О КОНВЕКТИВНОМ ДВИЖЕНИИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ТОКОМ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

О. А. ЭЙСМОНТ

(*Москва*)

Рассматривается конвективная неустойчивость слоя проводящей жидкости с током, находящегося в магнитном поле, направленном перпендикулярно току. Задача решается в безындукционном приближении в линейной постановке. Получены зависимости числа Рэлея от числа Гартмана, определяющие нейтральную устойчивость.

Вопросы устойчивости слоя жидкости, подогреваемого снизу, рассматривались в ряде работ (например, [1, 2]). В работах [3, 4] изучалось влияние магнитного поля на устойчивость такого типа. В этих случаях неоднородное распределение плотности, зависящей от температуры, приводит к неоднородности гравитационной силы, что и является причиной неустойчивости. Аналогичная ситуация может иметь место при протекании электрического тока через жидкость, проводимость которой зависит от температуры и которая находится в магнитном поле, направленном перпендикулярно току. Если при этом температура жидкости неоднородна в направлении действия электромагнитной силы, то возможна неустойчивость за счет возникающей неоднородности самой электромагнитной силы.

1. Пусть имеется слой $0 \leqslant z \leqslant h$ несжимаемой жидкости, проводимость которой линейно зависит от температуры

$$\sigma = \sigma_{00}[1 + \alpha(T - T_{00})]$$

причем предполагается, что $|\alpha(T - T_{00})| \ll 1$, так что изменение проводимости по толщине слоя мало в сравнении с величиной самой проводимости. Плотность жидкости ρ, а также коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ считаются постоянными. В направлении y приложено внешнее однородное электрическое поле напряженностью E_0, в направлении x — однородное магнитное поле индукцией B. Магнитное поле, индуцируемое протекающими через среду токами, полагается малым в сравнении с внешним, что имеет место при выполнении условий

$$\frac{\mu_* \sigma_{00} E_0 h}{B} \ll 1, \qquad R_m \ll 1$$

где μ_* —магнитная проницаемость, R_m — магнитное число Рейнольдса.

Равновесное состояние характеризуется следующим распределением невозмущенных величин, отмечаемых индексом 0 (здесь и ниже используются общепринятые обозначения)

$$\mathbf{V}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0(0, E_0, 0), \quad p_0 = \sigma_{00} E_0 B z + \mathrm{const}$$

$$T_0 = \frac{\sigma_{00} E_0^2}{2\lambda}(h - z)z + \frac{T_{02} - T_{01}}{h} z + T_{01}$$

где T_{01}, T_{02} — заданные температуры поверхностей $z = 0$, h соответственно.

Задача решается в линейной постановке. Исходная система уравнений для возмущений имеет вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v-\sigma_{00}B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+vB\right)\tag{1.2}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w+\sigma_{00}B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-wB\right)-E_0B\sigma\tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\tag{1.4}$$

$$\sigma_{00}\Delta\varphi-\sigma_{00}B\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)-E_0\frac{\partial\sigma}{\partial y}=0\tag{1.5}$$

$$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{dT_0}{dz}w\right)=-2\sigma_{00}E_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-wB\right)+E_0^2\sigma+\lambda\Delta T\tag{1.6}$$

$$\sigma=\sigma_{00}\alpha T\tag{1.7}$$

Дифференцируя уравнение (1.1) по x, уравнение (1.2) по y, складывая их и исключая из полученного таким образом уравнения и уравнения (1.3) давление, будем иметь

$$\rho\frac{\partial\Delta w}{\partial t}=\mu\Delta^2 w+\sigma_{00}B\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y}-\sigma_{00}B^2\Delta_1 w-\tag{1.8}$$

$$-E_0B\Delta_1\sigma+\sigma_{00}B^2\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}\qquad\left(\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

Дифференцируя теперь уравнение (1.5) по y, умножая его на B и складывая с (1.8), получаем

$$\rho\frac{\partial\Delta w}{\partial t}=\mu\Delta^2 w-\sigma_{00}B^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-E_0B\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\tag{1.9}$$

Действуя оператором $(\partial/\partial t-\varkappa\Delta-G)$ на (1.9) и используя (1.6), (1.7), получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\varkappa\Delta-G\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta\right)\Delta w=-\frac{\sigma_{00}B^2}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\varkappa\Delta-G\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{2\sigma_{00}^2E_0^2B\alpha}{\rho^2 c_v}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{E_0B\sigma_{00}\alpha}{\rho}\left(\frac{2\sigma_{00}E_0B}{\rho c_v}-\frac{dT_0}{dz}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varkappa=\frac{\lambda}{\rho c_v},\qquad \nu=\frac{\mu}{\rho},\qquad G=\frac{E_0^2\sigma_{00}\alpha}{\rho c_v}\tag{1.10}$$

2. Рассмотрим случай, когда влиянием джоулева тепловыделения можно пренебречь. Тогда из (1.10) будем иметь следующее уравнение для возмущения скорости:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\varkappa\Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta\right)\Delta w=$$

$$=-\frac{\sigma_{00}B^2}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\varkappa\Delta\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+E_0B\sigma_{00}\alpha\frac{T_{02}-T_{01}}{\rho h}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\tag{2.1}$$

Точно такое же уравнение можно получить и для возмущения температуры.

По аналогии с обычной тепловой конвекцией предположим, что в рассматриваемом случае конвективное движение будет иметь ячеистую структуру, причем из вида уравнения (2.1) можно ожидать, что ячейки будут прямоугольными, так как это уравнение не симметрично относительно координат x и y. В этих предположениях можно разделить переменные, полагая

$$w = W(z)\Phi(t)\cos a_1(x/h)\cos a_2(y/h),$$

$$T = \theta(z)\Phi(t)\cos a_1(x/h)\cos a_2(y/h)$$

где a_1, a_2 — характеристические числа, определяющие размер ячеек, на границах которых в силу симметрии должны выполняться условия $\partial w/\partial l = \partial T/\partial l = 0$, где l — нормаль к границе ячейки.

Граничные условия имеют, как обычно, вид

$$w = T = 0 \quad \text{при } z = 0,\ h \tag{2.2}$$

и в зависимости от типа поверхности

$$\partial w/\partial z = 0 \qquad \text{на жесткой стенке}$$

$$\partial^2 w/\partial z^2 = 0 \qquad \text{на свободной поверхности}$$

Второе условие из (2.2) равносильно, как это видно из (1.9), следующему:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta - \nu\Delta^2 + \frac{\sigma_{00}B^2}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w = 0 \quad \text{при } z = 0, h$$

Предполагая далее, что амплитуда возмущения растет со временем как $\exp(nt)$, получаем следующее уравнение:

$$\begin{gathered}[NP^{1/2} - (D^2 - a^2)][NP^{-1/2} - (D^2 - a^2)](D^2 - a^2)W - \\ - H^2[NP^{1/2} - (D^2 - a^2)]a_1^2 W = -Ra_1^2 W\end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$D \equiv \frac{d}{d\zeta}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad a^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad N = nh^2(\varkappa\nu)^{-1/2}$$

$$P = \frac{\nu}{\varkappa}, \quad H^2 = \frac{\sigma_{00}B^2h^2}{\mu}, \quad R = \frac{E_0 B\sigma_{00}\alpha h^3(T_{02} - T_{01})}{\rho\varkappa\nu}$$

Покажем, что в рассматриваемом случае переход к неустойчивости осуществляется в соответствии с принципом изменения устойчивости, т. е. на границе устойчивости $\mathrm{Re}(N) = \mathrm{Im}(N) = 0$. Запишем для этого уравнения (1.6) и (1.9) в виде следующей системы:

$$\begin{gathered}[N - P^{1/2}(D^2 - a^2)](D^2 - a^2)W - H^2P^{1/2}a_1^2W = \gamma a_1^2\theta \\ [N - P^{-1/2}(D^2 - a^2)]\theta = -\beta W \\ \beta = (T_{02} - T_{01})h(\varkappa\nu)^{-1/2}, \quad \gamma = \frac{1}{\rho}E_0B\sigma_{00}\alpha h^2(\varkappa\nu)^{-1/2}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Принимая, что значению N_i соответствуют решения системы (2.4) W_i и θ_i, а значению N_j — соответствующие значения W_j и θ_j, умножим первое из уравнений (2.4), записанное для случая i, на βW_j, а второе, записанное для случая j,— на $\gamma a_1^2\theta_i$, сложим их и проинтегрируем полученное таким образом уравнение по толщине слоя. Интегрируя отдельные члены уравнения по частям с учетом граничных условий, получаем

$$I_{ij} = -N_i\beta \overset{(1)}{I_{ij}} - \beta(\overset{(2)}{I_{ij}} + \overset{(3)}{I_{ij}}) + N_j\gamma \overset{(4)}{I_{ij}} + \gamma \overset{(5)}{I_{ij}} = 0$$

где

$$I_{ij}^{(1)} = \int [(DW_i)(DW_j) + a^2 W_i W_j] d\zeta$$

$$I_{ij}^{(2)} = P^{1/2} \int [(D^2W_i)(D^2W_j) + 2a^2(DW_i)(DW_j) + a^4 W_i W_j] d\zeta$$

$$I_{ij}^{(3)} = H^2 P^{1/2} a_1^2 \int W_i W_j d\zeta, \qquad I_{ij}^{(4)} = a_1^2 \int \theta_i \theta_j d\zeta$$

$$I_{ij}^{(5)} = P^{-1/2} a_1^2 \int [(D\theta_i)(D\theta_j) + a^2 \theta_i \theta_j] d\zeta$$

Здесь и всюду ниже интегрирование ведется по толщине слоя и пределы интегрирования опускаются.

Вычитая I_{ji} из I_{ij}, а затем складывая I_{ij} с I_{ji}, будем иметь

$$(N_i - N_j)(\beta \overset{(1)}{I_{ij}} + \gamma \overset{(4)}{I_{ij}}) = 0$$

$$(N_i + N_j)(\gamma \overset{(4)}{I_{ij}} - \beta \overset{(1)}{I_{ij}}) = \beta(\overset{(2)}{I_{ij}} + \overset{(3)}{I_{ij}}) - \gamma \overset{(5)}{I_{ij}}$$

Полагая N_i и N_j комплексно сопряженными и считая, что им соответствуют комплексно сопряженные решения системы (2.4), получаем

$$\begin{gathered} \operatorname{Im}(N)(\beta I^{(1)} + \gamma I^{(4)}) = 0 \\ 2\operatorname{Re}(N)(\gamma I^{(4)} - \beta I^{(1)}) = \beta(I^{(2)} + I^{(3)}) - \gamma I^{(5)} \end{gathered} \tag{2.5}$$

где

$$I^{(1)} = \int [|DW|^2 + a^2 |W|^2] d\zeta,$$

$$I^{(2)} = P^{1/2} \int [|D^2W|^2 + 2a^2|DW|^2 + a^4|W|^2] d\zeta$$

$$I^{(3)} = H^2 P^{1/2} a_1^2 \int |W|^2 d\zeta, \qquad I^{(4)} = a_1^2 \int |\theta|^2 d\zeta$$

$$I^{(5)} = P^{-1/2} a_1^2 \int [|D\theta|^2 + a^2 |\theta|^2] d\zeta$$

Из (2.5) следует, что действительная часть N может быть положительной, т. е. неустойчивость имеет место, если только $\beta\gamma = R > 0$, при этом $\operatorname{Im}(N) = 0$. Случай $\operatorname{Im}(N) \neq 0$ возможен лишь при $R < 0$, но тогда $\operatorname{Re}(N) < 0$.

Таким образом, принцип изменения устойчивости действительно справедлив, и на границе устойчивости из (2.3) имеем

$$(D^2 - a^2)[(D^2 - a^2)^2 + H^2 a_1^2] W = -R a_1^2 W \tag{2.6}$$

Решая уравнение (2.6) и используя граничные условия, получаем условие существования нетривиального решения задачи, откуда находится ряд значений R, минимальное из которых и будет критическим значением, определяющим начало конвекции. Такой путь требует, однако, численного решения, поэтому для определения критического значения R целесообразно использовать вариационный принцип, аналогичный примененному для задач тепловой конвекции [1].

Удобно заменить уравнение (2.6) системой

$$[(D^2-a^2)^2+H^2a_1^2]W=F,\qquad (D^2-a^2)F=-Ra_1^2W \tag{2.7}$$

с граничными условиями

$$W=F=DW\ (\text{либо } D^2W)=0\quad \text{при } \zeta=0,\ 1$$

Умножая первое уравнение (2.7) на W, второе — на F и интегрируя, можно получить выражение для

$$R=\frac{M_1}{a_1^2M_2},\qquad M_1=\int[(DF)^2+a^2F^2]d\zeta$$
$$M_2=\int\{[(D^2-a^2)W]^2+H^2a_1^2W^2\}\,d\zeta \tag{2.8}$$

Нетрудно показать, что величина R, определяемая выражением (2.8), устойчива по отношению к малым отклонениям δF и δW функций F и W от их истинных значений, удовлетворяющим граничным условиям. Действительно, с точностью до величин второго порядка малости имеем

$$a_1^2M_2\delta R=\delta M_1-a_1^2R\delta M_2,\qquad \delta M_1=2\int(a^2F-D^2F)\,\delta F\,d\zeta$$

$$\delta M_2=2\int(D^4W-2a^2D^2W+a^4W+H^2a_1^2W)\,\delta W\,d\zeta$$

При помощи несложных преобразований получим

$$a_1^2M_2\delta R=-\int[(D^2-a^2)F+Ra_1^2W]\,\delta F\,d\zeta$$

Отсюда следует $\delta R=0$. Как и в случае тепловой конвекции, величина R, определяемая из (2.8), будет минимальной при подстановке в (2.8) точного решения задачи.

Далее рассматриваются три случая граничных условий.

а) *Граничные поверхности свободные.* В этом случае можно получить точное решение задачи, которое имеет вид

$$W=C\sin m\pi\zeta,\qquad m=1,2,\ldots$$

Величина R определяется из (2.6)

$$R=a_1^{-2}[(m^2\pi^2+a^2)^3+H^2a_1^2(m^2\pi^2+a^2)]$$

Нетрудно видеть, что минимальное значение R достигается при $m=1$ и $a_2=0$. Следовательно, ячейки вырождаются в вытянутые в направлении, перпендикулярном магнитному полю, полосы. Оптимальная величина $a_1=a_{10}$ определяется из решения уравнения

$$2a_{10}^6+(3\pi^2+H^2)a_{10}^4-\pi^6=0$$

В пределе при $H\to\infty$

$$a_{10}\to\pi(\pi/H)^{1/2}$$

При этом критическое значение R будет

$$R_*\to\pi^2H^2$$

б) *Граничные поверхности — жесткие стенки.* Решение задачи для этого случая можно получить, используя изложенный выше вариационный принцип. Поместим начало координат в точку $\zeta = {}^1/_2$. Тогда для F и W следует взять четные функции, ибо они дают меньшие, чем нечетные, значения R. В качестве приближенной функции для F возьмем $C \cos \pi\zeta$. Практика показывает [1, 4], что даже такая простая функция без вариационного параметра в задачах тепловой конвекции дает погрешность в определении критического числа Рэлея менее 1%.

Из (2.5) найдем выражение для W

$$W = C_1 \operatorname{sh} \lambda_1\zeta \sin \lambda_2\zeta + C_2 \operatorname{ch} \lambda_1\zeta \cos \lambda_2\zeta + \frac{C \cos \pi\zeta}{(\pi^2 + a^2)^2 + H^2 a_1^2}$$

$$\lambda_{1,2} = \{{}^1/_2 [(a^4 + a_1^2 H^2)^{1/2} \pm a^2]\}^{1/2}$$

Константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$C_2 = C\pi [D_1 (\lambda_1 \operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_1 \cos {}^1/_2\lambda_2 - \lambda_2 \operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2 - E_1 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \operatorname{ctg} {}^1/_2\lambda_2)]^{-1}$$

$$C_1 = -C_2 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \operatorname{ctg} {}^1/_2\lambda_2, \qquad D_1 = (\pi^2 + a^2)^2 + H^2 a_1^2$$

$$E_1 = \lambda_1 \operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2 + \lambda_2 \operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_1 \cos {}^1/_2\lambda_2$$

Окончательное выражение для R будет иметь вид

$$R = \frac{\pi^2 + a^2}{2a_1^2} D_1 \{\pi ({}^1/_2\lambda_1 \operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_1 \sin \lambda_2 - \lambda_2 \operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_1 \sin^2 {}^1/_2\lambda_2 -$$

$$- E_1 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \cos {}^1/_2\lambda_2)^{-1} [(K_1\lambda_1 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \cos {}^1/_2\lambda_2 - K_2 \sin {}^1/_2\lambda_2) \operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_1 \times$$

$$\times \cos {}^1/_2\lambda_2 + (K_2 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \cos {}^1/_2\lambda_2 + K_1\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2) \operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2] + {}^1/_2\}^{-1}$$

$$K_1 = \frac{1}{\lambda_1^2 + (\lambda_2 - \pi)^2} - \frac{1}{\lambda_1^2 + (\lambda_2 + \pi)^2}$$

$$K_2 = \frac{\lambda_2 - \pi}{\lambda_1^2 + (\lambda_2 - \pi)^2} - \frac{\lambda_2 + \pi}{\lambda_1^2 + (\lambda_2 + \pi)^2}$$

в) *Одна граничная поверхность свободная, другая — жесткая стенка.* Известно [1], что решение в этом случае можно получить рассматривая нечетные решения для случая б) при толщине слоя h и применяя их к толщине слоя $h/2$.

Полагая $F = C \sin 2\pi\zeta$, получаем

$$W = C_1 \operatorname{sh} \lambda_1\zeta \cos \lambda_2\zeta + C_2 \operatorname{ch} \lambda_1\zeta \sin \lambda_2\zeta + \frac{C \sin 2\pi\zeta}{(4\pi^2 + a^2)^2 + H^2 a_1^2}$$

где

$$C_2 = 2\pi C [D_2 (\lambda_1 \operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2 + \lambda_2 \operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_1 \cos {}^1/_2\lambda_2 - E_2 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \operatorname{tg} {}^1/_2\lambda_2)]^{-1}$$

$$C_1 = -C_2 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \operatorname{tg} {}^1/_2\lambda_2, \qquad D_2 = (4\pi^2 + a^2)^2 + H^2 a_1^2$$

$$E_2 = \lambda_1 \operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_1 \cos {}^1/_2\lambda_2 - \lambda_2 \operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2$$

Для R получаем следующее выражение:

$$R = (4\pi^2 + a^2) D_2 [a_1^2 (4\pi P_1 P_2 + 1)]^{-1}$$

$$P_1 = ({}^1/_2\lambda_1 \operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2 + \lambda_2 \operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_1 \cos^2 {}^1/_2\lambda_2 - E_2 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2)^{-1}$$

$$P_2 = (K_4 \cos {}^1/_2\lambda_2 - K_3\lambda_1 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2) \operatorname{ch} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2 - (K_4 \operatorname{cth} {}^1/_2\lambda_1 \sin {}^1/_2\lambda_2 + K_3\lambda_1 \cos {}^1/_2\lambda_2) \operatorname{sh} {}^1/_2\lambda_1 \cos {}^1/_2\lambda_2$$

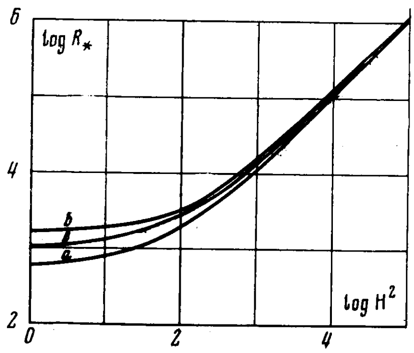
$$K_3 = \frac{1}{\lambda_1^2 + (2\pi - \lambda_2)^2} - \frac{1}{\lambda_1^2 + (2\pi + \lambda_2]^2}$$

$$K_4 = \frac{2\pi - \lambda_2}{\lambda_1^2 + (2\pi - \lambda_2)^2} + \frac{2\pi + \lambda_2}{\lambda_1^2 + (2\pi + \lambda_2]^2}$$

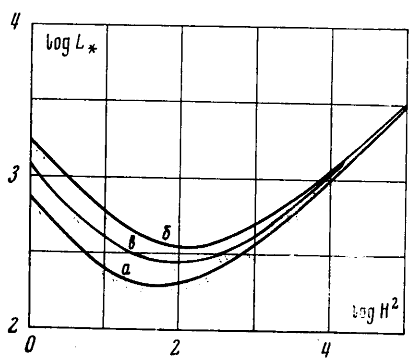
На фиг. 1 приведены зависимости критического значения $R = R_*$ от числа Гартмана для трех типов граничных условий. На фиг. 2 представлена зависимость критического значения L_* безразмерного параметра

$$L = E_0\alpha(T_{02} - T_{01})h^2(\sigma_{00} / \mu)^{1/2}\varkappa^{-1}$$

от числа Гартмана. Как и следует ожидать, существует оптимальное значение числа Гартмана, при котором L_* минимально.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отметим, что все изложеное выше полностью применимо для случая, когда проводимость среды зависит от концентрации проводящей компоненты.

Поступило 7 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Pellew A., Soutwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc. A, 1940, vol. 176, No. 966.
2. Morton B. R. On the equilibrium of a stratified layer of fluid. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1957, vol. 10, pt 4.
3. Thompson W. B. Thermal convection in a magnetic field. Philos. Mag., 1951, vol. 42, No. 335.
4. Chandrasekhar S. On the inhibition of convection by a magnetic field. Philos. Mag., 1952, vol. 43, No. 340.