

К ЗАДАЧЕ О ТРАНСЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ВЫПУКЛОГО УГЛА

Ю. Б. ЛИФШИЦ, Э. Г. ШИФРИН

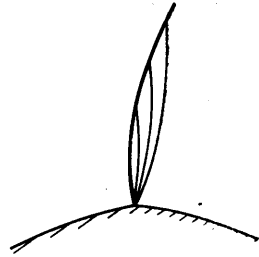
(Москва)

Рассматривается единственность асимптотического типа течения в окрестности угловой точки при трансзвуковом обтекании выпуклого угла.

Плоское потенциальное течение в окрестности угловой точки профиля (фиг. 1) исследовалось в работе [1]. Главный член асимптотического разложения отыскивался в классе автомодельных решений уравнений трансзвукового потока

$$\begin{aligned} u &= \lambda - 1 + \dots = \psi^{2(n-1)} f(\varphi / \psi^n), \\ v &= \beta - \beta_0 + \dots = \psi^{3(n-1)} g(\varphi / \psi^n). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ψ , φ — семейства линий тока и их ортогональных траекторий, λ — коэффициент скорости, β — угол наклона вектора скорости. Величина показателя автомодельности n и само решение определялись численным методом (было получено $n = 5/4$); впоследствии было найдено точное решение [2]. Построенное решение пригодно и для описания главного члена в осесимметричном и вихревом потоке, если в окрестности тела вихрь является величиной $o(\psi^{-1/2})$.



Фиг. 1

Для главного члена были поставлены следующие граничные условия:

1) при приближении к угловой точке из области сверхзвуковых скоростей решение стремится к течению Прандтля — Майера;

2) на контуре тела в дозвуковой области $v = 0$. Если контур тела — аналитическая кривая (в частности, если кривизна не равна нулю), то это может быть учтено последующими членами асимптотического разложения [3, 4].¹

Покажем, что существует другое автомодельное решение, удовлетворяющее условию (1) и имеющее конечную кривизну линии тока в дозвуковой области. Это решение описывает также главный член в осесимметричном и в вихревом потоке, если вихрь на поверхности тела ограничен.

Уравнения плоских ($N = 0$) и осесимметричных ($N = 1$) вихревых течений могут быть представлены в окрестности звуковой точки O в виде

$$uu_\varphi = v_\psi + \frac{\sin \beta_0}{n} N, \quad v_\varphi = u_\psi + W_0 \psi^m \quad (2)$$

¹ Нетрудно установить, что в плоскости годографа, конечность кривизны учитывается прибавлением к антисимметричному (по v) решению (3), взятому при $j = 2/3$, решения (3) при $j = 1$; симметричная его часть (преобладающая вблизи отрицательной оси u) имеет вид: $\psi^{(s)} = 3v^2 + u^3$. Образ дозвукового отрезка контура тела в окрестности точки O при этом задается уравнением $v = O(K|u|^{3/2})$, где K — кривизна тела в точке O .

Здесь член $W_0\psi^m$ характеризует завихренность; семейства ψ и φ выбраны так, что

$$(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)_0 = 1, \quad (x_\psi^2 + y_\psi^2)_0 = 1$$

Рассмотрим сначала случай плоского потенциального течения.

Качественное исследование решений класса (1) целесообразно проводить в плоскости $F\Psi$, где

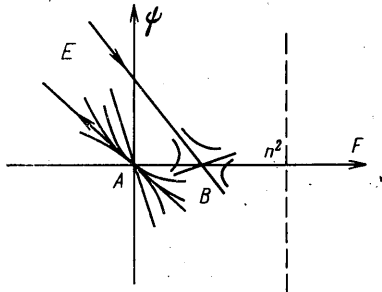
$$F(\eta) = \zeta^{-2}f(\zeta), \quad dF/d\eta = \Psi, \quad \eta = \ln|\zeta|, \quad \zeta = \varphi/\psi^n.$$

Система (2) при этом преобразуется к виду [3]

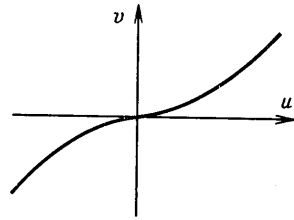
$$\frac{d\Psi}{dF} = \frac{-6F - 5n\Psi + 6F^2 + 7F\Psi + \Psi^2}{(n^2 - F)\Psi}$$

Интегральная кривая, соответствующая решению, должна выходить из критического узла A ($F=0, \Psi=0$), изображающего линию тока, и входить в седло B ($F=1, \Psi=0$), изображающее центрированную простую волну, проходя через точку E ($\Psi = -2F, F \rightarrow -\infty$), изображающую ось φ , только один раз.

Кривизна линии тока, вычисляемая на интегральных кривых в окрестности узла A , пропорциональна $\varphi^{(2n-3)/n}$ для всех интегральных кривых, кроме одной, соответствующей главному направлению узла, на которой она равна нулю. Эта интегральная кривая [1] попадает в седло при $n = 5/4$.



Фиг. 2



Фиг. 3

При $n = 3/2$ кривизна линии тока, вычисляемая вдоль любой интегральной кривой узла, конечна. Поэтому искомое решение будет изображать интегральную кривую, проведенную указанным образом из узла A в седло B , если она существует и не касается в точке A исключительного направления узла.

Это решение существует. Действительно, соответствующее решение в плоскости годографа $\psi(u, v)$ принадлежит классу решений уравнения Трикоми

$$\psi_j = v^{2j} z^{2j+1/6} F(j + 1/6, j + 2/3, 2j + 7/6, z), \quad z = 1 - 4u^3/9v^2 \quad (3)$$

обращающихся в нуль на характеристике первого семейства $v = 2/3 u^{3/2}$ (фиг. 3). Здесь $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция. Для параметра j согласно [3] имеем $j^{-1} = 6(n-1)$, поэтому в окрестности характеристики $v = 2/3 u^{3/2}$

$$\psi = v^{2/3} \left(1 - \frac{4u^3}{9v^2}\right)^{5/6} F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{11}{6}, 1 - \frac{4u^3}{9v^2}\right)$$

При помощи аналитического продолжения получим в окрестности отрицательной оси u

$$\psi = \frac{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \left\{ \frac{3}{2} v \left(\frac{9}{4} v^2 - u^3\right)^{-1/6} \times \right. \\ \left. \times F\left(\frac{1}{6}, 1, \frac{3}{2} \frac{9v^2}{9v^2 - 4u^3}\right) + \frac{\sqrt{3\pi}}{2} |u| \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \right\} \quad (4)$$

Из этих формул видно, что уравнение $\psi = 0$ не имеет решений в первом квадранте плоскости u, v сверху от характеристики $v = {}^{2/3}u^{3/2}$, а также во втором квадранте. В третьем квадранте имеется решение $C = |u|^3/v^2$; C не зависит от кривизны линии тока. Следовательно, профиль в дозвуковой области должен быть выпуклым.

Построенное решение однолистно в плоскости годографа. В связи с тем что характеристики второго семейства, выпущенные из характеристики OO' , которая изображает угловую точку, попадают при этом на линию $u = 0$, получим, что звуковая линия в точке физической плоскости обращена выпуклостью в сторону области дозвуковых скоростей (так же, как и в случае $n = 5/4$).

Расчет соответствующей интегральной кривой в фазовой плоскости $F\psi$ показал, что она не доходит до линии $F = n^2$. Следовательно, в решении отсутствуют предельные линии и оно является однолистным в физической плоскости.

Обозначим кривизну контура тела в точке O через K (при подходе из области дозвуковых скоростей). Тогда получим, что на теле

$$u = (K^2 C)^{1/3} \varphi^{2/3}$$

В случае осесимметричного и вихревого течения (когда вихрь конечен) u и v выражаются в виде

$$u = \psi f(\xi), \quad v = W_0 \varphi - y_0^{-1} \sin \beta_0 \psi N + \psi^{3/2} g(\xi), \quad \xi = \varphi / \psi^{3/2} \quad (5)$$

Заметим, что решение (1) с $n = 3/2$ не принималось во внимание в [1] из-за того, что вихревой и осесимметричный члены в уравнениях движения оставались некомпенсированными. В решении (5) эти члены компенсируются добавками $W_0 \varphi$ и $\psi y_0^{-1} \sin \beta_0$.

Поступило 24 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Vaglio-Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 1.
2. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тел вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. Белоцерковский О. М., Седова Е. С., Шугаев Ф. В. Сверхзвуковое обтекание затупленных тел вращения с изломом образующей. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 5.
4. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1967.
5. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности центра сопла Лавала. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.