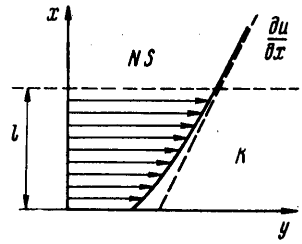

Фиг. 3

отражения

$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp \frac{-m\xi^2}{2kT_0} \qquad (3.1)$$

На бесконечности (практически на расстоянии длины свободного пробега) задается навье-стоксовская функция распределения

$$f = f_0 \left[1 + \frac{p_{xy}}{2p} \frac{m}{kT} c_x c_y \right], \qquad f_0 = f_{00} [1 + 2c_y u(x) h_0],$$

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}, \qquad p_{xy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad h_0 = \frac{m}{2kT_0} \qquad (3.2)$$

Внутри кнудсеновского слоя функция распределения имеет вид

$$f = f_{00} [1 + 2h_0 \xi_y u(x) + \varphi(x, \xi_x, \xi_y)] \qquad (3.3)$$

Как видно из (3.2), в верхнее граничное условие входит значение массовой скорости u, величину которой в первом приближении можно задавать произвольно. Здесь использовался удобный алгоритм нахождения массовой скорости на верхней границе. Разобьем поле течения на слои. Предполагая, что вблизи верхней границы профиль скорости выходит на заданный навье — стоксовский градиент $(\partial u / \partial x)_\infty$, зададим массовую скорость на верхней границе по формуле

$$\overset{(\gamma)}{u_n} = \overset{(\gamma-1)}{u_{n-1}} + (\partial u / \partial x)_\infty \Delta x$$

где n — номер слоя на верхней границе, Δx — толщина слоя, γ — номер приближения.

На фиг. 2, *б* представлена зависимость градиента массовой скорости на верхней границе $\partial u / \partial x$, отнесенного к его значению на бесконечности, от номера последовательного приближения N_0.

На фиг. 2, *в* показаны профили безразмерной скорости α. Цифрой *1* обозначен профиль скорости для псевдомаксвелловских молекул, взятый из работы [3] (коэффициент скольжения равен 1.015), цифрой *2* обозначен профиль скорости для твердых сфер, полученный в данной работе (коэффициент скольжения равен 1.103). Здесь $\alpha = u(l \partial u / \partial x)^{-1}$, где l — толщина слоя Кнудсена. Как известно, максвелловские молекулы и твердые сферы представляют собой два крайних случая потенциалов взаимодействия молекул. Поэтому естественно предположить, что результаты для молекул со всеми другими потенциалами взаимодействия будут находиться в промежуточной области между полученными значениями.

В заключение автор благодарит М. Н. Когана за постановку задачи и большую помощь, оказанную в процессе работы, а также В. И. Власова, С. Л. Горелова и В. А. Перепухова за помощь при составлении программы.

Поступило 24 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. Власов В. И., Горелов С. Л., Коган М. Н. Математический эксперимент для вычисления коэффициентов переноса. Докл. АН СССР, 1968, т. 176, № 6.
3. Горелов С. Л., Коган М. Н. Решение линейных задач динамики разреженного газа методом Монте-Карло. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
4. Горелов С. Л., Коган М. Н. Решение задачи о скачке температуры (течение в слое Кнудсена) и линейной задачи о передаче тепла между двумя параллельными пластинами в разреженном газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.

ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА ДЛЯ ТРЕХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ МОДЕЛЕЙ

С. Г. СКАКУН, П. Е. СУЕТИН, В. Г. ЧЕРНЯК

(*Свердловск*)

Получено решение задачи о плоском изотермическом течении Куэтта в третьем приближении метода полупространственных моментов для максвелловских молекул, твердых сферических молекул и эллипсоидальной статистической модели. Результаты расчета сопоставлены с решением Виллиса для модели БГК и решением методом дискретных ординат для твердых сферических молекул, причем обнаружено качественное совпадение решений методами дискретных ординат и моментов. Сделан вывод о диапазоне применимости решения методом моментов в третьем приближении для различных моделей.

Решения задачи о плоском изотермическом течении Куэтта во втором приближении метода полупространственных моментов для твердых сферических и максвелловских молекул получены в работах [1, 2], и для модели БГК в третьем приближении — в [1]. Интегральный метод применен к модели БГК в работе [3]. К сожалению, автор ограничился рассмотрением промежуточного режима течения. Авторами [4] была предпринята попытка решить задачу на ЭВМ для твердых сферических молекул методом дискретных ординат. Однако недостаточно корректное сравнение полученных результатов с данными работы [1] привело к неверным выводам.

Цель этой работы — решение задачи методом полупространственных моментов в третьем приближении для твердых сферических и максвелловских молекул, а также для эллипсоидальной статистической модели [5] и выяснение некоторых закономерностей, связанных с использованием метода моментов.

Пусть газ находится между бесконечными параллельными плоскостями $x = \pm{}^1/_2 d$, движущимися вдоль оси z со скоростями $\pm{}^1/_2 w$ соответственно. После применения метода полупространственных моментов [6, 7] и граничных условий полностью диффузного отражения макроскопическая скорость газа $\langle v_z \rangle$ может быть записана в виде

$$\langle v_z(x_1)\rangle = \frac{w}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Delta}\left[a\Delta_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 + b\Delta_2 \operatorname{sh} \beta x_1 + \delta\Delta_3 x_1\right]$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ -q_1 & -q_2 & q_3 \end{vmatrix}, \qquad r = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$x_1 = x/d, \qquad \delta = {}^1/_2 \pi^{1/2} K^{-1} \qquad e_{1,2} = \exp\left[\pm{}^1/_2 \alpha\right], \qquad e_{3,4} = \exp\left[\pm{}^1/_2 \beta\right]$$

Здесь K — число Кнудсена, отношение свободного пробега к расстоянию между плоскостями; значение Δ_i получается из Δ заменой i-го столбца столбцом r. Значения остальных величин для различных моделей приведены в табл. 1.

Таблица 1

	Модель максвелловских молекул	Модель твердых сферических молекул	Эллипсоидальная модель
α	10.5059 δ	5,0041 δ	2.5235 δ
β	1.2632 δ	0.5574 δ	0.4281 δ
a	—0.5448	4.5612	—0.3726
b	0.8290	3.3825	0.3949
m_1	0.7357 e_1 — 0.2580 e_2	—6.9459 e_1 + e_2	0.5682 e_1 — 0.0758 e_2
p_1	1.4440 e_1 — 0.4440 e_2	13.3229 e_1 — 1.1415 e_2	1.0825 e_1 — 0.0825 e_2
q_1	0.5832 e_1 — 0.1747 e_2	—5.2131 e_1 + 0.3634 e_2	0.4205 e_1 — 0.0266 e_2
m_2	—0.1859 e_3 + 0.1915 e_4	0.1514 e_3 + e_4	0.0265 e_3 + 0.1091 e_4
p_2	1.0747 e_3 — 0.0747 e_4	—8.3544 e_3 — 0.7745 e_4	0.9460 e_3 + 0.0540 e_4
q_2	0.9985 e_3 — 0.1178 e_4	6.6862 e_3 + 0.2527 e_4	0.7383 e_3 + 0.0123 e_4
m_3	—0.2821 δ	—0.2821 δ + 0.0053	—0.2821 δ
p_3	0.5642	—0.6495	0.5642
q_3	0	—0.0768	0

Таблица 2

δ	1	2	3	[3]
0.01	$0.1937 \cdot 10^{-1}$	$0.9259 \cdot 10^{-2}$	$0.6171 \cdot 10^{-2}$	—
0.1	0.1094	$0.7318 \cdot 10^{-1}$	$0.7318 \cdot 10^{-1}$	—
1	0.2702	0.2544	0.2476	0.2519
2	0.3316	0.3202	0.3181	0.3207
3	0.3658	0.3574	0.3565	0.3582
5	0.4040	0.3987	0.3987	0.3993
7	0.4252	0.4214	0.4215	0.4217
10	0.4438	0.4411	0.4412	0.4413
20	0.4693	0.4679	0.4679	0.4680

В вязком $K \to 0$ и свободномолекулярном $K \to \infty$ режимах решение (1) согласуется с существующими теориями сплошной и свободномолекулярной сред.

Изберем для сравнения скорость газа на стенке, отнесенную к удвоенной скорости пластины, $\langle v_z(^1/_2)\rangle / w$. Результаты расчета этой величины для максвелловских, твердых сферических молекул и эллипсоидальной статистической модели приведены соответственно в столбцах 1, 2, 3 табл. 2 и сопоставлены с численным решением для модели БГК [3]. При $K \leqslant 1 (\delta \geqslant 1)$ решения методом моментов для различных моделей хорошо согласуются как между собой, так и с решением интегральными методами. Однако при $K \gg 1$ $(\delta \ll 1)$ согласие отсутствует и результаты для различных моделей отличаются на десятки и даже сотни процентов.

В табл. 3 приведены результаты, полученные методами моментов (колонка 1) и дискретных ординат [4] для твердых сферических молекул. Если при $K \leqslant 1$ оба решения хорошо согласутся, то при возрастании числа Кнудсена относительное отклонение возрастает и становится постоянным при $K \geqslant 16$. Таким образом, решение методом дискретных ординат при $K \gg 1$ $(\delta \ll 1)$ ведет себя так же, как и решение методом моментов, а именно используя (1)

Таблица 3

K	1	[4]
256	$3.2681 \cdot 10^{-3}$	$4.4068 \cdot 10^{-3}$
128	$6.4691 \cdot 10^{-3}$	$8.6870 \cdot 10^{-3}$
64	$1.2678 \cdot 10^{-2}$	$1.6890 \cdot 10^{-2}$
32	$2.4373 \cdot 10^{-2}$	$3.2002 \cdot 10^{-2}$
16	$4.3406 \cdot 10^{-2}$	$5.7933 \cdot 10^{-2}$
8	$7.9082 \cdot 10^{-2}$	$9.7485 \cdot 10^{-2}$
4	$1.2653 \cdot 10^{-1}$	$1.4812 \cdot 10^{-1}$
2	$1.8265 \cdot 10^{-1}$	$2.0048 \cdot 10^{-1}$
1	$2.4328 \cdot 10^{-1}$	$2.5478 \cdot 10^{-1}$
0.5	$3.0870 \cdot 10^{-1}$	$3.0763 \cdot 10^{-1}$
0.25	$3.7170 \cdot 10^{-1}$	$3.9819 \cdot 10^{-1}$

$$\langle v_z(^1/_2)\rangle / w \sim \delta \qquad (2)$$

В то же время из решения интегральными методами для модели БГК следует

$$\langle v_z(^1/_2)\rangle / w \sim (-\delta \ln \delta) \qquad (3)$$

т. е. решения как методом моментов (1), так и методом дискретных ординат не описывают корректно почти свободномолекулярный режим.

Получение моментных решений в приближениях выше третьего даже для статистических моделей сопряжено с большими математическими трудностями. Поэтому можно заключить, что диапазон применимости решений методом моментов ограничен числами Кнудсена $K \leqslant 1$. При этом на результатах практически не сказывается выбор модели.

Поступило 9 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Gross E. P., Ziering S. Kinetic theory of linear shear flow. Phys. Fluids, 1958, vol. 1. No. 3. «Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1959, No. 6.)

2. Ziering S. Shear and heat flow for Maxwellian molecules. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, No. 4.

3. Willis D. R. Comparison of kinetic theory analyses of linearized Coutte flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1963, No. 2.)

4. Hamel B., Wachman M. A discrete ordinate technique for the linearized Boltzmann equation with application to Coutte flow. Rarified Gas Dynamics, vol. 1 (Proc. 4-th Sympos. on Rarefied Gas Dynamics, Toronto, 1964), N. Y., Acad. Press, 1965, No. 1. (Рус. перев.: Вычислительные методы в динамике разреженных газов. М., «Мир», 1969.)

5. Holway L. H. New statistical models for kinetic theory: methods of construction. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 9. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1967, № 6.)

6. Породнов Б. Т., Суетин П. Е. Течение разреженного газа мéжду двумя параллельными плоскостями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.

7. Породнов Б. Т., Суетин П. Е. Плоское течение максвелловского газа. Ж. техн. физ., 1969, т. 39, № 4.