

$$\frac{d\varepsilon}{dM} = \varphi, \quad \varphi = V_{11} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1 - V_{10} \frac{v}{r} \right]^{-1} \quad (1.6)$$

$$V_{11} = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{(M - M_\infty)(3M^2 + 1)}{M(M^2 - 1)}, \quad V_{10} = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{P_1}{M} \quad (1.7)$$

Зависимость (1.6) представляет собой точное уравнение для определения нестационарного отхода ε в функции от текущего числа Маха M отраженного фронта на оси. Границы изменения как искомой переменной ε , так и независимой переменной M заранее известны в рассматриваемом здесь случае сверхзвукового спутного потока падающей волны. Переменная M в начальный момент равна числу Маха ударного фронта при нормальном отражении, а в конечный момент $M = M_\infty$. Функция же ε монотонно возрастает от нуля до ε_∞ , которое соответствует отходу скачка при стационарном режиме обтекания рассматриваемого тела сверхзвуковым потоком с числом Маха M_∞ .

Но непосредственное интегрирование точного уравнения нестационарного отхода (1.6) без привлечения добавочных соотношений невозможно, так как в правую часть этого уравнения входят две заранее неизвестные функции: производная от скорости сразу же скачком $(\partial v / \partial x)_1$ и радиус кривизны скачка на оси r . Начальные значения этих величин, как будет показано ниже, могут быть определены из рассмотрения процесса возникновения отраженной волны. Можно найти и конечные значения величин, если воспользоваться данными о стационарном режиме обтекания заданного тела. В промежутке между начальными и конечными значениями величин $(\partial v / \partial x)_1$ и r точные значения этих функций найти нельзя без расчета параметров во всей дозвуковой области течения за отраженным фронтом.

Между тем отыскание удовлетворительных аппроксимаций для функции $(\partial v / \partial x)_1$ и r позволяет без решения всей задачи в целом предложить простой приближенный метод определения нестационарного отхода ϵ , что будет показано в заключительной части статьи.

2. Прежде всего найдем начальное значение производной $(\partial v / \partial x)_1$. Для этого представим скорость газа на оси в любой точке между отраженным фронтом и телом через ряд Тейлора

$$v = v_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n v}{\partial x^n} \right)_1 (x - x_1)^n$$

Применяя это разложение для точки, примыкающей к телу, где $v = 0$, а $x - x_1 = \epsilon$, можно получить

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_1 = -\frac{v_1}{\epsilon} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n v}{\partial x^n} \right)_1 \epsilon^{n-1} \quad (2.1)$$

Если рассматривать соотношение (2.1) для начального момента отражения, т. е. перейти в (2.1) к пределу $\epsilon \rightarrow 0$ ($v_1 \rightarrow 0$), то раскрывая по правилу Лопиталля неопределенность в единственном остающемся члене правой части v_1 / ϵ и используя при этом зависимость (1.6), можно найти

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{1*} = \frac{v}{r_*} V_{10}(M_*) \left[1 - \frac{\gamma + 1}{2} V_{11}(M_*) \frac{M_*^2}{1 + M_*^2} \right]^{-1} \quad (2.2)$$

где нижний индекс * отмечает величины, вычисляемые в начальный момент отражения.

3. В дальнейшем потребуется использовать некоторые зависимости, имеющие место при регулярном режиме отражения ударных волн для малых углов падения. В общем случае угол отражения α' (угол между стенкой и плоскостью отраженного фронта) связан с углом падения α (углом между плоскостью падающего фронта и стенкой) соотношением [5]

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha') = \frac{(1 - b\beta^2) - \sqrt{(1 - b\beta^2)^2 - 4\beta^2(c\beta^2 - M_0^{-2})(d + e\beta^2)}}{2\beta(c\beta^2 - M_0^{-2})} \quad (3.1)$$

$$b = f(2 + f), \quad c = f \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{M_0^2} \right)$$

$$d = \frac{3\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{M_0^2}, \quad e = f \left(1 - \frac{1}{M_0^2} \right)$$

$$f = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_0^2}, \quad \beta = \operatorname{tg} \alpha \quad \left(M_0 = \frac{N_0}{a_0} \right) \quad (3.2)$$

Здесь M_0 — число Маха падающего фронта, N_0 — скорость падающего фронта, a_0 — скорость звука перед падающим фронтом.

Скорость отраженного фронта относительно тела N' связана со скоростью падающего фронта зависимостью

$$N' = N_0 \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \quad (3.3)$$

Раскладывая правую часть (3.1) в ряд относительно малой величины α и используя полученное для аналогичного процесса в (3.3), получаем с учетом лишь первых членов разложения

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha') = d(1 + g\alpha^2)\alpha, \quad N' = N_0(d - 1 + h\alpha^2) \quad (3.4)$$

$$g = b + \frac{c}{d} - \frac{d}{M_0^2}, \quad h = d \left[g - \frac{d(d-1)}{2} \right] \quad (3.5)$$

Заметим, что из второго соотношения (3.4), в частности, находится с учетом (1.3) начальное число Маха отраженного фронта на оси

$$M_* = a_0 a_\infty^{-1} (d - 1) M_0 + M_\infty \quad (3.6)$$

4. Найдем теперь начальный радиус кривизны ударного фронта, отраженного от затупленного тела плоской или осевой симметрии, а также характер изменения этого радиуса в начальный момент отхода фронта.

Принимая момент первого соприкосновения падающего фронта с телом за начало отсчета времени, рассмотрим картину отражения в два близкие к началу последовательные момента времени

$$\tau^{(1)} = \Delta\tau^{(1)}, \quad \tau^{(2)} = \Delta\tau^{(1)} + \Delta\tau^{(2)}$$

Здесь $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ — безразмерное время согласно (1.2). В момент $\tau^{(1)}$ падающий фронт касается тела в точке B (фиг. 1),

взаимодействуя со стенкой по закону регулярного отражения. Отраженный фронт для этого момента занимает положение DB , а к следующему моменту $\tau^{(2)}$ отойдет от тела в положение EF .

Для данного пункта начало координатной системы xy , связанной с телом, помещаем в центр кривизны передней части тела, а ось x совмещаем с осью симметрии. Как и ранее, считаем координаты отнесенными к радиусу кривизны передней точки тела. Используя формулы (3.4) и малость величин $\Delta\tau^{(1)}$, $\Delta\tau^{(2)}$ и α , координаты точек F и E можно представить в виде

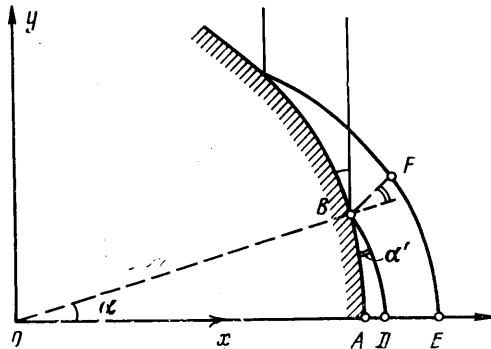
$$x_F = x_B + M_0 a_0 a_\infty^{-1} \left\{ d - 1 + \left[R - \frac{d^2(d-1)}{2} \right] \alpha^2 \right\} \Delta\tau^{(2)}$$

$$y_F = y_B + M_0 a_0 a_\infty^{-1} d(d-1) \alpha \Delta\tau^{(2)} \quad (4.1)$$

$$x_E = 1 + \Delta\epsilon, \quad y_E = 0$$

где

$$\Delta\epsilon = M_0 a_0 a_\infty^{-1} (d - 1) (\Delta\tau^{(1)} + \Delta\tau^{(2)}) \quad (4.2)$$



Фиг. 1

Если аппроксимировать участок отошедшего фронта EF окружностью с центром на оси x , то радиус аппроксимирующей окружности определяется формулой

$$r = \frac{y_F^2}{2(x_E - x_F)} + \frac{1}{2}(x_E - x_F) \quad (4.3)$$

Подставляя в (4.3) величины из (4.1) и учитывая, что

$$x_B = 1 - 1/2\alpha^2, \quad y_B = \alpha, \quad 1/2\alpha^2 = M_0 a_0 a_\infty^{-1} \Delta\tau^{(1)}$$

получаем

$$r = d^{-1}(1 + 2M_0 a_0 a_\infty^{-1} g \Delta\tau^{(2)}) + 1/2 M d a_0 a_\infty^{-1} \Delta\tau^{(1)} \quad (4.4)$$

Как простое следствие из (4.4) находится начальный радиус кривизны отраженного фронта r_* . При $\Delta\tau^{(1)} \rightarrow 0$ и $\Delta\tau^{(2)} \rightarrow 0$ с учетом (3.2) имеем

$$r_* = \left(\frac{3\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{M_0^2} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

Из этой формулы видно, что начальный радиус кривизны отраженного от затупленного тела фронта по отношению к радиусу кривизны тела монотонно меняется от 0.5 до $(\gamma + 1) / (3\gamma - 1)$ при изменении чисел Маха падающего фронта от 1 до ∞ . Причем начальный радиус кривизны одинаков для тел осевой и плоской симметрии. В выводах даны некоторые значения начального радиуса в зависимости от значений чисел Маха спутного потока падающего фронта M_∞ для $\gamma = 1.4$.

$M_\infty =$	1.1	1.2	1.3	1.4
$M_* =$	1.858	1.952	2.048	2.146
$r_* =$	0.6836	0.6948	0.7050	0.7144
$-\eta_* =$	1.0223	0.9423	0.8727	0.8116
$\zeta_* =$	-2.055	-2.238	-2.421	-2.604
$M_\infty =$	1.5	1.6	1.7	1.8
$M_* =$	2.245	2.346	2.448	2.552
$r_* =$	0.7230	0.7308	0.7380	0.7446
$-\eta_* =$	0.7573	0.7089	0.6654	0.6263
$\zeta_* =$	-2.787	-2.971	-3.155	-3.340

Формулой (4.4) можно пользоваться также при оценке изменения радиуса кривизны отраженного фронта на оси симметрии в начальной фазе отхода фронта от тела. Но корректность такой оценки будет прежде всего зависеть от необходимой близости к оси симметрии точки F , через которую проводится аппроксимирующая окружность. Будем требовать, чтобы угол между осью симметрии и направлением луча, проведенного из передней точки тела A в точку F (фиг. 1), был небольшим. А это приводит к требованию

$$\frac{y_F}{x_F - 1} < \xi < 1 \quad (4.6)$$

Подставляя в неравенство (4.6) значения координат x_F и y_F из (4.1) и производя в нем некоторые упрощения и замены, можно прийти к следующему соотношению:

$$\frac{\Delta\tau^{(2)}}{\Delta\tau^{(1)}} > \frac{2}{d-1} \frac{a_0}{a_\infty} \frac{1}{\xi\alpha}$$

Из неравенства следует, что малая величина $\Delta\tau^{(2)}$ превышает другую малую величину $\Delta\tau^{(1)}$ по крайней мере на порядок $1/\alpha$.

Поэтому в формуле (4.4) следует пренебрегать последним слагаемым правой части. Тогда из (4.4) следует, что для начального момента скорость изменения радиуса кривизны отраженного фронта определяется формулой

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_* = 2M_0 \frac{a_0}{a_\infty} \frac{g}{d} \quad (4.7)$$

В данной работе потребуется начальное значение производной dr/dM . Из (4.7) с учетом (1.6) и предельного выражения в (4.2) можно найти

$$\left(\frac{dr}{dM}\right)_* = \frac{V_{11}(M_*)}{(\partial v/\partial x)_{1*} - (v/r_*)V_{10}(M_*)} \frac{2g}{d(d-1)} \quad (4.8)$$

Начальное значение производной $(\partial v/\partial x)_{1*}$ вычисляется по формуле (2.2). В выводах приведены значения производных $\zeta_* = (\partial v/\partial x)_{1*}$ и $-\eta_* = (dr/dM)_*$ для сверхзвукового диапазона скоростей спутного потока падающего фронта. Причем даны значения этих производных для тел осевой симметрии ($v = 2$). Для тел с цилиндрической передней частью ($v = 1$) при прочих равных условиях значение производной $\zeta_* = (\partial v/\partial x)_{1*}$ будет в два раза меньше, а значение $-\eta_* = (dr/dM)_*$ в два раза больше.

5. Используя полученные соотношения, можно, в частности, построить простой приближенный метод нахождения нестационарного отхода отраженной волны от сферы. При аппроксимации радиуса кривизны скачка r выбор был остановлен на зависимости

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_*} - \frac{1}{r_*^2} \left(\frac{dr}{dM}\right)_* (M - M_*) + \sigma(M - M_*)^2 \quad (5.1)$$

Здесь коэффициент σ определен из условия, что при $M = M_\infty$ формула (5.1) дает действительный радиус центра скачка при стационарном обтекании, который можно найти по работам [6, 7].

Как известно, при сверхзвуковом стационарном обтекании сферических тел распределение скорости вдоль осевой линии между скачком и телом часто близко к линейному (за исключением малых чисел Маха набегающего потока). Это обстоятельство вызвало попытку использовать гипотезу линейного распределения скорости газа вдоль оси при определении нестационарного отхода скачка, т. е. функция $(\partial v/\partial x)_1$ аппроксимировалась зависимостью

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1 = -\frac{v_1}{\varepsilon}$$

При интегрировании уравнения (1.6) оказалось, что во всех испытанных случаях само значение производной $(\partial v/\partial x)_1$ следует практически линейной зависимости от переменной M . Поэтому была предложена окончательно следующая аппроксимация производной $(\partial v/\partial x)_1$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{1*} + \omega(M - M_*) \quad (5.2)$$

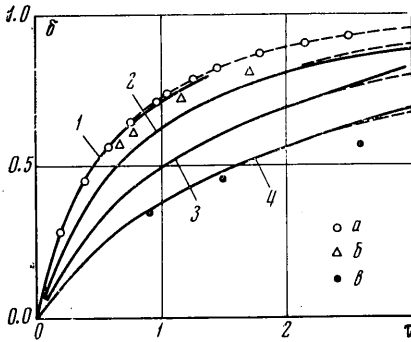
где ω выбирается из условия, чтобы при $M = M_\infty$ величина $(\partial v/\partial x)_1$ принимала действительное значение при стационарном обтекании (это значение должно обращать квадратную скобку функции ϕ , заданной соотношением (1.6), в нуль).

Так как величины r и $(\partial v/\partial x)_1$ теперь определены функциями (5.1) и (5.2), то правая часть уравнения (1.6) становится известной функцией переменной M . С учетом (1.3) можно следующим интегрированием нахо-

доть функции $\varepsilon = \varepsilon(M)$ и $\tau = \tau(M)$:

$$\varepsilon = \int_{M_*}^M \varphi dM, \quad \tau = \int_{M_*}^M \frac{\varphi}{M - M_*} dM \quad (5.3)$$

Некоторые результаты расчетов по этому методу при отражении волны от сферы для $\gamma = 1.4$ даны в виде зависимости $\delta = \varepsilon / \varepsilon_\infty$ от τ на фиг. 2, где сплошные кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $M_\infty = 1.7, 1.5, 1.3, 1.2$, отход скачка при стационарном обтекании ε_∞ брался из работы [6]. На фиг. 2 нанесены экспериментальные данные по нестационарному отходу скачка: точки *a* для $M_\infty = 1.7$ из работы [3], точки *b* и *c* для $M_\infty = 1.6$ и 1.2 из работы [4]. Как видно, начальная фаза отражения хорошо описывается предлагаемым методом. Расхождение с требуемым наблюдается лишь во второй фазе отхода скачка, когда последний приближается к своему стационарному положению. Наибольшая ошибка в конечном результате для величины δ отмечена для случая $M_\infty = 1.2$ (она достигала 20%). Во всех других случаях погрешности были меньше, а для $M_\infty = 1.4$ практически отсутствовали.



Фиг. 2

Источником появления ошибки в данном интегральном методе на заключительном этапе отхода скачка может быть лишь неточность задания значений функции φ . Метод улучшения результатов, необходимый только для конечной фазы отхода, может заключаться в введении для функции φ поправочного множителя $\lambda = \lambda(\Delta M)$, где $\Delta M = M - M_*$.

Так как для начальной фазы, где ΔM мало, должно быть $\lambda \approx 1$, то наиболее простой формой задания λ будет

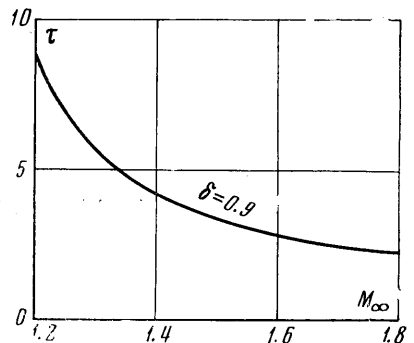
$$\lambda = 1 + \mu \Delta M^n$$

Значение μ выбиралось для каждого случая из условия, чтобы при $M = M_\infty$ выполнялось равенство $\lambda = 1$. Было принято $n = 5$, что обеспечивало близость λ к 1 на том начальном диапазоне значений ΔM , где основной интегральный метод дает хорошие результаты.

Результаты расчетов по методу с поправочным множителем приведены на фиг. 2 в виде пунктирных линий.

На основе расчетных данных для различных чисел Маха M_∞ были определены значения времени τ , при которых отраженный фронт отходит от тела на $\delta = 0.9$. На фиг. 3 приведены эти данные.

В заключение отметим, что, имея необходимые данные об обтекании цилиндра стационарным сверхзвуковым потоком, можно построить подобный метод для расчета нестационарного отхода отраженного скачка и от цилиндра.



Фиг. 3

Автор благодарит М. П. Сыщикову за внимание к работе и помощь.

Поступило 14 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыщикова М. П., Березина М. К., Семенов А. Н. Формирование течения около модели в ударной трубе. Отход головной ударной волны от сферы в аргоне и азоте при малых сверхзвуковых числах Маха. Сб. «Аэрофизические исследования сверхзвуковых течений», М.—Л., «Наука», 1967.
2. Киреев В. Т. Об отражении сильной ударной волны от сферы и цилиндра. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
3. Morgan J. P., Van Moorghem W. K. Diffraction of a plane shock by an analitic blunt body. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 1, pp. 127—136.
4. Богословский К. Е. Исследование нестационарного обтекания тел потоком, движущимся за ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
5. Рахматулин Х. А., Сагомоян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н. Газовая динамика, М., «Высшая школа», 1965.
6. Белоцерковский О. М., Булекбаев А., Голомазов М. М., Грудницкий В. Г., Душин В. К., Иванов В. Ф., Лунькин Ю. П., Попов Ф. Д., Рябников Г. М., Тимофеева Т. Я., Толстых А. И., Фомин В. Н., Шугаев Ф. В. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1967.
7. Гилинский С. М., Лебедев М. Г. Исследование обтекания плоских и осесимметричных тел с отошедшей ударной волной потоком с малой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.