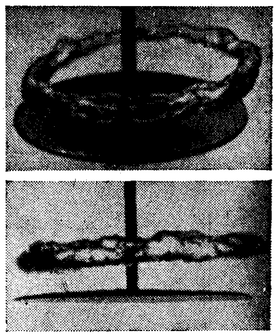
детельствует о несущественном влиянии вязкости жидкости (штриховая линия на фиг. 1 — характер изменения силы при колебаниях в воздухе).

На графике фиг. 2 по оси ординат отложена безразмерная величина гидродинамической силы

$$K = \frac{1}{m^*}\left(\frac{P_n}{A\omega^2} - m_0\right) \qquad \left(m^* = \frac{8}{3}\rho R^3\right)$$

а по оси абсцисс — безразмерная амплитуда колебаний a.

Эксперимент показал, что при малых относительных амплитудах, когда $a < 0.07$, измеренное значение гидродинамической силы совпадает с теоретическим значением и равно $m^*A\omega^2$, где присоединенная масса диска $m^* \approx {}^8/_3\rho R^3$. При дальнейшем увеличении амплитуды a гидродинамическая сила растет и при $a = 0.33$ в два раза превышает теоретическую величину, рассчитанную по присоединенной массе диска m^*. При малых амплитудах фаза силы P_n близка к фазе ускорения. Возрастание K при амплитудах, больших $a = 0.07$, сопровождается увеличением сдвига фаз ε между векторами силы и ускорения, как это можно заключить по фиг. 3, где представлены величины фазового сдвига ε (в *рад*) между соответствующими максимумами гидродинамической силы P_n и перемещения $h = A \sin \omega t$, определенные по осциллограммам эксперимента, в зависимости от n *сек*$^{-1}$.



Фиг. 4

Визуализация течения воздухом (фиг. 4) показала, что при больших амплитудах колебаний с кромок срывается и остается за диском вихревое кольцо. Возвратное движение диска разрушает образовавшееся вихревое кольцо, которое разлетается радиально и исчезает, но зато за диском образуется новое вихревое кольцо. Разлет вихревого следа в виде кольца, по-видимому, вызывает диссипацию энергии, а его образование увеличивает кинетическую энергию и импульс жидкости. Этими причинами можно объяснить кажущееся увеличение присоединенной массы ($K > 1$) и появление сдвига фаз ε, что может быть истолковано как возникновение силы, находящейся в фазе со скоростью. Зарегистрированное вихревое течение в плоскости вертикального сечения по своей форме аналогично вихревому течению, возникающему за цилиндром в начале движения или за пластинкой при малых числах Рейнольдса [3, 4].

Поступило 27 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Риман И. С., Крепс И. Л. Присоединение массы тел различной формы. Тр. ЦАГИ, 1947, № 635.
2. Федяевский К. К. Приближенное теоретическое определение присоединенных масс прямоугольных пластин. ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.. «Наука», 1969.
4. Taneda Sadatoshi Standing twin-vortices behing a thin flat plate normal to the flow. Repts Res. Inst. Appl. Mech., 1968, vol. 16, No. 54.

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОРИСТЫХ СИСТЕМАХ

В. А. КАРПЫЧЕВ

(*Москва*)

В работе исследуется перемещение границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, движущихся в поле центробежных сил при условии, что вращение системы перманентно, а фильтрация подчиняется линейному закону. Различие жидкостей по физическим свойствам (вязкости и плотности) при этом учитывается.

1. Ниже рассматривается фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в малом пористом пласте цилиндрической формы радиуса r_0. Пласт вращается с постоянной угловой скоростью ω. Среда, слагающая пласт, считается однородной по пористости m $(0 < m < 1)$ и проницаемости k. Предполагается, что фильтрация следу-

ет линейному закону. В центре пласта находится совершенная скважина, через которую нагнетается жидкость с вязкостью μ_1 и плотностью ρ_1; соответствующие величины для вытесняемой жидкости обозначим через μ_2 и ρ_2.

Пренебрегая начальным участком разгона, а также силой, возникающей вследствие поворотного ускорения (ввиду малости скоростей фильтрации) для зон нагнетания ($i = 1$) и вытеснения ($i = 2$) будем иметь [1]

$$v_i = -\frac{k}{\mu_i}\left(\frac{\partial p_i}{\partial r} - \rho_i\omega^2 r\right) \tag{1.1}$$

Здесь v_i — скорости фильтрации в радиальном направлении, p_i — давление в первой и второй зонах, для которых соответственно

$$r^\circ \leqslant r \leqslant \xi(t), \qquad \xi(t) < r \leqslant r_0$$

r° — радиус скважины, а $r = \xi(t)$ — уравнение перемещающейся границы раздела между жидкостями.

Очевидно, соотношения (1.1) можно представить в виде

$$v_i = -\frac{k}{\mu_i}\frac{\partial P_i}{\partial r}, \qquad P_i = p_i - \frac{1}{2}\rho_i\omega^2 r^2 \tag{1.2}$$

Величины P_i назовем динамическими давлениями. В силу наличия осевой симметрии течения уравнения неразрывности имеют простой вид

$$\frac{\partial(rv_i)}{\partial r} = 0, \qquad \text{или} \qquad rv_i = h_i(t) \tag{1.3}$$

Здесь $h_i(t)$ — произвольные функции времени. Из соотношений (1.3) и (1.2) находим

$$P_1 = p_1 - {}^1/_2\rho_1\omega^2 r^2 = H_{11}(t)\ln r + H_{12}(t)$$

$$P_2 = p_2 - {}^1/_2\rho_2\omega^2 r^2 = H_{21}(t)\ln r + H_{22}(t)$$

$$H_{ij} = -\frac{\mu_i}{k}h_{ij}(t) \tag{1.4}$$

Для определения функций $H_{ij}(t)$ имеем следующие условия:

$$P_1 = P^\circ = p^\circ - {}^1/_2\rho_1\omega^2 r_0^2 \qquad \text{при } r = r^\circ \tag{1.5}$$

$$P_2 = P_0 = p_0 - {}^1/_2\rho_2\omega^2 r^{\circ 2} \qquad \text{при } r = r_0 \tag{1.6}$$

На перемещающейся границе должны иметь место равенства давлений и скоростей фильтрации, что в аналитической форме может быть представлено в виде соотношений [2]

$$(P_1 - P_2)_{r=\xi} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r}(\mu_2 P_1 - \mu_1 P_2)_{r=\xi} = 0 \tag{1.7}$$

Удовлетворяя условиям на контурах пласта и на перемещающейся границе, для определения функций $H_{ij}(t)$ получаем следующую систему

$$\begin{gathered} H_{11}(t)\ln r^\circ + H_{12}(t) = P^\circ, \qquad H_{21}(t)\ln r_0 + H_{22}(t) = P_0 \\ H_{11}(t)\ln\xi + H_{12}(t) - H_{21}(t)\ln\xi - H_{22}(t) = 0, \qquad \mu_2 H_{11}(t) - \mu_1 H_{21}(t) = 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Отсюда находим

$$\begin{gathered} H_{11}(t) = -\frac{P^\circ - P_0}{\Delta}, \qquad H_{12}(t) = P^\circ + \frac{(P^\circ - P_0)\ln r^\circ}{\Delta} \\ H_{21}(t) = -\frac{P^\circ - P_0}{\Delta}\mu_0, \qquad H_{22}(t) = P_0 + \frac{(P^\circ - P_0)\mu_0\ln r_0}{\Delta} \end{gathered} \tag{1.9}$$

где

$$\Delta = \mu_0\ln r_0 - \ln r^\circ + (1 - \mu_0)\ln\xi, \qquad \mu_0 = \mu_2 / \mu_1$$

Следовательно, для динамических давлений в каждой из зон будем иметь

$$P_1 = P^\circ - \frac{P^\circ - P_0}{\Delta}\ln\left(\frac{r}{r^\circ}\right), \qquad P_2 = P_0 - \frac{\mu_0(P^\circ - P_0)}{\Delta}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{1.10}$$

Последние соотношения позволяют найти закон перемещения границы раздела, исходя из известного кинематического условия [1]

$$m\frac{d\xi}{dt} = -\frac{k}{\mu_2}\left(\frac{\partial P_2}{\partial r}\right)_{r=\xi} \tag{1.11}$$

Имея в виду второе из соотношений (1.10), находим

$$m\frac{d\xi}{dt} = \frac{k\mu_0}{\mu_2}\frac{P^\circ - P_0}{\Delta}\frac{1}{\xi} = \frac{k}{\mu_1}\frac{P^\circ - P_0}{[\mu_0 \ln r_0 - \ln r^\circ + (1-\mu_0)\ln\xi]\,\xi} \tag{1.12}$$

В этом уравнении переменные разделяются; выполняя интегрирование, найдем

$$\begin{gathered}(\mu_0 \ln r_0 - \ln r^\circ)(\xi^2 - \xi_0^2) + (1-\mu_0)[\xi^2\ln\xi - \xi_0^2\ln\xi_0 - {}^1/_2(\xi^2 - \xi_0^2)] = \\ = \frac{k}{m\mu_1}[2(p^\circ - p_0) - \omega^2(\rho_1 r^{\circ 2} - \rho_2 r_0^2)]\,t\end{gathered} \tag{1.13}$$

Здесь $\xi_0 = \xi(0)$ — начальное положение границы раздела между жидкостями. В частности, возможно, что $\xi(0) = r^\circ$. Из (1.13) можно получить зависимость $\xi = \varphi(t)$, и после этого в обеих зонах может быть найдено поле давлений для любого момента времени. Однако разрешить (1.13) относительно t в общем случае не представляется возможным — в этом состоит одна из трудностей задачи. Из формулы (1.13) можно найти время, в течение которого вторая жидкость будет полностью вытеснена из пласта. Для этого в (1.13) следует положить $\xi = r_0$; тогда

$$T = \frac{m\mu_1}{k}\frac{(\mu_0\ln r_0 - \ln r^\circ)(r_0^2 - \xi_0^2) + (1-\mu_0)[r_0^2\ln r_0 - \xi_0^2\ln\xi_0 - {}^1/_2(r_0^2 - \xi_0^2)]}{2(p^\circ - p_0) - \omega^2(\rho_1 r^{\circ 2} - \rho_2 r_0^2)} \tag{1.14}$$

В частности, при $\xi_0 = r^\circ$ получим

$$T = \frac{m\mu_1}{k}\frac{(\mu_0\ln r_0 - \ln r^\circ)(r_0^2 - r^{\circ 2}) + (1-\mu_0)[r_0^2\ln r_0 - r^{\circ 2}\ln r^\circ - {}^1/_2(r_0^2 - r^{\circ 2})]}{2(p^\circ - p_0) - \omega^2(\rho_1 r^{\circ 2} - \rho_2 r_0^2)} \tag{1.15}$$

Здесь T — время вытеснения жидкости, насыщавшей при $t = 0$ часть пласта (или весь пласт) жидкостью, вводимой через нагнетательную скважину. Таким образом, в рамках введенных допущений найдено точное решение задачи. Следует отметить, что угловая скорость ω не может быть выбрана по произволу, так как в противном случае может произойти нарушение линейного закона фильтрации, и найденные выше зависимости потеряют силу. Однако из физических соображений ясно, что

$$P_0 = p_0 - {}^1/_2\rho_2\omega^2 r_0^2 > 0 \tag{1.16}$$

Отсюда следует, что

$$\omega r_0 < \sqrt{2p_0/\rho_2} \tag{1.17}$$

2. Приведем анализ частных случаев рассмотренной выше задачи.

1°. Предположим $\mu_1 = \mu_2 = \mu$; следовательно $\mu_0 = 1$, тогда из (1.13) имеем

$$\ln\left(\frac{r_0}{r^\circ}\right)(\xi^2 - \xi_0^2) = \frac{k}{m\mu}[2(p^\circ - p_0) - \omega^2(\rho_1 r^{\circ 2} - \rho_2 r_0^2)]\,t \tag{2.1}$$

закон перемещения границы раздела, а из соотношения (1.14) найдем время вытеснения жидкости из второй зоны

$$T = \frac{m\mu}{k} \frac{\ln(r_0/r^\circ)(r_0^2 - \xi_0^2)}{2(p^\circ - p_0) - \omega^2(\rho_1 r^{\circ 2} - \rho_2 r_0^2)} \qquad (2.2)$$

где $\xi_0 = \xi(0)$ — положение границы раздела при $t = 0$.

Это соответствует вытеснению жидкости с плотностью ρ_2 жидкостью с плотностью ρ_1 (например, вытеснение соленой воды пресной водой без учета диффузии).

2°. Предположим $\mu_0 \to \infty$. Это соответствует случаю, когда вытесняемая жидкость обладает очень большой вязкостью по сравнению с вязкостью вытесняющей жидкости. Задачи в такой постановке (см., например, [2]) решались многими авторами. В данном случае

$$\begin{aligned} &\mu_2 \ln r_0(\xi^2 - \xi_0^2) - \mu_2[\xi^2 \ln \xi - \xi_0^2 \ln \xi_0 - {}^1/_2(\xi^2 - \xi_0^2)] = \\ &= km^{-1}[2(p^\circ - p_0) - \omega^2(\rho_1 r^{\circ 2} - \rho_2 r_0^2)]\, t \end{aligned} \qquad (2.3)$$

закон перемещения границы раздела; время вытеснения сильновязкой жидкости равно

$$T = \frac{m\mu_2}{k} \frac{\xi_0^2 \ln(\xi_0/r_0) + {}^1/_2(r_0^2 - \xi_0^2)}{2(p^\circ - p_0) - \omega^2(\rho_1 r^{\circ 2} - \rho_2 r_0^2)} \qquad (2.4)$$

3°. Предположим $\mu_0 \to 0$, это означает, что вытесняемая жидкость обладает очень малой вязкостью по сравнению с жидкостью вытесняющей.

В данном случае соответственно найдем

$$\begin{aligned} &\ln(1/r_0)(\xi^2 - \xi_0^2) + \xi^2 \ln \xi - \xi_0^2 \ln \xi_0 - {}^1/_2(\xi^2 - \xi_0^2) = \\ &= \frac{k}{m\mu_1}[2(p^\circ - p_0) - \omega^2(\rho_1 r^{\circ 2} - \rho_2 r_0^2)]\, t \end{aligned} \qquad (2.5)$$

закон перемещения границы раздела, а для подсчета времени вытеснения жидкости из второй зоны будем иметь формулу

$$T = \frac{m\mu_1}{k} \frac{\ln(1/r_0)(r_0^2 - \xi_0^2) + r_0^2 \ln r_0 - \xi_0^2 \ln \xi_0 - {}^1/_2(r_0^2 - \xi_0^2)}{2(p^\circ - p_0) - \omega^2(\rho_1 r^{\circ 2} - \rho_2 r_0^2)}.$$

4°. При $\mu_0 = 1$ и $\rho_1 = \rho_2$ имеем модель «разноцветных» жидкостей. В данном случае перемещение «контура разноцветности» легко находится по методу Кельвина — Ламба.

Поступило 26 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
2. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.— Л., Гостехиздат, 1947.