

3. Генин Л. Г., Жилин В. Г. Влияние продольного магнитного поля на коэффициент сопротивления при течении ртути в круглой трубе. Теплофизика высоких температур, 1966, т. 4, № 2.
4. Левин В. Б., Чиненков И. А. Экспериментальное исследование турбулентного течения электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1966, № 4.
5. Генин Л. Г., Жилин В. Г., Петухов Б. С. Экспериментальное исследование турбулентного течения ртути в круглой трубе в продольном магнитном поле. Теплофизика высоких температур, 1967, т. 5, № 2.
6. Graim F. W., Heiser W. H. The effect of a strong longitudinal magnetic field on the flow of mercury in a circular tube. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt 2, p. 397.
7. Шиллер Л. Движение жидкости в трубах. М.—Л., Главн. ред. общ.-техн. лит-ры и номографии, 1936.
8. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1948, т. 1.
9. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика, т. 2. М.—Л., Главн. ред. общ.-техн. лит-ры и номографии, 1935, т. 11.
10. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М., Гостехиздат, 1951.
11. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА И СКОРОСТИ СКОЛЬЖЕНИЯ ДЛЯ МОЛЕКУЛ В ВИДЕ ТВЕРДЫХ СФЕР

Ю. И. ХЛОПКОВ

(Москва)

Проводится решение уравнения Больцмана методом Монте-Карло для задач динамики разреженного газа в линейной постановке. Решены задачи по вычислению коэффициентов переноса и скорости скольжения на твердой стенке для молекул в виде твердых сфер. Проводится исследование точности метода от различных параметров схемы счета на решении задачи по вычислению коэффициентов переноса для псевдомаксвелловских молекул.

Кинетическое уравнение Больцмана представляет собой сложное интегро-дифференциальное уравнение, которое очень трудно решать и анализировать. Поэтому решение даже одномерных задач и для линеаризованного уравнения Больцмана оказывается весьма трудным и подобные задачи решаются приближенными методами (разложение по числам Кнудсена, метод моментов, разложение в ряды и т. д. [1]). В работе [2] предложен способ решения линеаризованного уравнения Больцмана методом Монте-Карло. Этим методом было получено точное решение ряда задач динамики разреженного газа [3, 4]. Однако метод применялся для псевдомаксвелловских молекул, для которых сечение столкновения обратно пропорционально относительной скорости сталкивающихся частиц $\sigma = \sigma_0/g$.

1. Описание метода. Рассмотрим слабозмущенное течение. В этом случае функция распределения f мало отличается от некоторой характерной максвелловской функции распределения, т. е.

$$f = f_0(1 + \varphi), \quad f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp \frac{-m\xi^2}{2kT_0} \quad (1.1)$$

Здесь m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, ξ — скорость молекулы, φ — малая добавка, квадратом которой можно пренебречь. Процесс переноса можно рассматривать как однородную цепь Маркова, звеньями которой являются положения частиц непосредственно перед столкновениями. Поскольку имеем дело с малыми добавками к функции распределения и ее моментам, то статистические ошибки могут быть порядка искомого величин. Поэтому будем разыгрывать блуждание пробной молекулы на равновесной функции распределения f_0 и из полного переноса вычитать перенос, совершаемый на абсолютном максвелловском распределении. В этом случае средний перенос некоторого молекулярного признака A через какую-либо плоскость равен

$$\Psi = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right) \sum_{\beta(\alpha)} A_{\alpha\beta} \quad (1.2)$$

Здесь N — число траекторий, W и W_0 — вероятности пролета частицы по траектории α соответственно для возмущенного и невозмущенного течений, $\beta(\alpha)$ — число пересечений траекторией α данной плоскости.

Блуждание молекулы происходит следующим образом.

1°. На одной из границ разыгрываются скорости влетающей молекулы с плотностью вероятности $f_{00}(\xi)$ (ξ_n).

2°. Пролет времени τ без столкновений и столкновение в элементе $d\tau$ разыгрывается с вероятностью

$$\exp \left\{ - \int \left[\int f_{00} g \sigma d\xi_1 \right] d\tau \right\} d\tau \int f_{00} g \sigma d\xi_1$$

3°. Скорость молекулы партнера разыгрывается с плотностью вероятности $g f_{00}(\xi_1)$.

4°. Столкновение разыгрывается по закону взаимодействия данных молекул и т. д., начиная с п. 2°, пока молекула не покинет область течения.

Отношение W/W_0 находится по формуле

$$\frac{W}{W_0} = \frac{F_w}{F_{w_0}} \frac{P}{P_0} \frac{F}{F_0} \frac{Q}{Q_0} \dots \quad (1.3)$$

Здесь F_w, F_{w_0} — вероятности вылета молекулы с границы соответственно для возмущенного и невозмущенного течений; P и P_0 — вероятности свободного пролета времени τ ; F и F_0 — вероятности столкновения в элементе $d\tau$ с молекулой, летящей со скоростью ξ_1 ; Q и Q_0 — вероятности столкновения с данным прицельным расстоянием.

Задача решается методом последовательных приближений. Пусть $\varphi^{(n)}$ — значения φ в приближении n .

Счет ведется до тех пор, пока $\varphi^{(n)} = \varphi^{(n+1)}$ с заданной точностью. За начальное приближение можно взять любую функцию, например нуль.

2. Вычисление коэффициентов переноса. Для псевдомаквелловских молекул, сечение столкновения которых обратно пропорционально относительной скорости, частота столкновений не зависит от скорости частиц, а вероятная скорость молекулы сталкивающейся с пробной, пропорциональна функции распределения молекул в данной точке физического пространства. Для этих молекул выражение (1.3) существенно упрощается и для них было проведено исследование на установление, сходимость и точность метода. Исследование проводилось на решении задачи о вычислении коэффициентов переноса, поскольку здесь имеется теоретическое точное решение.

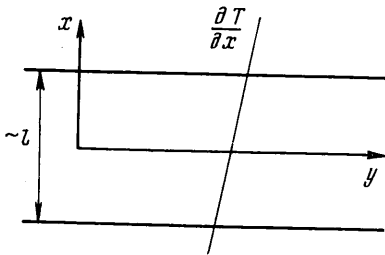
Задача ставилась следующим образом [2]. Пусть имеем бесконечную область течения с заданными в этой области градиентами скорости и температуры. Градиенты должны удовлетворять условию, что на расстоянии длины свободного пробега массовая скорость и температура меняются незначительно.

Вырежем из области течения слой толщиной $d \sim l$ и введем оси координат, как показано на фиг. 1, где l — длина свободного пробега. По формуле (1.2) вычисляются потоки импульса и энергии через плоскость $x = 0$, и по известным формулам

$$p_{xy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.1)$$

находятся коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ .

Точность счета зависит от числа разыгранных траекторий, от числа ячеек по скоростям и от длины скоростных осей. Рядом математических экспериментов было найдено, что при вычислении потока вязкости нужно брать оси длиной 2.5 тепловых скоростей.



Фиг. 1

Длина ребра скоростной ячейки	Ошибка вязкости, %	Ошибка теплопередачи, %
0.2 $\sqrt{h_0}$	1.5—2	1.5—2
0.4 $\sqrt{h_0}$	2—2.5	2.5
0.5 $\sqrt{h_0}$	2.5—3	3
0.8 $\sqrt{h_0}$	5	8—10

Дальнейшее увеличение осей никак не сказывается на точности результатов. Для теплопередачи необходимо обрезание до 2.8 тепловых скоростей, что объясняется тем, что теплопередача является моментом более высокого порядка.

В таблице представлена зависимость точности получаемых результатов от длины ребра скоростной ячейки, другими словами, от объема потребляемой памяти вычислительной машины.

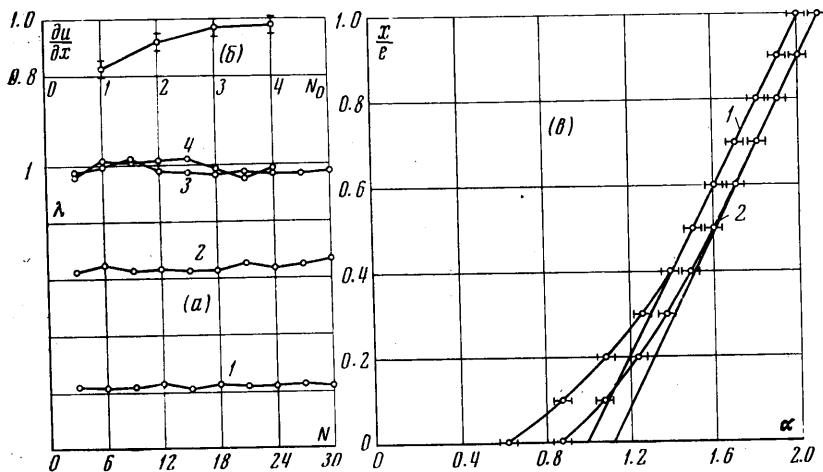
Ухудшение точности в случае теплопередачи также можно объяснить тем, что q_x является моментом более высокого порядка по отношению к R_{xy} .

$$h_0 = \frac{m}{2kT_0}$$

Результаты исследования схемы счета для псевдомаксвелловских молекул были перенесены на модель молекул в виде твердых сфер. В этом случае расчет существенно усложняется. В (1.3) при вычислении вероятности свободного пролета для каждой траектории необходимо численно интегрировать выражение

$$K(\xi) = \int_1 f_{00}(\xi_1) \varphi(\xi_1) g d\xi_1, \quad g = |\xi - \xi_1|$$

по всем скоростным ячейкам. Для уменьшения времени счета интегралы $K(\xi)$ вычисляются заранее перед началом следующего приближения и розыгрыш траекторий происходит при известных значениях $K(\xi)$.

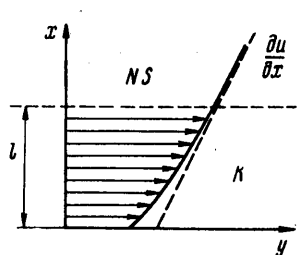


Фиг. 2

Таким образом были решены задачи по вычислению коэффициентов вязкости μ и теплопроводности λ . В начальном приближении добавка к функции распределения полагалась в одном случае равной добавке навье — стоковского распределения, а в другом равной нулю. В обоих случаях получили один и тот же результат. На фиг. 2, а представлена зависимость коэффициента теплопередачи λ , отнесенного к его теоретическому значению, от количества траектории N в тысячах. Цифры 1, 2, 3, 4 на фиг. 2, а — номера последовательного приближения. Учитывая результаты, полученные в работе [2], можно сделать вывод, что метод применим для вычисления коэффициентов переноса для молекул с любыми потенциалами взаимодействия.

3. Вычисление скорости скольжения. Рассмотрим течение газа, находящегося над твердой плоской стенкой при наличии градиента массовой скорости, который вдали от стенки принимается постоянным. Выберем систему координат, так чтобы начало находилось на стенке, ось x была направлена по нормали к стенке, а ось y — вдоль поверхности, как это показано на фиг. 3, где NS — область Навье — Стокса, K — слой Кнудсена; поведение газа описывается статистической функцией распределения $f(x, \xi)$.

Целью данной работы является установление таких фиктивных макроскопических граничных условий для уравнений Навье — Стокса на твердой стенке, при выполнении которых решение уравнений Навье — Стокса вне кнудсеновского слоя совпадало бы (с точностью навье-стоксовского приближения) с решением уравнения Больцмана с заданными истинными кинетическими условиями на стенке. Для простоты примем на поверхности тела для молекул, летящих вверх диффузный закон



Фиг. 3

отражения

$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp \frac{-m\xi^2}{2kT_0} \quad (3.1)$$

На бесконечности (практически на расстояниях длины свободного пробега) задается навье-стоксовская функция распределения

$$f = f_0 \left[1 + \frac{p_{xy}}{2\rho} \frac{m}{kT} c_x c_y \right], \quad f_0 = f_{00} [1 + 2c_y u(x) h_0],$$

$$c = \xi - u, \quad p_{xy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad h_0 = \frac{m}{2kT_0} \quad (3.2)$$

Внутри кнудсеновского слоя функция распределения имеет вид

$$f = f_{00} [1 + 2h_0 \xi_y u(x) + \varphi(x, \xi_x, \xi_y)] \quad (3.3)$$

Как видно из (3.2), в верхнее граничное условие входит значение массовой скорости u , величину которой в первом приближении можно задавать произвольно. Здесь использовался удобный алгоритм нахождения массовой скорости на верхней границе. Разобьем поле течения на слои. Предполагая, что вблизи верхней границы профиль скорости выходит на заданный навье-стоксовский градиент $(\partial u / \partial x)_{\infty}$, зададим массовую скорость на верхней границе по формуле

$$u_n^{(v)} = u_{n-1}^{(v-1)} + (\partial u / \partial x)_{\infty} \Delta x$$

где n — номер слоя на верхней границе, Δx — толщина слоя, v — номер приближения.

На фиг. 2, б представлена зависимость градиента массовой скорости на верхней границе $\partial u / \partial x$, отнесенного к его значению на бесконечности, от номера последовательного приближения N_0 .

На фиг. 2, в показаны профили безразмерной скорости α . Цифрой 1 обозначен профиль скорости для псевдомаксвелловских молекул, взятый из работы [3] (коэффициент скольжения равен 1.015), цифрой 2 обозначен профиль скорости для твердых сфер, полученный в данной работе (коэффициент скольжения равен 1.103). Здесь $\alpha = u(l \partial u / \partial x)^{-1}$, где l — толщина слоя Кнудсена. Как известно, максвелловские молекулы и твердые сферы представляют собой два крайних случая потенциалов взаимодействия молекул. Поэтому естественно предположить, что результаты для молекул со всеми другими потенциалами взаимодействия будут находиться в промежуточной области между полученными значениями.

В заключение автор благодарит М. Н. Когана за постановку задачи и большую помощь, оказанную в процессе работы, а также В. И. Власова, С. Л. Горелова и В. А. Передухова за помощь при составлении программы.

Поступило 24 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. Власов В. И., Горелов С. Л., Коган М. Н. Математический эксперимент для вычисления коэффициентов переноса. Докл. АН СССР, 1968, т. 176, № 6.
3. Горелов С. Л., Коган М. Н. Решение линейных задач динамики разреженного газа методом Монте-Карло. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
4. Горелов С. Л., Коган М. Н. Решение задачи о скачке температуры (течение в слое Кнудсена) и линейной задачи о передаче тепла между двумя параллельными пластинами в разреженном газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.

ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА ДЛЯ ТРЕХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ МОДЕЛЕЙ

С. Г. СКАКУН, П. Е. СУЕТИН, В. Г. ЧЕРНЯК

(Свердловск)

Получено решение задачи о плоском изотермическом течении Куэтта в третьем приближении метода полупространственных моментов для максвелловских молекул, твердых сферических молекул и эллипсоидальной статистической модели. Результаты расчета сопоставлены с решением Виллиса для модели БГК и решением методом дискретных ординат для твердых сферических молекул, причем обнаружено качественное совпадение решений методами дискретных ординат и моментов. Сделан вывод о диапазоне применимости решения методом моментов в третьем приближении для различных моделей.