№ 2 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1971

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВЗВЕСЕНЕСУЩЕГО ПОТОКА

К. Г. АСАТУР

(*Ленинград*)

Дан вывод дифференциальных уравнений взвесенесущего потока с помощью последовательно выполненных пространственного и временного осреднений, что является обобщением пространственно-временного осреднения, примененного для этих же уравнений Ф. И. Франклем. В результате в уравнениях выделился тензор напряжений, учитывающий хаотичность мгновенного распределения динамических характеристик потока в пространстве.

Подобный тензор отдельно может входить в общем случае и в уравнения Рейнольдса для однофазного турбулентного потока, однако в уравнениях многофазного потока разделение напряжений позволяет дополнительно учесть пульсации концентраций.

Из дифференциальных уравнений взвесенесущих потоков наиболее строго выведенными в настоящее время считаются уравнения Ф. И. Франкля, метод которого состоит в применении обобщенного пространственно-временного осреднения величин при помощи разрывной функции [1].

В работе [2] было отмечено, что в этих уравнениях отсутствуют величины мгновенной концентрации, отклонения которых от средней относятся по типу к пульсациям, обычно входящим в моменты корреляции. Ниже этот вопрос рассматривается подробно.

Пусть для N-фазного потока ρ_m — плотность m-й фазы; S_m — функция, равная единице внутри m-й фазы и равная нулю вне ее; ξ_i, x_i — координаты пространства; τ, t — время соответственно до и после осреднения; индексы $i = 1, 2, 3$ и $k = 1, 2, 3$ определяют компоненты векторов и тензоров по осям координат.

Выделим внутри потока произвольный объем ω, ограниченный поверхностью σ, и напишем для отдельной m-й фазы в нем мгновенные уравнения неразрывности и динамики.

В силу условия сплошности

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\iiint\limits_{\omega}\rho_m(\xi_i,\tau)s_m(\xi_i,\tau)\,d\omega = -\iint\limits_{\sigma}\rho_m(\xi_i,\tau)s_m(\xi_i,\tau)v_n(\xi_i,\tau)\,d\sigma \qquad (1)$$

$$(i = 1,2,3)$$

где v_n — проекция скорости v на направление внешней нормали.

Теорема о количестве движения в проекциях ($i = 1, 2, 3$) дает

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\iiint\limits_{\omega}\rho_m(\xi_i,\tau)s_m(\xi_i,\tau)v_i(\xi_i,\tau)\,d\omega =$$

$$= -\iint\limits_{\sigma}\rho_m(\xi_i,\tau)s_m(\xi_i,\tau)v_i(\xi_i,\tau)v_n(\xi_i,\tau)\,d\sigma - \qquad (2)$$

$$-\iint\limits_{\sigma_m}p_{in}(\xi_i,\tau)\,d\sigma + \iiint\limits_{\omega}\rho_m(\xi_i,\tau)s_m(\xi_i,\tau)F_i(\xi_i,\tau)\,d\omega$$

Здесь $\mathbf{F}$ — ускорение массовых сил; p_{in} — проекция i тензора напряжений p_{ik} для площадки $\mathbf{n}$ внешней поверхности; σ_m — поверхность, ограничивающая область ω_m, которая занята m-й фазой, внутри объема ω.

Просуммируем выражения (1) и (2) по всем фазам.

Заметим, что компоненты тензора p_{ik} на поверхностях раздела фаз всегда равны; поэтому при суммировании эти поверхности исключатся из уравнений и останется лишь поверхность σ, ограничивающая весь объем ω

$$\sum_{m=1}^{N} \iint_{\sigma_m} p_{in}(\xi_i, \tau)\, d\sigma = \iint_{\sigma} p_{in}(\xi_i, \tau)\, d\sigma \tag{3}$$

Таким образом, после суммирования получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_{\omega} \sum_{m=1}^{N} [\rho_m(\xi_i, \tau) s_m(\xi_i \tau)]\, d\omega = \tag{4}$$

$$= - \int_{\sigma}\int \sum_{m=1}^{N} [\rho_m(\xi_i, \tau) s_m(\xi_i, \tau) v_n(\xi_i, \tau)]\, d\sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \iiint_{\omega} \sum_{m=1}^{N} [\rho_m(\xi_i, \tau) s_m(\xi_i, \tau) v_i(\xi_i, \tau)]\, d\omega =$$

$$= - \iint_{\sigma} \sum_{m=1}^{N} [\rho_m(\xi_i, \tau) s_m(\xi_i, \tau) v_i(\xi_i, \tau) v_n(\xi_i, \tau)]\, d\sigma + \iint_{\sigma} p_{in}(\xi_i, \tau)\, d\sigma +$$

$$+ \iiint_{\omega} \sum_{m=1}^{N} [\rho_m(\xi_i, \tau) s_m(\xi_i, \tau) F_i(\xi_i, \tau)]\, d\omega \tag{5}$$

Определим операции осреднения в (4) и (5). Для этого следуя Ф. И. Франклю, вокруг каждой точки четырехмерного мира (x_i, t), с центром в ней, выделим раз и навсегда заданные объем V (шар с радиусом r) и время T, определяющиеся соображениями сглаживания функций в гидромеханике, задав их условиями

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 < r^2, \quad \theta < {}^1/_2 T$$

где ниже в уравнениях (4) и (5) можно будет сделать подстановку

$$\xi_i = x_i + \chi_i \quad (\chi_i = \text{const}), \qquad \tau = t + \theta \quad (\theta = \text{const}) \tag{6}$$

Введем теперь мгновенное по объему осреднение

$$\langle f \rangle = \langle f(x_i, \tau) \rangle = \frac{1}{V} \iiint_{V} f(\xi_i, \tau)\, dV = \frac{1}{V} \iiint_{V} f(x_i + \chi_i, \tau)\, d\chi_1\, d\chi_2\, d\chi_3$$

$$f(\xi_i, \tau) = \langle f(x_i, \tau) \rangle + f'(x_i, \chi_i, \tau) \tag{7}$$

В частности

$$\langle s_m(x_i, \tau) \rangle = \frac{1}{V} \iiint_{V} s_m(\xi_i, \tau)\, dV, \quad s_m(\xi_i, \tau) = \langle s_m(\xi_i, \tau) \rangle + s_m',$$

$$s_m' = 1 - \langle s_m \rangle = \text{const внутри } m\text{-й фазы.}$$

$$s_m' = 0 - \langle s_m \rangle = \text{const вне } m\text{-й фазы}$$

будет представлять собой мгновенную объемную концентрацию m-й фазы, а функция f^*, определяющаяся условием

$$\langle s_m \rangle f^* = \langle s_m \rangle f^*(x_i, \tau) = \langle f s_m \rangle = \frac{1}{V} \iiint_{V} f(\xi_i, \tau) s_m(\xi_i, \tau)\, dV \tag{8}$$

будет давать мгновенное значение функции $f(\xi_i, \tau)$, осредненное в объеме, который занимает m-я фаза внутри объема V.

Далее осредненные по объему функции последовательно осредним (внешний значок $\langle\rangle$) по времени

$$\langle\langle f\rangle\rangle = \langle\langle f(x_i, t)\rangle\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_T \langle f(x_i, \tau)\rangle\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{TV}\int\limits_T \iiint\limits_V f(x_i + \chi_i, t + \theta)\, d\chi_1\, d\chi_2\, d\chi_3\, d\theta$$

$$\langle f(x_i, \tau)\rangle = \langle\langle f(x_i, t)\rangle\rangle + \langle f(x_i, t, \theta)\rangle' \tag{9}$$

и аналогично

$$\langle f^*\rangle = \langle f^*(x_i, t)\rangle, \quad \text{и} \quad f^{*\prime} = f^{*\prime}(x_i, t, \theta)$$

Вследствие постоянства границ интегрирования в (9) по объему V и времени T при осреднении уравнений (4) и (5) могут быть сделаны соответствующие перестановки операций — прежде всего может быть выполнено интегрирование по V, T.

Тогда, принимая во внимание (6), (9), уравнения (4), (5) можно после осреднения привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_\omega \sum_{m=1}^{N} \langle\langle \rho_m s_m\rangle\rangle\, d\omega = -\iint\limits_\sigma \sum_{m=1}^{N} \langle\langle \rho_m s_m v_n\rangle\rangle\, d\sigma \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_\omega \sum_{m=1}^{N} \langle\langle \rho_m s_m v_i\rangle\rangle\, d\omega = -\iint\limits_\sigma \sum_{m=1}^{N} \langle\langle \rho_m s_m v_i v_n\rangle\rangle\, d\sigma - \tag{11}$$

$$-\iint\limits_\sigma \langle\langle p_{in}\rangle\rangle d\sigma + \iiint\limits_\omega \sum_{m=1}^{N} \langle\langle \rho_m s_m F_i\rangle\rangle d\omega \quad (i=1, 2, 3)$$

Сглаженные функции в (10) и (11) непрерывны и дифференцируемы по x и t; производная функции по произвольному направлению с ортом $\mathbf{b}$ в пространстве x_i есть скалярное произведение

$$\frac{\partial\langle\langle f\rangle\rangle}{\partial b} = \mathbf{b}\cdot\operatorname{grad}\langle\langle f\rangle\rangle = \mathbf{b}\cdot\frac{1}{VT}\iint\limits_S \int\limits_T f(x_i + \chi_i, t + \theta)\mathbf{n}\, dS\, d\theta \tag{12}$$

Здесь S — поверхность, ограничивающая объем V, $\mathbf{n}$ — орт нормали поверхности S.

Производная по времени

$$\frac{\partial\langle\langle f\rangle\rangle}{\partial t} = \frac{1}{VT}\iiint\limits_V \left[f\left(x_i + \chi_i, t + \frac{1}{2}T\right) - f\left(x_i + \chi_i, t - \frac{1}{2}T\right)\right] dV \tag{13}$$

Тогда можно в левых частях (10) и (11) переставить операции дифференцирования и интегрирования, а в правых частях (10) и (11) преобразовать первый член по теореме М. В. Остроградского и по аналогичной теореме для тензорного поля второй член правой части (11). После этого получим

$$\iiint\limits_\omega \left[\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial}{\partial t}\langle\langle \rho_m s_m\rangle\rangle + \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle \rho_m s_m v_k\rangle\rangle\right] d\omega \tag{14}$$

$$\iiint\limits_{\omega}\Big[\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial}{\partial t}\langle\!\langle\rho_m s_m v_i\rangle\!\rangle+\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle\rho_m s_m v_k v_i\rangle\!\rangle+ \tag{15}$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\langle\!\langle p_{ik}\rangle\!\rangle}{\partial x_k}-\sum_{m=1}^{N}\langle\!\langle\rho_m s_m F_i\rangle\!\rangle\Big]d\omega \qquad (i=1,2,3)$$

Учитывая произвольность объема для (14), (15) и применяя в обозначениях правило суммирования по повторяющимся значкам, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\!\langle\rho_m s_m\rangle\!\rangle+\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle\rho_m s_m v_k\rangle\!\rangle=0 \qquad (m=1,2,\ldots,N;\ k=1,2,3), \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\!\langle\rho_m s_m v_i\rangle\!\rangle+\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle\rho_m s_m v_k v_i\rangle\!\rangle+\frac{\partial\langle\!\langle p_{ik}\rangle\!\rangle}{\partial x_k}-\langle\!\langle\rho_m s_m F_i\rangle\!\rangle=0$$

$$(m=1,2,\ldots,N,\ k=1,2,3), \qquad (i=1,2,3) \tag{17}$$

Ограничимся ниже обычно рассматриваемым случаем потока, для которого $\rho_m=\mathrm{const}$ $(m=1,2,\ldots,N)$; развернув операцию осреднения в (16) и (17) сначала по пространству и учитывая (8), получаем

$$\rho_m\frac{\partial}{\partial t}\langle\!\langle s_m\rangle\!\rangle+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle v_k^*\rangle=0 \tag{18}$$

$$\rho_m\frac{\partial}{\partial t}\langle\!\langle s_m\rangle v_i^*\rangle+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle v_k^* v_i^*\rangle+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle(v_i' v_k')^*\rangle+$$

$$+\frac{\partial\langle\!\langle p_{ik}\rangle\!\rangle}{\partial x_k}-\rho_m\langle\!\langle s_m\rangle F_i^*\rangle=0 \tag{19}$$

Здесь по известной теореме из механики v_i^*, v_k^* — проекции мгновенной скорости центра инерции m-й фазы внутри объема V, а v_i', v_k' — соответственно проекции скоростей относительно этого центра.

Развернув далее осреднение по времени, получим окончательные четыре уравнения

$$\rho_m\frac{\partial\langle\!\langle s_m\rangle\!\rangle}{\partial t}+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle\!\rangle\langle v_k^*\rangle+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle' v_k^{*\prime}\rangle=0 \tag{20}$$

$$\rho_m\frac{\partial}{\partial t}\langle\!\langle s_m\rangle\!\rangle\langle v_i^*\rangle+\rho_m\frac{\partial}{\partial t}\langle\!\langle s_m\rangle' v_i^{*\prime}\rangle+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle\!\rangle\langle v_k^*\rangle\langle v_i^*\rangle+$$

$$+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle\!\rangle\langle v_k^{*\prime} v_i^{*\prime}\rangle+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle' v_k^{*\prime}\rangle\langle v_i^*\rangle+$$

$$+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle' v_i^{*\prime}\rangle\langle v_k^*\rangle+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle' v_k^{*\prime} v_i^{*\prime}\rangle+$$

$$+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m'\rangle\!\rangle\langle(v_i' v_k')^*\rangle+\rho_m\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\!\langle s_m\rangle'(v_i' v_k')^{*\prime}\rangle+$$

$$+\frac{\partial\langle\!\langle p_{ik}\rangle\!\rangle}{\partial x_k}-\rho_m\langle\!\langle s_m\rangle\!\rangle\langle F_i^*\rangle-\rho_m\langle\!\langle s_m\rangle' F_i^{*\prime}\rangle=0 \tag{21}$$

$$(i=1,2,3), \qquad (m=1,2,\ldots,N;\ k=1,2,3)$$

Здесь $\langle f\rangle' = \langle f(x_i, t, \theta)\rangle'$; $f^{*\prime} = f^{*\prime}(x_i, t, \theta)$ — пульсации, т. е. отклонения от величин, осредненных в пространстве.

Чтобы получить уравнения для отдельной фазы, обратимся снова к зависимостям (1), (2).

Заметим, что если внутри фазы тензор p_{ik} непрерывен, то второй интеграл правой части (2) путем введения дивергенции тензора может быть преобразован из поверхностного в объемный, аналогично тому как это сделано в (11), и с использованием свойств функции s_m представлен в виде

$$\iint\limits_{\sigma_m} p_{in}\, d\sigma = \iiint\limits_{\omega_m} \frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik}\, d\omega = \iiint\limits_{\omega} s_m \frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik}\, d\omega \tag{22}$$

Далее опуская за ненадобностью значки m в уравнениях (1), (2), поскольку суммирование производиться не будет, а также у средних величин и применяя к (1), (2) все остальные проделанные выше операции, получаем вместо (16) и (17)

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle \rho s\rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle \rho s v_k\rangle\rangle = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle \rho s v_i\rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle \rho s v_k v_i\rangle\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s p_{ik}\rangle\rangle + \langle\langle \rho s F_i\rangle\rangle = 0 \tag{24}$$

Ограничиваясь аналогично принятому выше случаем $\rho = \text{const}$ и развертывая операции осреднения, получаем сначала

$$\frac{\partial\langle\langle s\rangle\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle\, v_k^*\rangle = 0 \tag{25}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle s\rangle\, v_i^*\rangle + \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle\, v_k^*\, v_i^*\rangle + \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle (v_k' v_i')^*\rangle +$$
$$+ \langle\langle s\rangle\rangle\frac{\partial}{\partial x_k}\langle p_{ik}^*\rangle - \rho\,\langle\langle s\rangle\, F_i^*\rangle = 0 \tag{26}$$

а затем

$$\frac{\partial\langle\langle s\rangle\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle\rangle\langle v_k^*\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle'\, v_k^{*\prime}\rangle = 0 \tag{27}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle s\rangle\rangle\langle v_i^*\rangle + \rho\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle s\rangle'\, v_i^{*\prime}\rangle + \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle\rangle\langle v_k^*\rangle\langle v_i^*\rangle +$$
$$+ \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle\rangle\langle v_k^{*\prime}\, v_i^{*\prime}\rangle + \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle'\, v_k^{*\prime}\rangle\langle v_i^*\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle'\, v_i^{*\prime}\rangle\langle v_k^*\rangle +$$
$$+ \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle'\, v_k^{*\prime}\, v_i^{*\prime}\rangle + \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle\rangle\langle (v_k' v_i')^*\rangle + \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\langle s\rangle'(v_k' v_i']^{*\prime}\rangle +$$
$$+ \langle\langle s\rangle\rangle\frac{\partial}{\partial x_k}\langle p_{ik}^*\rangle + \langle\langle s\rangle'\frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik}^{*\prime}\rangle - \rho\,\langle\langle s\rangle\rangle\langle F_i^*\rangle - \rho\,\langle\langle s\rangle'\, F^{*\prime}\rangle = 0 \tag{28}$$

$(i = 1, 2, 3), \qquad (k = 1, 2, 3)$

Анализируя окончательно полученные уравнения (20), (21) для смеси и (27), (28) для отдельной фазы, можно отметить следующее.

Последний член в (20), (27) связан с процессом диффузии массы [2].

Физический смысл членов (28), содержащих $\langle P_{ik}^*\rangle$, p_{ik}^*, был истолкован в [1], где тензор p_{ik} считался при выводе непрерывным.

В (28)

$$\Pi = \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \langle\langle s \rangle\rangle \langle v_k^{*\prime} v_i^{*\prime} \rangle + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \langle\langle s \rangle' v_k^{*\prime} \rangle \langle v_i^* \rangle + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \langle\langle s \rangle' v_i^{*\prime} \rangle \langle v_k^* \rangle +$$

$$+ \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \langle\langle s \rangle' v_k^{*\prime} v_i^{*\prime} \rangle + \rho \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle s \rangle' v_i^{*\prime} \rangle = 0 \qquad (29)$$

и аналогичное выражение в (21) представляют собой тензор добавочных напряжений — результат хаотического движения при турбулентном режиме, причем последний член появляется лишь при нестационарности осредненного движения фазы или смеси.

Все члены выражения (29) были введены в [2], хотя и недостаточно обоснованно; в [1] введен только первый член, совпадающий при $s = \text{const} = 1$ с рейнольдсовыми напряжениями, поскольку остальные члены в (29) для однофазного потока равны нулю.

Новым в уравнениях (21) является тензор

$$\Pi_0 = \rho_m \frac{\partial}{\partial x_k} \langle\langle s_m \rangle\rangle \langle (v_k' v_i')^* \rangle + \rho_m \frac{\partial}{\partial x_k} \langle\langle s_m \rangle' (v_k' v_i')^{*\prime} \rangle \qquad (30)$$

Аналогичное выражение (без индексов m) в уравнении (28) получилось в [3] при дополнительном осреднении функций, не указанном Ф. И. Франклем.

Π_0 — добавочные напряжения типа тензора Π — результат пространственной разрывности и недифференцируемости функций, т. е. мгновенного хаотического распределения в пространстве динамических характеристик, определяющих течение многофазной среды. Тензор Π_0 в (21) и (28) остается и для однофазного турбулентного потока; при этом

$$\Pi_0 = \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \langle (v_k' v_i')^* \rangle \qquad (31)$$

Причина, по которой Π_0 не входит в рейнольдсовы уравнения объясняется тем, что при их выводе ограничиваются лишь временным осреднением, считая функции в пространстве не требующими сглаживания. Вместе с тем в случае применения совместного пространственно-временного осреднения тензоры Π и Π_0 объединяются в один, имеющий для однофазного потока вид рейнольдсовых напряжений, хотя в них, однако, пульсации являются уже пространственно временными, а не просто временными функциями, т. е. зависят от χ_i и θ, а не только от θ.

Для многофазного потока при таком объединении, выполненном Ф. И. Франклем, выпадает учет пульсации концентрации $\langle s' \rangle$.

Заметим, что тензор напряжений p_{ik} в (28) осреднен внутри фаз, а в (21) — в целом для смеси; связь между уравнениями для фаз и уравнениями для смеси осуществляется через уравнение (2) с учетом (3) и (22), причем для (21) условие непрерывности p_{ik}, вообще говоря, не требуется.

Операции осреднения в (16), (17), (23), (24) могут быть также развернуты с учетом пульсации плотности.

Поступило 17 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. К теории движения взвешенных наносов. Докл. АН СССР, 1953, т. 92, № 2.
2. Дюнин А. К., Борщевский Ю. Т., Яковлев Н. А. Основы механики многокомпонентных потоков. Новосибирск, 1965.
3. Фидман Б. А. Об уравнениях гидромеханики для многокомпонентной турбулентной среды. Изв. СО АН СССР, ОТН, 1965, вып. 1, № 2.