

## О ГИДРОДИНАМИКЕ КОНВЕКТИВНЫХ ОБОЛОЧЕК ЗВЕЗД

Н. С. МЕЛЬНИКОВА, И. М. ЯВОРСКАЯ

(Москва)

Методами гидродинамики с учетом сжимаемости газа, вращения, гравитации и неізотропной турбулентной вязкости проводится изучение крупномасштабных движений в конвективных оболочках звезд. Анализ размерности с учетом имеющихся наблюдательных данных дает возможность оценить порядок безразмерных параметров, управляющих движением газовых масс в конвективной зоне. Оценки безразмерных параметров используются для упрощения уравнений движения и развития приближенного метода решения. Предполагается, что движение газа в конвективной оболочке имеет характер развитой неізотропной турбулентности, что зависимость тензора напряжений Рейнольдса от скоростей деформаций линейна и коэффициенты пропорциональности в сферической системе координат образуют диагональный тензор. Границы конвективной зоны считаются свободными от турбулентных напряжений.

Найдены три приближения для функций тока меридиональных движений и угловой скорости дифференциального вращения для случая, когда силы турбулентной вязкости весьма существенны.

Компоненты тензора турбулентной вязкости предполагаются известными функциями от глубины конвективной зоны.

Строение конвективных оболочек звезд нижней части главной последовательности, и в частности Солнца, является предметом исследования многочисленных теоретических работ. Однако большинство из них (см., например, библиографию к [1]) было посвящено изучению гидростатических моделей, в которых вращением, движениями среды и переносом тепла в оболочках пренебрегалось. Гидростатические модели с хорошей степенью точности позволили определить в оболочках распределения температуры, плотности и давления, но не могли дать объяснения многим наблюдаемым явлениям, таким как, например, дифференциальное вращение поверхности звезд, поведение магнитных полей, грануляция на Солнце и т. д.

Для этого надо было изучать более тонкие модели, в которых учет тех или иных физических факторов давал бы возможность описывать наблюдаемые факты. И в первую очередь надо было заменить гидростатические модели гидродинамическими, ибо наличие вращения у звезд, перенос энергии конвекцией от ядра к фотосфере, электромагнитные силы нарушают гидростатическое равновесие и приводят к возникновению меридиональных течений в конвективных оболочках. Для звезд нижней части главной последовательности характерно сравнительно медленное вращение, сравнительно небольшие потоки тепла, а также Лоренцовы силы, действующие в конвективных оболочках; поэтому эти факторы можно рассматривать как малые возмущения, налагаемые на начальное состояние гидростатического равновесия и вызывающие движение среды в оболочках.

Среда в конвективной оболочке звезд характеризуется наличием неустойчивой температурной стратификации, т. е.  $\nabla T$  — действительный температурный градиент превышает адиабатический  $\nabla T_{\text{а}}$ . Как известно, до настоящего времени не существует способа для точного описания процессов в термически неустойчивой среде. Существующие надежные приближенные методы относятся, во-первых, к так называемой аппроксимации Буссинеска, которая для сжимаемого газа выполняется, когда толщина конвективного слоя газа  $d$  достаточно мала (много меньше шкалы

высот плотности) [2], и, во-вторых, когда конвекция ламинарна и число Рэлея близко к критическому. Оба эти условия даже приближенно не выполняются в конвективных оболочках звезд, так как в них плотность меняется примерно на 5—6 порядков, а числа Рэлея по грубым оценкам достигают в наиболее неустойчивых областях Солнца величин порядка  $10^{12}$ — $10^{13}$ , т. е. конвекция в зоне является турбулентной.

Для описания гидродинамических течений в таких зонах Васютинским [4] было предложено обобщение теории анизотропной турбулентной вязкости Прандтля на трехмерный случай. Согласно этой теории для вычисления компонент тензора турбулентных напряжений необходимо знать из эксперимента или каких-либо дополнительных соображений физического характера две скалярные величины: коэффициент турбулентной вязкости  $\eta$  для радиального направления и коэффициент анизотропии  $S$ . По-видимому, Бирман первый указал [5], что анизотропная турбулентная вязкость может явиться тем механизмом, который приведет к такому перераспределению углового момента вращения в звезде, что звезда будет вращаться не как твердое тело, а дифференциально, т. е.  $\omega = \omega(r, \vartheta)$ .

В работах, которые были посвящены изучению гидродинамических течений в конвективных оболочках звезд, обычно плотность среды  $\rho$  и коэффициент турбулентной вязкости  $\eta$  принимались постоянными. Как показывают весьма грубые расчеты параметров конвективной зоны, основанные на «теории пути перемешивания», обе эти величины меняются весьма значительно [6]. Действительно, на протяжении конвективной зоны Солнца плотность меняется на шесть порядков, а коэффициент турбулентной вязкости — примерно на семь. С другой стороны, кинематический коэффициент  $\eta/\rho$  на большей части зоны остается примерно постоянным. Поэтому в дальнейшем при построении модели конвективной зоны воспользуемся гипотезой  $\eta/\rho = \text{const}$ .

1. Рассмотрим модель конвективной зоны, состоящую из сферического слоя, в котором среда имеет уравнение состояния

$$P = \frac{k\rho T}{\mu m_H} \quad (1.1)$$

где  $P$ ,  $\rho$  и  $T$  — давление, плотность, температура среды;  $m_H$  — масса протона;  $\mu$  — средний молекулярный вес, выраженный в единицах массы протона. Движение среды в оболочке будем предполагать осесимметричным, тогда уравнение движения в векторной форме и уравнение неразрывности имеют вид

$$\frac{dU}{dt} = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla P + R, \quad (1.2)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} U = 0 \quad (1.3)$$

где  $\Phi$  — гравитационный потенциал,  $U$  — скорость газа в оболочке,  $R$  — сила турбулентного трения, ковариантные компоненты которой выражаются через тензор напряжений Рейнольдса  $\tau_{ij}$  [4] следующим образом:

$$R_\alpha = \nabla^* \tau_{\alpha\alpha} \quad (1.4)$$

а сам тензор турбулентных напряжений линейным образом зависит от скоростей деформаций. Эта зависимость в ортогональной сферической системе координат  $(r, \vartheta, \varphi)$  имеет вид

$$\tau_{ik} = -\eta^i (\nabla_i U_k + g_{kk} \Gamma_{i\alpha}^k U^\alpha) - \eta_k^k \left( \nabla_k U_i + g_{ii} \Gamma_{k\alpha}^i U^\alpha + g_{kk} g_{ii} \frac{\partial g^{kk}}{\partial x^\alpha} U^\alpha \right) \quad (1.5)$$

(суммирование только по  $\alpha$ ), где  $i, k, \alpha$  принимают значения  $r, \vartheta, \varphi$ ;  $\Gamma_{i\alpha}^{\lambda}$  — символы Кронекера,  $\nabla_i$  — ковариантная производная,  $g_{ii}$  — фундаментальный метрический тензор. Коэффициенты линейной зависимости  $\eta_i^{\lambda}$  в сферической системе координат составляют диагональный тензор и играют роль коэффициентов турбулентного трения.

Так как турбулентные движения в конвективных оболочках звезд анизотропны и предпочтительным является радиальное направление (вернее направление эффективного ускорения, которое, например, для Солнца с точностью до  $10^{-5}_{\text{rad}}$  совпадает с радиальным), то  $\eta_{\circ}^{\circ} = \eta_{\circ}^{\circ} \neq \eta_{r^{\circ}}$ . По аналогии с кинетической теорией газов коэффициенты турбулентной вязкости определяются следующим образом:

$$\eta_{r^{\circ}} = \eta = 1/3\rho \langle u_r'^2 \Theta \rangle$$

где  $u_i'$  — скорость турбулентных пульсаций в  $i$ -направлении,  $\Theta$  — время, за которое турбулентный элемент проходит путь перемешивания. Две другие компоненты тензора равны между собой

$$\eta_{\circ}^{\circ} = \eta_{\circ}^{\circ} = S\eta$$

Параметр  $S$  измеряет степень анизотропии турбулентных пульсаций. Скалярная часть турбулентной вязкости  $\eta$  является в общем случае функцией  $r$  и  $\vartheta$ . Коэффициент анизотропии  $S$  обычно принимается постоянным, хотя, учитывая действие вращения на турбулентность и уменьшение эффективности конвекции с увеличением  $\vartheta$ , его следует в общем случае считать функцией  $\vartheta$ . Теория пути перемешивания, во много упрощая рассмотрение турбулентных движений в конвективной зоне, имеет свои ограничения и трудности. Одна из них — в определении пути перемешивания  $l$  [7], что приводит к некоторой неопределенности в определении значений коэффициентов турбулентного трения. В дальнейшем будем основываться на расчетах параметров конвективной зоны, данных в [8], где  $l$  принято равным  $1.5 \times$  шкалу высот давлений.

К системе уравнений (1.1) — (1.5) необходимо добавить уравнение энергии или уравнение притока тепла.

Обычно при изучении конвективных оболочек [8–10] эти уравнения заменяются условием баротропности  $P = P(\rho)$  или условием конвективного равновесия Шварцшильда, которое может быть записано в виде

$$\frac{\Delta \nabla T}{T} = -\frac{\nabla T}{T} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\nabla P}{P} = 0 \quad (1.6)$$

Необходимость и возможность замены условия баротропности уравнением притока тепла в конвективной оболочке обсуждается в работе [11], однако в данной статье будем следовать методу, предложенному в [8], и для упрощения использовать в дальнейшем условие баротропии.

В проекции на оси сферической системы координат  $r, \vartheta, \varphi$  для осесимметричных установившихся движений уравнение (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned} U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_{\circ}}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \vartheta} - \frac{U_{\circ}^2}{r} - \frac{U_{\circ}^2}{r} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{R_r}{\rho} \\ U_r \frac{\partial U_{\circ}}{\partial r} + \frac{U_{\circ}}{r} \frac{\partial U_{\circ}}{\partial \vartheta} + \frac{U_r U_{\circ}}{r} - \text{ctg } \vartheta \frac{U_{\circ}^2}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \rho} \frac{\partial P}{\partial \vartheta} + \frac{R_{\circ}}{r \rho} \\ U_r \frac{\partial U_{\circ}}{\partial r} + \frac{U_{\circ}}{r} \frac{\partial U_{\circ}}{\partial \vartheta} + \frac{U_r U_{\circ}}{r} + \text{ctg } \vartheta \frac{U_{\circ} U_{\circ}}{r} &= \frac{R_{\circ}}{r \rho \sin \vartheta} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$R_r = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau_r^r)}{\partial r} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta \tau_r^\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} (\tau_\varphi^\varphi + \tau_\vartheta^\vartheta)$$

$$R_\vartheta = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau_\vartheta^r)}{\partial r} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta \tau_\vartheta^\vartheta)}{\partial \vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \tau_\varphi^\varphi$$

$$R_\varphi = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau_\varphi^r)}{\partial r} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta \tau_\varphi^\vartheta)}{\partial \vartheta}$$

Смешанные компоненты тензора напряжений Рейнольдса в сферической системе координат определяются следующим образом [4]:

$$\tau_r^r = -2\eta \frac{\partial U_r}{\partial r} \quad \tau_\varphi^\varphi = -\frac{2S\eta}{r \sin \vartheta} (U_r \sin \vartheta + U_\vartheta \cos \vartheta)$$

$$\tau_r^\vartheta = \frac{\tau_\vartheta^r}{r^2} = -\frac{\eta}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r U_\vartheta) + S \frac{\partial U_r}{\partial \vartheta} - 2S U_\vartheta \right\}$$

$$\tau_r^\varphi = \frac{\tau_\varphi^r}{r^2 \sin^2 \vartheta} = -\frac{\eta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta U_\varphi) - 2S \sin \vartheta U_\varphi \right\}$$

$$\tau_\vartheta^\varphi = -\frac{2S\eta}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r U_\varphi) - r U_r \right\}$$

$$\tau_\varphi^\vartheta = \frac{\tau_\vartheta^\varphi}{\sin^2 \vartheta} = -\frac{S\eta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta U_\varphi) - 2r \cos \vartheta U_\varphi \right\}$$

Система уравнений (1.1), (1.3), (1.6), (1.7) с использованием (1.4) и (1.5) описывает движение газа в конвективных оболочках звезд. Для получения граничных условий предположим, что конвективная оболочка заключена между сферами радиусов  $r_0$  и  $a$ . Сфера  $r_0$  является границей раздела между конвективной оболочкой и ядром Солнца, где происходят ядерные реакции, и перенос выделенной энергии осуществляется излучением. Материя в ядре предполагается находящейся в состоянии гидростатического равновесия, т. е. нет обмена материей между ядром и оболочкой и  $U_r = 0$  при  $r = r_0$ . Термодинамические функции, гравитационный потенциал и его нормальная производная непрерывны при  $r = r_0$ . На внешней границе  $r = a$  также принимается условие  $U_r = 0$ . Угловой момент оболочки

$$J = 2\pi \int_{r_0}^a \int_0^\pi \rho \Omega r^4 \sin^3 \vartheta d\vartheta dr$$

считается заданным, а внутренняя и внешняя границы — свободными от турбулентных напряжений

$$\tau_r^\vartheta = \tau_\vartheta^r = 0 \quad \text{при } r = r_0 \text{ и } r = a$$

Очевидно, что вместо задания углового момента  $J$  можно задать значение  $\Omega$  в какой-либо точке поверхности звезды.

2. Введем теперь безразмерные переменные по формулам

$$x = \frac{r}{a}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad \xi = \frac{\eta}{\eta_0}, \quad \varphi = \frac{a\Phi}{GM}, \quad R = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2.1)$$

$$p = \frac{aP}{GM\rho_0}, \quad t = \frac{k}{\mu m_{\text{H}}} \frac{a}{GM} T, \quad v_\vartheta = \frac{U_\vartheta}{a^2 \Omega_0}, \quad v_x = \frac{U_r}{a^2 \Omega_0}$$

Здесь  $a$  и  $M$  — радиус и масса звезды,  $\Omega_0$  — угловая скорость вращения экватора,  $\rho_0$  и  $\eta_0$  — характерные значения плотности и коэффициента вязкости в конвективной зоне. Теперь с помощью (2.1) запишем уравнения движения в безразмерном виде и, используя наблюдательные данные и имеющиеся расчеты параметров конвективной зоны [6], оценим безразмерные параметры, определяющие движение. Уравнения (1.7) принимают вид

$$\begin{aligned} qI_x - q\omega^2 x \sin^2 \vartheta &= -\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta q \frac{Q_x}{R} \\ qI_\vartheta - q\omega^2 x \sin \vartheta \cos \vartheta &= -\frac{1}{xR} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} - \frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \beta q \frac{Q_\vartheta}{xR} \\ I_\varphi &= \beta \frac{Q_\varphi}{Rx \sin \vartheta} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $I_i$  — инерционные члены, связанные с меридиональной циркуляцией, и  $Q_i$  — компоненты силы турбулентного трения в безразмерном виде,  $\psi$  — безразмерная функция тока меридиональных движений — удовлетворяет уравнению неразрывности

$$v_x = \frac{1}{Rx^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad v_\vartheta = -\frac{1}{Rx \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Параметр  $q$  определяет отношение центробежной силы к силе гравитации на поверхности звезды, он может быть оценен достаточно надежно, используя, например, существующие наблюдательные данные для Солнца

$$\Omega_0 \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ сек}, \quad a \approx 7 \cdot 10^{10} \text{ см}, \quad M \approx 1.99 \cdot 10^{33} \text{ г}$$

$$q = \frac{\Omega_0^2 a}{GM/a^2} \sim 10^{-5}$$

По-видимому, параметр  $q$  остается малой величиной для всех звезд нижней части главной последовательности, так как скорости их вращения достаточно медленны.

Параметр  $\beta$  оценивает отношение сил турбулентной вязкости к инерционным членам и является величиной, обратной безразмерному числу Рейнольдса, построенному с использованием турбулентной вязкости  $\eta_0$

$$\beta = \frac{\eta_0 / \rho_0}{a^2 \Omega_0} = \frac{1}{R_T}$$

Параметр  $q$  оценивается достаточно точно и, по-видимому, отношение центробежных сил к силам гравитации остается малым по всей глубине конвективной зоны. Поэтому в дальнейшем проведем разложение всех функций по малому параметру  $q$  по схеме

$$f(x, \vartheta) = f_0(x) + qf_1(x, \vartheta) + \dots$$

Очевидно, что все инерционные и турбулентные члены будут по крайней мере первого порядка по  $q$ . Уравнения для нулевого приближения с соответствующими граничными условиями определяют распределение по радиусу температуры, плотности и давления в гидростатической модели Солнца и границу раздела между ядром и оболочкой  $b = r_0 / a$ . Имеются многочисленные расчеты гидростатических моделей Солнца, например [1], и поэтому в дальнейшем все функции нулевого приближения будем счи-

тать известными. Уравнения для первого приближения по  $q$  имеют вид

$$I_x - \omega^2 x \sin^2 \vartheta = -\frac{1}{R_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{R_1}{R_0} \frac{1}{R_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \beta \frac{Q_x}{R_0} \quad (2.3)$$

$$I_\varphi - \omega^2 x \sin \vartheta \cos \vartheta = -\frac{1}{x R_0} \frac{\partial p_1}{\partial \vartheta} - \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} + \beta \frac{1}{R_0 x} Q_\varphi \quad (2.4)$$

$$I_\varphi = \beta \frac{1}{R_0 x \sin \vartheta} Q_\varphi \quad (2.5)$$

Далее удобно воспользоваться баротропной зависимостью и исключить члены, содержащие давление и гравитационный потенциал; дифференцируя (2.3) и (2.4), получим уравнение, связывающее  $\psi$  и  $\omega$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_x}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (x I_\varphi)}{\partial x} + \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial (\omega^2 x^2)}{\partial x} - x \frac{\partial (\omega^2 \sin^2 \vartheta)}{\partial \vartheta} = \\ = \left[ \frac{1}{R_0} \frac{\partial Q_x}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q_\varphi}{R_0} \right] \beta \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отметим, что  $Q_x$  и  $Q_\varphi$ ,  $I_x$  и  $I_\varphi$  являются функциями только  $\psi$ ,  $R_0$  и  $\xi$  и не зависят от  $\omega$ , а  $Q_\varphi$  — функция только  $\omega$  и  $\xi$ , но не  $\psi$ .

3. Далее будет рассмотрен случай, когда силы турбулентного трения играют существенную роль в установлении меридиональной циркуляции и закона вращения конвективной оболочки [11], т. е. случай, когда  $R_T = 1/\beta$  мала. В этом случае можно провести разложение искомых функций по параметру  $1/\beta$

$$\begin{aligned} \omega(x, \vartheta) &= \omega_0(x, \vartheta) + \beta^{-1} \omega_1(x, \vartheta) + \beta^{-2} \omega_2(x, \vartheta) + \dots \\ \psi(x, \vartheta) &= \psi_0(x, \vartheta) + \beta^{-1} \psi_1(x, \vartheta) + \beta^{-2} \psi_2(x, \vartheta) + \dots \end{aligned}$$

и получить системы уравнений для нулевого приближения

$$\frac{1}{R_0} \frac{\partial Q_x(\psi_0)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{R_0} Q_\varphi(\psi_0) \right] = 0, \quad Q_\varphi(\omega_0) = 0 \quad (3.1)$$

первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0} \frac{\partial Q_x(\psi_1)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{R_0} Q_\varphi(\psi_1) \right] = \frac{\partial I_x(\psi_0)}{\partial \vartheta} - \\ - \frac{\partial [x I_\varphi(\psi_0)]}{\partial x} + \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial (\omega_0^2 x^2)}{\partial x} - x \frac{\partial (\omega_0^2 \sin^2 \vartheta)}{\partial x} \\ \frac{Q_\varphi(\omega_1)}{R_0 x \sin \vartheta} = I_\varphi(\psi_0, \omega_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

и второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0} \frac{\partial Q_x(\psi_2)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{R_0} Q_\varphi(\psi_2) \right] = \frac{\partial I_x(\psi_0, \psi_1)}{\partial \vartheta} - \\ - \frac{\partial [x I_\varphi(\psi_0, \psi_1)]}{\partial x} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial (\omega_0 \omega_1 x^2)}{\partial x} - 2x \frac{\partial (\omega_0 \omega_1 \sin^2 \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{Q_\varphi(\omega_2)}{R_0 x \sin \vartheta} = I_\varphi(\psi_1, \omega_0) + I_\varphi(\psi_0, \omega_1), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_0(\omega) &= \frac{\sin^2 \vartheta}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^2 \xi \left( \frac{\partial x^2 \omega}{\partial x} - 2Sx\omega \right) \right] + \frac{\xi}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( S \sin^3 \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right) \\
 Q_x(\psi) &= \frac{2}{x^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^2 \xi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_0 x^2} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \right] + \frac{\xi}{x^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \frac{2S}{R_0 x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{S \sin \vartheta}{R_0 x^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{2S\xi}{x^3 R_0} \left[ \frac{2}{x \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] \\
 Q_\vartheta(\psi) &= \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \xi x^2 \left[ \frac{S}{R_0 x^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{2S}{R_0 x \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] \right\} + \\
 &\quad + \frac{2S\xi}{R_0 x^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{2S\xi}{R_0 x^2 \sin \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]
 \end{aligned}$$

с граничными условиями для  $\omega_i$  и  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\tau_x^\circ(\omega_i) = 0, \quad \tau_x^\circ(\psi_i) = 0, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{при } x = b, x = 1 \quad (3.4)$$

Кроме того, задание углового момента вращения осуществим, положив  $\omega_0(1) = 1$ . Функцию  $\xi = \xi(x)$  будем считать известной функцией глубины зоны, а  $S = \text{const}$ .

Будем искать решение систем (3.1) — (3.3) методом разделения переменных. Положим

$$\omega_0(x) = X(x)\theta(\vartheta)$$

при этом приходим к уравнениям

$$x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + x \left( 6 - 2S + \frac{d \ln \xi}{d \ln x} \right) \frac{dX}{dx} + \left[ 2(1 - S) \left( 3 + \frac{d \ln \xi}{d \ln x} \right) - kS \right] X = 0 \quad (3.5)$$

с граничными условиями

$$x \frac{dX}{dx} + 2(1 - S)X = 0 \quad \text{при } x = b \text{ и } x = 1 \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \left[ \sin^3 \vartheta \frac{d\theta}{d\vartheta} \right] = -k \sin^3 \vartheta, \quad \theta(\vartheta) = \theta(\vartheta + 2\pi) \quad (3.7)$$

Нетривиальные ограниченные периодические решения (3.7) для  $\theta(\vartheta)$  существуют лишь при  $k = n(n + 1) - 2$  ( $n$  — целое число, начиная с единицы) и имеют вид

$$\theta_n = \frac{P_n^1(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \mu = \cos \vartheta$$

где  $P_n^1(\mu)$  — присоединенные функции.

Решение линейного однородного уравнения (3.5) для  $X$  при граничных условиях (3.6) существует только при  $k=0$ , т. е.  $n=1$  и имеет вид

$$X(x) = x^{2(S-1)}, \quad \omega_0 = x^{2(S-1)} \quad (3.8)$$

где  $\omega_0(1)$  принято равным единице.

Из второго уравнения (3.1) и (3.4) найдем, что

$$\psi_0(x, \vartheta) = 0$$

Для системы (3.2) с граничными условиями (3.4) получим

$$\omega_1(x, \vartheta) = 0$$

$$\psi_1 = \Psi(x) P_2'(\mu) \sqrt{1 - \mu^2}$$

где функция  $\Psi(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Psi^{IV} + \frac{2(1-S-y)}{x} \Psi''' + \frac{4(2+S) - 2y'x - y[2(1-S)-y]}{x^2} \Psi'' + \\ + \frac{24 - 8y + x^2 y'' - y(6S - y - y'x)}{x^3} \Psi' + \\ + 12 \frac{2(S-1) + y + Sy - xy'}{x^4} \Psi = \frac{4}{3} (S-1) x^{4S-3} R_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

с граничными условиями

$$\Psi = 0, \quad \Psi'' - \frac{2S-y}{x} \Psi' = 0 \quad \text{при } x = b, \quad x = 1 \quad (3.10)$$

В (3.9) и (3.10) введено обозначение

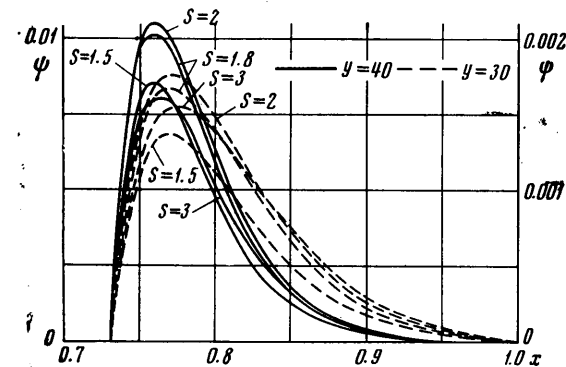
$$\frac{d \ln \xi}{d \ln x} = -y$$

и поскольку кинематический коэффициент турбулентной вязкости остается постоянным на большей части конвективной зоны [6] при расчетах, в дальнейшем полагаем  $\eta/\rho = \text{const}$ , т. е.  $\xi/R_0 = 1$ .

Дальнейшие вычисления функции тока меридиональной циркуляции  $\psi$  и угловой скорости вращения во втором приближении будут существенно зависеть от нулевого приближения по  $q$ , т. е. от распределения плотности в гидростатической модели. Поскольку одной из основных задач работы является изучение влияния изменения по радиусу плотности и коэффициента турбулентной вязкости на меридиональное течение и дифференциальное вращение, примем за нулевое приближение гидродинамическую модель Роша бесконечного радиуса. Тогда

но зависеть от нулевого приближения по  $q$ , т. е. от распределения плотности в гидростатической модели. Поскольку одной из основных задач работы является изучение влияния изменения по радиусу плотности и коэффициента турбулентной вязкости на меридиональное течение и дифференциальное вращение, примем за нулевое приближение гидродинамическую модель Роша бесконечного радиуса. Тогда

$$R_0 = 1/x^y \quad (3.11)$$



Фиг. 1

Задавая различные значения  $y$ , можно будет оценить влияние различных распределений плотности.



При  $y = \text{const}$  уравнение (3.9) допускает точное аналитическое решение в виде

$$\Psi = \sum_{i=1}^4 A_i x^{\alpha_i} + A_0 x^{\alpha_0}$$

где  $\alpha_0 = 4S + 1 - y$ ,  $\alpha_i$  корни уравнения четвертой степени ( $i = 1, \dots, 4$ )

$$F(\alpha) \equiv \alpha^4 + 2\alpha^3(y - S - 2) + \alpha^2[y^2 + 2y(S + 2) - 3 - 2S] + \\ + 2\alpha(15 - 3y - 2yS) + 12[2(S - 1) + y(S + 1)] = 0$$

( $\alpha_i$  — могут быть комплексными), а  $A_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) определяются из граничных условий (3.10),  $A_0 = \frac{1}{3}(S - 1) / F(\alpha_0)$ .

Подставляя известные функции нулевого и первого приближений  $\psi_1(x)$  и  $\omega_0(x)$  в (3.3), получим два уравнения для нахождения угловой скорости вращения звезды во втором приближении

$$\xi \left[ x^2 \frac{d^2 \omega_{20}}{dx^2} + (6 - 2S - y)x \frac{d\omega_{20}}{dx} + 2(1 - S)(3 - y)\omega_{20} \right] = \\ = -2\omega_0 \Psi' + 2S\xi\omega_{22} \quad (3.12)$$

$$\xi \left[ x^2 \frac{d^2 \omega_{22}}{dx^2} + (6 - 2S - y)x \frac{d\omega_{22}}{dx} + 2(3 + 8S - y + yS)\omega_{22} \right] = \\ = \frac{6}{x^2}(x^2\omega_0)' \Psi - 4\omega_0 \Psi' \quad (3.13)$$

где обозначено

$$\omega_2(x, \mu) = \omega_{20}(x) + \omega_{22}(x)P_2(\mu)$$

с граничными условиями

$$x \frac{d\omega_{20}}{dx} + 2\omega_{20}(1 - S) = 0 \text{ при } x = b \text{ и } x = 1 \quad (3.14)$$

$$x \frac{d\omega_{22}}{dx} + 2\omega_{22}(1 - S) = 0 \text{ при } x = b \text{ и } x = 1 \quad (3.15)$$

Можно показать, что одно из условий (3.14) выполняется тождественно, если выполнено другое условие (3.14), (3.15) и условие (3.10) для  $\Psi$ . Остающаяся неопределенность, которая естественно входит в задачу, устраняется заданием  $\omega_{20}$  при  $x = 1$ :  $\omega_{20}(1) = 0$ . Общее решение (3.12) и (3.13) можно записать в виде

$$\omega_{22}(x) = \sum_{k=1}^2 B_k x^{\lambda_k} + \sum_{i=0}^4 C_i x^{m+\alpha_i} \quad (3.16)$$

$$m = 2S - 3 + y, \lambda_{1,2} = \frac{-(5 - 2S - y) \pm \sqrt{(1 - y + 2S)^2 + 40S}}{2}$$

Здесь  $C_i$  определяют частные решения неоднородного уравнения (3.13),  $B_k$  — постоянные, определяемые из граничных условий (3.15).

Далее

$$\omega_{20} = Lx^{2(s-1)} + Nx^{y-3} + \sum_{k=1}^2 D_k x^{\lambda_k} + \sum_{i=0}^4 F_i x^{m+\alpha_i} \quad (3.17)$$

Последние две суммы в (3.17) представляют собой частные решения неоднородного уравнения (3.12),  $L$  и  $N$  — постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий (3.14).

Первое уравнение (3.3) с учетом (3.4) дает

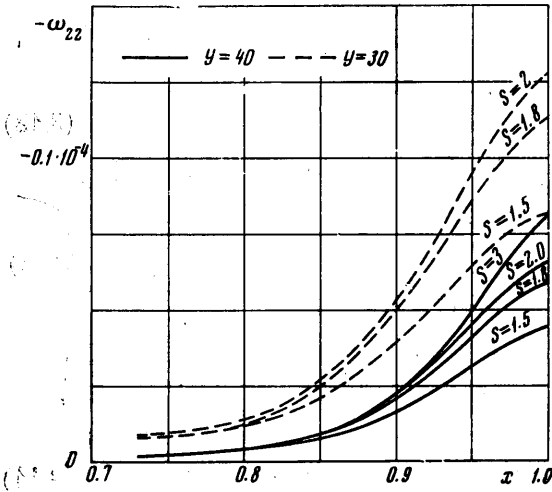
$$\psi_2(x, \vartheta) = 0$$

На фиг. 1—4 приведены графики расчетов функции тока  $\Psi$  и  $\omega_{22}$  при различных значениях параметров  $S$ ,  $y$  и  $b$ , характеризующих степень анизотропии турбулентных движений, падение плотности по радиусу и глубину конвективной оболочки.

Из приведенных на фигурах кривых можно сделать следующие выводы:

1) скорость меридиональной циркуляции больше для более глубоких конвективных областей при тех же значениях  $y$  и  $S$ ;

2) при более резком падении плотности в оболочке, т. е. с увеличением  $y$ , скорость меридиональной циркуляции увеличивается; при увеличении  $S$  скорость меридиональной циркуляции изменяется немонотонно, достигая максимального значения при некотором  $S = S^*(y)$ ;



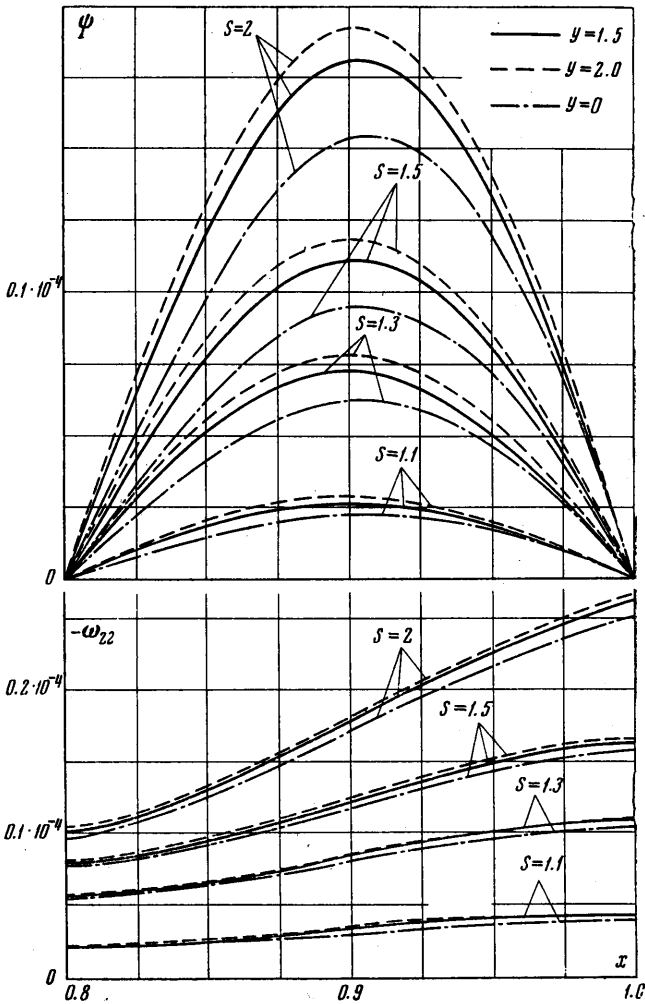
Фиг. 2

3) функция  $\omega_{22}$ , описывающая изменение угловой скорости по  $\vartheta$ , отрицательна для  $S > 1$ . При  $S \rightarrow 1$  функция  $\omega_{22}$  уменьшается, стремясь к нулю, т. е. реализуется закон твердого вращения в оболочке. Интересно отметить, что с ростом  $S$   $\omega_{22}$  увеличивается, т. е. дальнейшее увеличение неизотропности турбулентности приводит к увеличению дифференциального вращения. При более резком падении плотности в оболочке в отличие от скорости меридиональной циркуляции, которая возрастает,  $\omega_{22}$  с ростом  $y$  изменяется немонотонно. Как следует из фиг. 4,  $\omega_{22}$  больше для более глубоких конвективных зон.

Интересно провести сравнение полученных результатов с наблюдаемым явлением дифференциального вращения Солнца. Из наблюдений за долгоживущими образованиями на Солнце получена следующая эмпирическая формула для угловой скорости вращения поверхности [12]:

$$\Omega = 14^\circ \cdot 38 - 2^\circ \cdot 77 \cos^2 \vartheta = \Omega(1, \mu^x) [1 - 0.1367 P_2(\mu)] \quad (3.18)$$

где  $\mu^x$  — корень уравнения  $P_2(\mu^x) = 0$ .



Фиг. 3

Согласно нашему разложению на поверхности

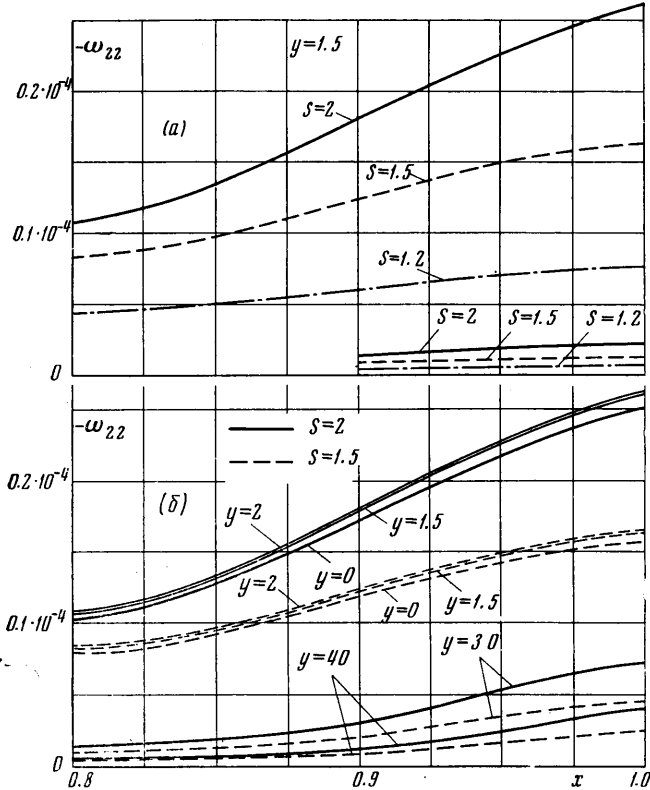
$$\omega(1) = 1 + \frac{1}{\beta^2} \omega_{22}(1, S, y, b) P_2(\mu) \quad (3.19)$$

Трудность сравнения (3.18) и (3.19) заключается в следующем:

1) в неточном знании безразмерного коэффициента в (3.19);  $\eta_0 / \rho_0$ , входящее в этот коэффициент, принимается в различных работах [6, 8, 15] равным  $2 \times 10^{12}$ ,  $10^{13}$ <sup>427</sup>,  $10^{14}$ ;

2) в достаточной неопределенности параметров  $S$  и  $b$  и переменности параметра  $y$  по глубине зоны.

Если принять  $S = 3$  (сильно неустойчивая стратификация),  $b = 0.73$  и  $y = 40$ , то  $\omega_{22}(1, 3, 40, 0.73) \approx 8.2 \times 10^{-6} 1/\beta$  для трех приведенных значений  $\eta_0 / \rho_0$  равно соответственно  $7 \cdot 10^3$ ;  $5 \cdot 10^2$ ,  $1.5 \cdot 10^2$ , т. е. для первого и второго значений  $\eta_0 / \rho_0$  дифференциальное вращение больше наблюдаемого, и, поскольку второй член в (3.19) получился больше или порядка



Фиг. 4

первого, наша линеаризованная теория не верна. Для третьего значения  $\eta_0/\rho_0$  получается неплохое соответствие с наблюдаемыми данными:  $\omega(1, \vartheta) = 1 - 0.18 P_2(\mu)$ .

Поступило 28 VII 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шварцшильд М. Строение и эволюция звезд. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Spiegel E. A., Veronis G. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophys. J.*, 1960, vol. 131, No. 2.
3. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*. London, Clarendon Press; Oxford, Univ. Press, 1961.
4. Wasiutinsky J. *Hydrodynamics and structure of stars and planets*. *Astrophys. Norvegica*, 1946, vol. 4.
5. Biermann L. On meridional circulations in stellar convective zones. *Electromagnetic Phenomena in Cosmic Physics*, Cambridge, Univ. Press, 1958, p. 548.
6. Baker N., Temesvary S. *Tables of convective stellar envelope Model*. N. Y. NASA, Goddard Space Flight Inst., 1966.
7. Bohm K. H. Unstable models in the solar hydrogen convective zone. *Astrophys. J.*, 1963, vol. 137, No. 3.
8. Kippenhahn R. Differential rotation in stars with convective envelopes. *Astrophys. J.*, 1963, vol. 137, No. 2.
9. Sakurai T. *Hydrodynamical investigations of the solar differential rotation*. *Publ. Astronom. Soc. Japan*, 1966, vol. 18, No. 3.
10. Cocks W. J. On the solar differential rotation and meridional currents. *Astrophys. J.*, 1967, vol. 150, No. 3, pt 1.
11. Newton H. W., Nunn M. L. The sun's Rotation derived from sunspots and Additional results. *Monthly Notices of Royal Ast. Soc.*, 1951, No. 111, p. 413.
12. Mizuno S., Nishida M. On the structure of the Outer Solar Convection Zone. *Publ. Astronom. Soc. Japan*, 1969, vol. 21, No. 2, pp. 124—127.
13. Nickel G. H. The maintenance of solar differential rotation by two-dimensional turbulence. A numerical model. *Solar Phys.*, 1969, vol. 10, No. 2, pp. 472—475.
14. Kato S., Nakagawa Y. The solar differential rotation and Rossby type waves. *Solar Phys.*, 1969, vol. 10, No. 2, pp. 476—493.