№ 2 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1971

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СТЕПЕННОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. СКРИПАЧЕВ

(*Киев*)

Исследуется устойчивость стационарного ламинарного пограничного слоя степенной неньютоновской жидкости на продольно обтекаемой полубесконечной пластине. Получена приближенная формула для оценки минимального числа Рейнольдса, при котором наступает потеря устойчивости течения по отношению к малым двумерным возмущениям. Приводятся результаты расчетов точки потери устойчивости для водных растворов карбоксилметилцеллюлозы.

1. Предположим, что стационарный плоский поток вязкой несжимаемой жидкости под действием малых двумерных возмущений переходит в некоторый нестационарный поток. Стационарное течение будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, будут ли эти возмущения с течением времени затухать или нарастать.

Представим гидродинамические параметры нестационарного течения в виде суммы величин стационарного потока и потока возмущений

$$U+u',\ V+v',\ P+p',\ \mu+\mu' \tag{1.1}$$

где U, V, P, μ — соответственно составляющие скорости по осям x и y, давление и динамическая вязкость стационарного потока, а u', v', p', μ' — соответствующие величины потока возмущений. Величины U, V, P, μ считаются зависящими только от координаты y прямоугольной системы координат, за которую в дальнейшем принимается система с началом на передней кромке пластины и осями x и y, направленными соответственно вдоль и перпендикулярно поверхности пластины.

Для вывода уравнений устойчивости используются уравнения механики сплошной среды в напряжениях и уравнение неразрывности, при этом компоненты тензора напряжений представляются в форме

$$\tau_{ij}=-\delta_{ij}P+2\mu e_{ij}\qquad (i,\ j=1,\ 2) \tag{1.2}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\quad u_1\equiv U,\ u_2\equiv V,\ x_1\equiv x,\ x_2\equiv y$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Вязкость μ считается переменной величиной[1], например функцией температуры, скоростей и их первых производных по координатам. Кроме того, далее будем предполагать, что $V=0$. Это равенство выполняется точно для одномерных течений и с известным приближением для течений в пограничном слое. Подставляя в упомянутые выше уравнения выражения (1.1) и (1.2) и производя линеаризацию после несложных преобразований, получаем

$$\rho\left(\frac{\partial\Omega'}{\partial t}+U\frac{\partial\Omega'}{\partial x}-v'\frac{d^2U}{\partial y^2}\right)-\mu\Delta\Omega'-2\frac{d\mu}{dy}\frac{\partial\Omega'}{\partial y}+$$

[1] В этом случае ее часто называют эффективной вязкостью [1].

$$+\frac{d^2\mu}{dy^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)+\frac{d^3U}{dy^3}\mu'+2\frac{d^2U}{dy^2}\frac{d\mu'}{dy}+\frac{dU}{dy}\left(\frac{\partial^2\mu'}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\mu'}{\partial x^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}=\Omega', \qquad \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0 \tag{1.3}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, Δ — оператор Лапласа. Введем функцию тока возмущающего течения в форме [2]

$$\psi'=\varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)}, \qquad u'=\frac{\partial\psi'}{\partial y}, \qquad v'=-\frac{\partial\psi'}{\partial x} \tag{1.4}$$

и положим

$$\mu'=f(y)e^{i\alpha(x-ct)} \tag{1.5}$$

предполагая, что берется действительная часть выражений (1.4) и (1.5). Подстановка (1.4) и (1.5) в (1.3) приводит к следующему уравнению, записанному в безразмерном виде

$$i\alpha R\left[(U-c)\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\alpha^2\varphi\right)-\frac{d^2U}{dy^2}\varphi\right]=\mu\left(\frac{d^4\varphi}{dy^4}-2\alpha^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\alpha^4\varphi\right)+$$

$$+2\frac{d\mu}{dy}\left(\frac{d^3\varphi}{dy^3}-\alpha^2\frac{d\varphi}{dy}\right)+\frac{d^2\mu}{dy^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\alpha^2\varphi\right)+\frac{d^3U}{dy^3}f+2\frac{d^2U}{dy^2}\frac{df}{dy}+$$

$$+\frac{dU}{dy}\left(\frac{d^2f}{dy^2}+\alpha^2 f\right) \qquad \left(R=\frac{\rho U_0 L}{\mu_0}\right) \tag{1.6}$$

Здесь R — число Рейнольдса; для безразмерных величин оставлены те же обозначения, что и для размерных. В качестве характерных величин приняты толщина[1] пограничного слоя $L=\delta$, вязкость μ_0, и скорость на внешней границе пограничного слоя U_0, совпадающая в случае продольного обтекания пластины со скоростью набегающего потока. В частном случае, когда возмущение вязкости не учитывается $(f=0)$, уравнение (1.6) превращается в уравнение (6) работы [3].

Граничные условия для уравнения (1.6)

$$\varphi=\frac{d\varphi}{dy}=0 \quad \text{при } y=0, \qquad \varphi=\frac{d\varphi}{dy}=0 \quad \text{при } y=\infty \tag{1.7}$$

выражают условия затухания возмущений на поверхности и вдали от нее.

2. Применим уравнение (1.6) для приближенного анализа устойчивости стационарного ламинарного пограничного слоя степенной неньютоновской жидкости на продольно обтекаемой полубесконечной пластине. В этом случае [1]

$$\mu=k(2e_{ij}e_{ji})^{(n-1)/2}\approx k\left(\frac{dU}{dy}\right)^{n-1} \qquad (i,j=1,2)$$

$$\mu_0=k\left(\frac{U_0}{\delta}\right)^{n-1}, \qquad \mu_0=\frac{\mu}{\mu_0}=\left(\frac{dU}{dy}\right)^{n-1} \tag{2.1}$$

$$f=(n-1)\left(\frac{dU}{dy}\right)^{n-2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\alpha^2\varphi\right)$$

$$\delta=\frac{\delta^*}{q}, \qquad \delta^*=r\left[\frac{n(1+n)k}{\rho}U_0^{n-2}x\right]^{1/(1+n)} \tag{2.2}$$

[1] В качестве толщины пограничного слоя принимается расстояние от поверхности, при котором безразмерная скорость в пограничном слое отличается от единицы на величину $\varepsilon_1\approx10^{-4}$ [1].

и уравнение (1.6) принимает вид [4]

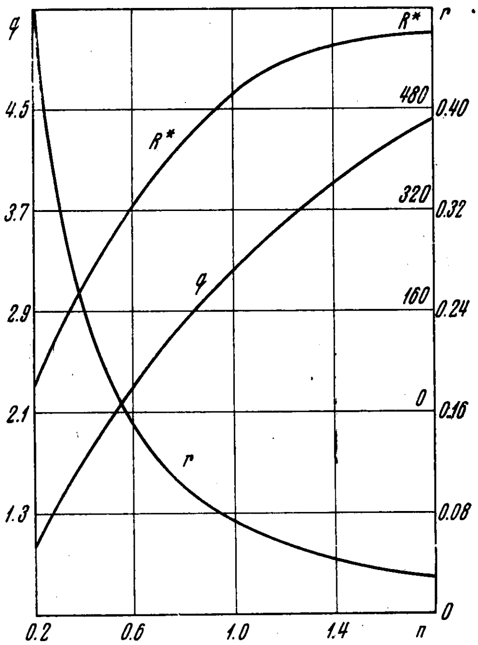
$$i\alpha R\left[(U-c)\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\alpha^2\varphi\right)-\frac{d^2U}{dy^2}\varphi\right]=\left(\frac{dU}{dy}\right)^{n-3}\left\{n\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\times\right.$$

$$\times\left(\frac{d^4\varphi}{dy^4}-2\alpha^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\alpha^4\varphi\right)+(n-1)\left[2n\frac{dU}{dy}\frac{d^2U}{dy^2}\frac{d^3\varphi}{dy^3}+\left[4\alpha^2\left(\frac{dU}{dy}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+n(n-2)\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)^2+n\frac{dU}{dy}\frac{d^3U}{dy^3}\right]\frac{d^2\varphi}{dy^2}+2(n-2)\alpha^2\frac{dU}{dy}\frac{d^2U}{dy^2}\frac{d\varphi}{dy}+$$

$$\left.\left.+\alpha^2 n\left[\frac{dU}{dy}\frac{d^3U}{dy^3}+(n-2)\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)^2\right]\varphi\right]\right\} \qquad (2.3)$$

Здесь k — мера консистенции, n — степень неньютоновского поведения жидкости. Значению $n>1$ соответствуют дилатантные вещества, а значению $n<1$ — псевдопластические вещества, к которым, в частности, относятся водные растворы высокополимеров. Зависимость q и r от величины n приведена на фигуре.



Для нахождения приближенного решения уравнения (2.3) применяется асимптотический метод [5]. Первая пара линейно независимых решений уравнения (2.3) разыскивается в форме

$$\varphi=\psi_0+\frac{1}{\alpha R}\psi_1+\ldots$$

Тогда для первого приближения ψ_0 получается уравнение

$$(U-c)\left(\frac{d^2\psi_0}{dy^2}-\alpha^2\psi_0\right)-\frac{d^2U}{dy^2}\psi_0=0 \qquad (2.4)$$

Линейную комбинацию двух независимых решений уравнения (2.4), удовлетворяющую условиям на бесконечности (1.7), обозначим через Φ. Вторая пара линейно независимых решений представляется в форме

$$\varphi=\varphi_0(\eta)+\varepsilon\varphi_1(\eta)+\cdots \qquad (2.5)$$

$$\eta=\frac{y-y_c}{\varepsilon},\qquad \varepsilon=\left[\frac{\alpha}{n}R\left(\frac{dU}{dy}\right)_c^{2-n}\right]^{-1/3}$$

$$\varphi_0=\int\limits_\infty^\eta d\eta\int\limits_\infty^\eta h_1(i\eta)\,d\eta,\qquad h_1(\eta)=\xi H_{1/3}^{(1)}(\xi),\qquad \xi=\frac{2}{3}\eta^{3/2}$$

Здесь $H_{1/3}^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода [5].

Индексом c отмечены значения величин, где $U=c$.

Таким образом приближенное решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условиям на бесконечности, записывается как

$$\varphi = c_1\Phi + c_2\varphi_0$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Граничные условия на поверхности пластины приводят к характеристическому уравнению, которое может быть представлено в виде

$$\frac{c\Phi'(0)}{c\Phi'(0)+U'(0)\Phi(0)} = F(z) \qquad \left(z = \frac{y_c}{\varepsilon}\right) \tag{2.6}$$

Здесь $F(z)$ — функция Линя [5]; штрихи обозначают дифференцирование по y. Поскольку уравнение (2.6) по форме ничем не отличается от соответствующего уравнения для пограничного слоя ньютоновской жидкости, то к нему применимы преобразования, аналогичные тем, которые выполнены в работе [6].

В результате этих несложных преобразований получим следующую приближенную формулу для оценки минимального числа Рейнольдса, при котором наступает потеря устойчивости течения в пограничном слое

$$R = 25nc^{-4}[U'(0)]^n \tag{2.7}$$

где c определяется из уравнения

$$cU'(0)U_c'' = -0.185(U_c')^3 \tag{2.8}$$

Следует отметить, что полученные формулы пригодны для оценки минимального числа Рейнольдса не только для безградиентных стационарных плоских ламинарных пограничных слоев степенной неньютоновской жидкости, но и для течений в пограничных слоях при наличии градиентов давления.

3. По формулам (2.7) и (2.8) с использованием данных работы [1] был произведен расчет минимальных чисел Рейнольдса $R^* = qR$ для стационарного ламинарного пограничного слоя степенной неньютоновской жидкости на полубесконечной пластине. Результаты расчетов представлены на фигуре. На основании этих результатов по формуле (2.2) были определены значения координаты x, при которой наступает потеря устойчивости течения в пограничном слое водных растворов карбоксилметилцеллюлозы:

концентрации $C = 0.09\%$

$$n = 0.72, \quad k = 0.44\ н \cdot сек^n / м^2, \quad 10^3\ сек^{-1} \leqslant U'(0) \leqslant 3 \cdot 10^4\ сек^{-1}$$

концентрации $C = 0.35\%$

$$n = 0.58, \quad k = 0.429\ н \cdot сек^n / м_2, \quad 10^3\ сек^{-1} \leqslant U'(0) \leqslant 10^4\ сек^{-1}$$

Приводим значения координаты x [$м$], вычисленные для ряда значений U_0 [$м/сек$] для концентраций $C = 0.09$, 0.35%, а также для $C = 0$, т. е. для чистой воды при 20° С.

$U_0 =$	4	6	8	10	12	
$x =$	0.16	0.075	0.046	0.031	—	($C = 0.09\%$)
$x =$	—	0.33	0.17	0.10	0.067	($C = 0.35\%$)
$x =$	0.021	0.014	0.010	0.0084	0.007	($C = 0$)

Поступило 20 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульман З. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск, «Наука и техника», 1966.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
3. Wazzan A. R., Okamura T., Smith A. M. O. The stability of water over heated and cooled flat plates. J. Heat Trans. ASME, 1968, Ser. C, vol. 90, No. 1. (Рус. перев.: Теплопередача. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1968, Сер. С, т. 90, № 1.)
4. Макаров А. М., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Устойчивость плоского течения неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом. Инж.-физ. ж., 1969, т. 16, № 5.
5. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
6. Lin C. C. On the stability of two dimensional parallel flows, pt 2. Stability in an inviscid fluid. Quart. Appl. Math., 1946, vol. 3, No. 3.