

## СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

М. Д. КАРТАЛЕВ

(София)

На основе гидродинамических уравнений Чу, Гольбергера и Лоу исследуются стационарные простые волны в плазме с анизотропным давлением. В п. 1 для случая, когда векторы средней скорости потока и напряженности магнитного поля параллельны, система уравнений сводится к двум квазилинейным уравнениям для компонент скорости. В п. 2 при предположении гиперболичности этой системы получены уравнения характеристик. Для частного случая безвихревого течения исследуется характер простых волн при обтекании разных контуров. В п. 3 исследуется качественно изменение параметров потока в простых волнах. В п. 4 рассматривается возможность перехода в неустойчивое состояние плазмы.

1. Уравнение плоского стационарного течения в случае  $v \parallel B$ . Система уравнений, описывающая стационарные течения бесстолкновительной плазмы в приближении Чу, Гольдбергера и Лоу, имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \rho v &= 0, & \rho (v \nabla) v &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} B \times B - \operatorname{div} P \\ \operatorname{rot} [v \times B] &= 0, & \operatorname{div} B &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$(v \nabla) (p_{\parallel} B^2 / \rho^3) = 0, \quad (v \nabla) (p_{\perp} / \rho B) = 0$$

$$\operatorname{div} P = \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (b \nabla) b + b \operatorname{div} (p_{\parallel} - p_{\perp}) b$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $v$  — средняя скорость,  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$  — продольное и поперечное давление плазмы,  $P$  — тензор напряжений,  $B$  — вектор индукции магнитного поля,  $b = B/B$  — единичный вектор вдоль магнитного поля.

В этой работе исследуется только случай  $v \parallel B$ , для которого, как указано в работе [1], вдоль линий тока выполнены следующие соотношения:

$$\rho v = k_1 B, \quad p_{\parallel} B^2 / \rho^3 = k_2, \quad p_{\perp} / \rho B = k_3 \quad (1.2)$$

$$v^2 / 2 + 3p_{\parallel} / 2\rho + p_{\perp} / \rho = k_4 \quad (1.3)$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_4$  — постоянные вдоль каждой линии тока.

Покажем подробнее, как получается интеграл типа Бернулли (1.3), чтобы потом воспользоваться промежуточным результатом. После некоторых тождественных преобразований, используя (1.2), второе уравнение системы (1.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \rho \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{3p_{\parallel}}{2\rho} + \frac{p_{\perp}}{\rho} \right) + \\ & + \left[ -\rho v \times \operatorname{rot} v + \frac{B \times \operatorname{rot} B}{4\pi} - B \times \operatorname{rot} (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B}{B^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Умножая (1.4) на единичный вектор, параллельный  $\mathbf{B}$ , и учитывая, что  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$ , получаем (1.3). Далее будем предполагать «сильную форму» интеграла Бернулли, т. е.  $k_1, k_2, k_3, k_4$  будем предполагать одинаковыми во всем потоке. Тогда, если учесть (1.2), из уравнения (1.4) получаем

$$\text{rot}(1 - 1/A^2)\mathbf{v} = 0, \quad A^2 = \rho v^2 / (B^2/4\pi + p_{\perp} - p_{\parallel}) \quad (1.5)$$

Запишем уравнение (1.5) в виде

$$\text{rot} [1 - 1/M_A^2 + (p_{\parallel} - p_{\perp}) / \rho v^2] \mathbf{v} = 0, \quad M_A^2 = 4\pi \rho v^2 / B^2 \quad (1.6)$$

и отметим, что (1.6) отличается от аналогичного уравнения в обычной магнитной гидродинамике [2] последним членом в скобках. Отметим также, что, если  $A^2 \gg 1$ , сильная форма интеграла Бернулли приводит к безвихревому течению, как и в газовой динамике. То же самое имеет место и в обычной магнитной гидродинамике при  $M_A^2 \gg 1$ .

Поскольку дальше будут рассматриваться течения, в которых есть область, где все величины постоянные (набегающий поток), удобно ввести безразмерные параметры

$$\rho' = \rho / \rho_0, \quad p_{\parallel}' = p_{\parallel} / p_{\parallel 0}, \quad p_{\perp}' = p_{\perp} / p_{\perp 0}, \quad B' = B / B_0 \quad (1.7)$$

$$v_x' = v_x / v_0, \quad v_y' = v_y / v_0, \quad V_*'^2 = k_4 / v_0^2$$

где величины с индексом 0 относятся к невозмущенному потоку. Для удобства в записи дальше везде будем опускать штрихи — буквы без индексов будут означать уже безразмерные величины, если не оговорено противное. В этой записи из уравнения неразрывности (1.1), а также из (1.5), (1.2) и (1.3) получаем замкнутую систему

$$\text{rot} \left( 1 - \frac{1}{M_{A0}^2} \frac{B^2}{\rho v^2} - \frac{1}{N_0^2} \frac{p_{\perp}}{\rho v^2} + \frac{1}{3M_0^2} \frac{p_{\parallel}}{\rho v^2} \right) \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1.8)$$

$$\rho v / B = 1, \quad p_{\parallel} B^2 / \rho^3 = 1, \quad p_{\perp} / \rho B = 1 \quad (1.9)$$

$$v^2 + \frac{1}{M_0^2} \frac{p_{\parallel}}{\rho} + \frac{2}{N_0^2} \frac{p_{\perp}}{\rho} = V_*'^2 \quad (1.10)$$

$$M_0^2 = \rho_0 v_0^2 / 3p_{\parallel 0}, \quad N_0^2 = \rho_0 v_0^2 / p_{\perp 0}, \quad V_*'^2 = 1 + 1/M_0^2 + 2/N_0^2$$

Далее предполагаем течение плоским, т. е.  $v_z = B_z = 0$  и все параметры зависят только от  $x$  и  $y$ . При помощи (1.9) и (1.10) можно исключить из (1.8) все величины, кроме  $\mathbf{v}$ , в результате чего окончательно получаются два квазилинейных уравнения для  $v_x$  и  $v_y$

$$A_i \frac{\partial v_x}{\partial x} + B_i \frac{\partial v_x}{\partial y} + C_i \frac{\partial v_y}{\partial x} + D_i \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.11)$$

где

$$A_1 = -\frac{g' v_x v_y}{v}, \quad B_1 = g + \frac{g' v_x^2}{v}, \quad C_1 = -g - \frac{g' v_y^2}{v}, \quad D_1 = \frac{g' v_x v_y}{v} \quad (1.12)$$

$$A_2 = \rho + \frac{\rho' v_x^2}{v}, \quad B_2 = \frac{\rho' v_x v_y}{v}, \quad C_2 = \frac{\rho' v_x v_y}{v}, \quad D_2 = \rho + \frac{\rho' v_y^2}{v}$$

$$g(v) \equiv 1 - \frac{1}{A^2} = 1 + \frac{1}{3M_0^2} v^{-4} - \frac{1}{M_{A0}^2} \rho(v) - \frac{1}{N_0^2} \rho(v) v^{-1} \quad (1.13)$$

где плотность плазмы  $\rho$  выражается через скорость по формуле

$$\rho(v) = \frac{N_0^2}{2} \left( \frac{V_*^2}{v} - v - \frac{1}{M_0^2 v^3} \right) \quad (1.14)$$

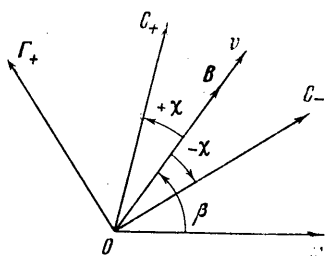
Здесь  $\rho'$  и  $g'$  — производные по  $v$ .

**2. Стационарные простые волны.** Ограничимся случаем, когда система (1.11) гиперболическая. В работе [1] показано, что это имеет место, когда

$$\operatorname{tg}^2 \chi = \frac{1}{(A^2 - 1)(M^2 - 1)} \left[ (M^2 - 1) \left( 1 + \frac{A^2}{3M^2} + \frac{A^2}{N^2} \right) + \frac{A^2 M^2}{N^4} \right] > 0 \quad (2.1)$$

где  $\chi$  — угол между направлением скорости и направлениями  $C_{+}$ - и  $C_{-}$ -характеристик (фиг. 1),  $A^2$  определено в (1.5), а  $M^2$  и  $N^2$  определены, как в (1.10), но без индексов 0 (соответствующие величины там размерные).

Система (1.11) «приводима» по терминологии [3], так как коэффициенты (1.12) зависят только от  $v_x$  и  $v_y$  и свободные члены равны нулю. Следовательно, решение в области, соседней с постоянным потоком, всегда является простой волной и есть возможность применить соответствующие численные методы для расчета течений. Используя известный метод [3], получаем следующие уравнения для  $C$ - и  $\Gamma$ -характеристик соответственно



Фиг. 1

$$a_1(dy)^2 - 2b_1 dydx + c_1(dx)^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$a_2(dv_x)^2 - 2b_2 dv_x dv_y + c_2(dv_y)^2 = 0 \quad (2.3)$$

$$a_1 = g\rho + g'\rho v^{-1}v_y^2 + g\rho'v^{-1}v_x^2$$

$$b_1 = (g\rho' - \rho g')v^{-1}v_x v_y$$

$$c_1 = g\rho + \rho g'v^{-1}v_x^2 + g\rho'v^{-1}v_y^2$$

$$a_2 = -g\rho - 2g'\rho'v_x^2 - (\rho g' + g\rho')v^{-1}v_x^2$$

$$b_2 = [(\rho g' + g\rho')v^{-1} + \rho'g']v_x v_y$$

$$c_2 = \rho g - (\rho g' + g\rho')v^{-1}v_y^2$$

Если предположить, что  $A^2 \gg 1$ , то первое уравнение системы (1.8) превращается в уравнение  $\operatorname{rot} v = 0$ . В уравнениях для  $C$ - и  $\Gamma$ -характеристик (2.2) и (2.3) коэффициенты упрощаются и приобретают вид

$$a_1 = -(\rho + \rho'v^{-1}v_x^2), \quad a_2 = -a_1$$

$$b_1 = -\rho'v^{-1}v_x v_y, \quad b_2 = b_1 \quad (2.4)$$

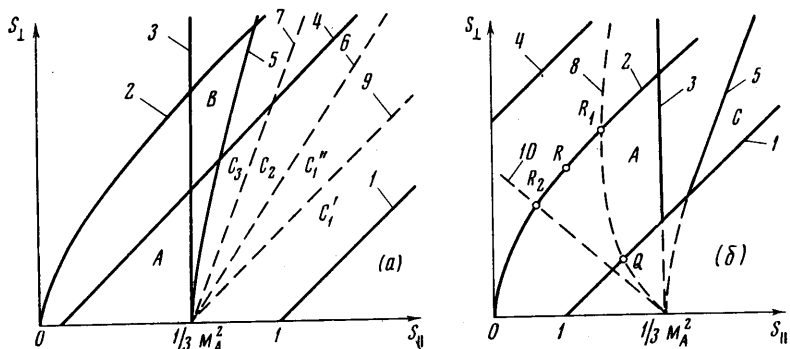
$$c_1 = -(\rho + \rho'v^{-1}v_y^2), \quad c_2 = -c_1$$

Направления  $C$ -характеристик одного рода перпендикулярны к направлениям  $\Gamma$ -характеристик другого рода (так же, как в случае установившегося двумерного безвихревого изэнтропического течения в газовой динамике). Вводим полярные координаты в плоскости  $v_x v_y$

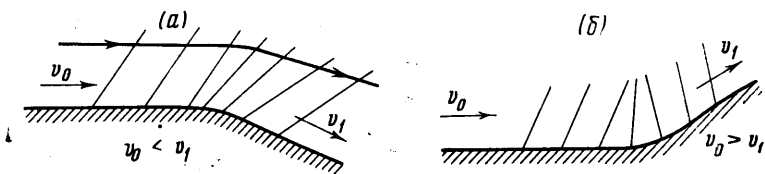
$$v_x = v \cos \beta, \quad v_y = v \sin \beta \quad (2.5)$$

После некоторых преобразований по аналогии с упомянутым случаем в газовой динамике [3] получаем для  $\Gamma$ -характеристик уравнения

$$vd\beta = \pm \operatorname{ctg} \chi dv \quad (2.6)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Используя (1.9) и (1.14), можно выразить  $M^2$ ,  $N^2$  и  $A^2$ , входящие в (2.1), через  $v$ . Следовательно, в уравнении (2.6) переменные разделяются и решение получается в квадратурах, хотя его нельзя выразить в элементарных функциях. Сделаем некоторые качественные выводы.

Если известен знак  $\text{tg } \chi$  для  $C$ -характеристик, из которых состоит простая волна, то, для того чтобы (2.6) было уравнением для  $\Gamma$ -характеристик, перпендикулярных им, нужно в его правой части поставить знак плюс при  $\text{tg } \chi < 0$  и знак минус при  $\text{tg } \chi > 0$ . Не интересуясь точным видом  $\Gamma$ -характеристик, замечаем, что в этих двух случаях имеем соответственно

$$\frac{d\beta}{dv} > 0; \quad \frac{d\beta}{dv} < 0 \quad (2.7)$$

В работе [6] выделены области  $A$ ,  $B$  и  $C$  в плоскости  $S_{\parallel}S_{\perp}$ , в которых выполнено условие гиперболичности (2.1) (фиг. 2, а, б).

Здесь

$$S_{\parallel} = 4\pi\rho_{\parallel} / B^2, \quad S_{\perp} = 4\pi\rho_{\perp} / B^2$$

(величины размерные). Эти области разделяются линиями с уравнениями

$$1 \quad S_{\parallel} = S_{\perp} + 1 \quad (2.8)$$

$$2 \quad S_{\parallel} = S_{\perp}^2 / (S_{\perp} + 1/2) \quad (2.9)$$

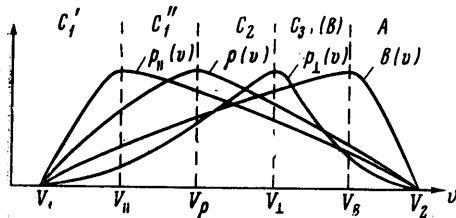
$$3 \quad S_{\parallel} = 1/3 M_A^2 \quad (M_A^2 = 4\pi\rho v^2 / B^2)$$

$$4 \quad S_{\parallel} = S_{\perp} + 1 - M_A^2, \quad 5 \quad S_{\parallel} = S_A^2 / 6(S_{\perp} + 1/2) + 1/3 M_A^2$$

Здесь  $\rho$ ,  $v$ ,  $B$  — размерные. Неравенству  $A \geq 1$  соответствует область ниже прямой 4 (т. е. гиперболические области  $A$  и  $C$ ).

При стационарном обтекании выпуклой или вогнутой поверхности (а также и угла, большего или меньшего чем  $\pi$ ) стационарные простые волны состоят из уходящих характеристик, если в потоке отсутствуют другие источники возмущения. В области  $A$  имеем быструю магнитозвуковую волну, так как касательные, проведенные из конца вектора  $-v$  к диаграмме Фридрихса, касаются ее внешней выпуклой части [1, 6]. Уходящие характеристики направлены вниз по потоку ( $\operatorname{tg} \chi > 0$ ) [1]. При обтекании выпуклого контура получается простая волна, в которой модуль скорости  $v$  увеличивается (фиг. 3, а). В области  $C$  имеем медленную магнитозвуковую волну. Это случай  $RMHD$  в [1], у которого нет аналога в обычной магнитной гидродинамике [5]. Из диаграммы Фридрихса [1] видно, что уходящие характеристики направлены, как и в  $A$ , вниз по потоку и также при обтекании выпуклого контура скорость увеличивается. В областях  $A$  и  $C$  в случае обтекания вогнутого контура скорость уменьшается и возникает ударная волна, направленная вниз по потоку (фиг. 3, б).

**3. Изменение параметров потока в стационарных простых волнах.** Исследуем поведение функций  $\rho(v)$ ,  $p_{\parallel}(v)$ ,  $p_{\perp}(v)$  и  $B(v)$  при  $v > 0$ . Для определения  $\rho(v)$  имеем (1.14), а для остальных функций из (1.9) получаем



Фиг. 4

$$p_{\parallel}(v) = \rho(v)/v^2, \quad p_{\perp}(v) = v\rho^2(v), \quad B(v) = v\rho(v) \quad (3.1)$$

Уравнение  $\rho(v) = 0$  имеет два действительных, положительных корня  $V_1$  и  $V_2$

$$V_{1,2}^2 = \frac{1}{2}V_*^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}V_*^4 - M_0^{-2}} \quad (\frac{1}{4}V_*^4 > M_0^{-2}) \quad (3.2)$$

При  $v > V_2$  и  $v < V_1$  все рассматриваемые функции отрицательны, что лишено физического смысла. Поскольку в невозмущенной области течения  $v = 1$ , важно отметить, что из (3.2) и из  $\rho(1) = 1 > 0$  следует:

$$0 < V_1 < 1 < V_2 < V_* \quad (3.3)$$

Приравняв нулю производные  $\rho$ ,  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$  и  $B$  по скорости, получаем точки  $V_{\rho}$ ,  $V_{\parallel}$ ,  $V_{\perp}$  и  $V_B$ , в которых эти функции достигают максимума на отрезке  $(V_1, V_2)$

$$V_{\rho}^2 = -\frac{1}{2}V_*^2 + \sqrt{\frac{1}{4}V_*^4 + 3M_0^{-2}} \quad (3.4)$$

$$V_{\parallel}^2 = \frac{3}{2}V_*^2 - \sqrt{\frac{9}{4}V_*^4 - 5M_0^{-2}} \quad (\frac{9}{4}V_*^4 > 5M_0^{-2}) \quad (3.5)$$

$$V_{\perp}^2 = -\frac{1}{6}V_*^2 + \sqrt{\frac{1}{36}V_*^4 + \frac{5}{3}M_0^{-2}}, \quad V_B^2 = \sqrt{M_0^{-2}} \quad (3.6)$$

Можно показать, что выполнены следующие неравенства:

$$V_1 < V_{\parallel} < V_{\rho} < V_{\perp} < V_B < V_2 \quad (3.7)$$

Действительно, допустим сначала, что одновременно  $V_{\rho} < V_{\parallel}$  и  $V_{\rho} < V_{\perp}$ . Тогда есть отрезок, в котором одновременно  $p_{\parallel}(v) > 0$ ,  $p_{\perp}'(v) > 0$  и  $\rho'(v) < 0$ , что противоречит (1.10). Следовательно, выполнено хотя бы одно из двух неравенств:  $V_{\rho} > V_{\parallel}$ ,  $V_{\rho} > V_{\perp}$ . Допустим, что  $V_{\rho} > V_{\perp}$ . Тогда есть отрезок, где  $\rho'(v) > 0$ , а  $p_{\perp}'(v) < 0$ , что противоречит второму равенству (3.1). Следовательно,  $V_{\parallel} < V_{\rho} < V_{\perp}$ .

Аналогично, предположение, что  $V_B < V_p$ , приводит к противоречию с третьим равенством (3.1), а предположение, что  $V_p < V_B < V_{\perp}$ , противоречит третьему равенству (1.9). Следовательно, соотношения между характерными значениями скорости даются неравенствами (3.7). На фиг. 4 изображено (только качественно) изменение параметров потока с изменением скорости. Выделяются пять областей:

$$V_1 < v < V_{\parallel} \quad (p_{\parallel}'(v) > 0, \rho'(v) > 0, p_{\perp}'(v) > 0, B'(v) > 0) \quad (3.8.1)$$

$$V_{\parallel} < v < V_p \quad (p_{\parallel}'(v) < 0, \rho'(v) > 0, p_{\perp}'(v) > 0, B'(v) > 0) \quad (3.8.2)$$

$$V_p < v < V_{\perp} \quad (p_{\parallel}'(v) < 0, \rho'(v) < 0, p_{\perp}'(v) > 0, B'(v) > 0) \quad (3.8.3)$$

$$V_{\perp} < v < V_B \quad (p_{\parallel}'(v) < 0, \rho'(v) < 0, p_{\perp}'(v) < 0, B'(v) > 0) \quad (3.8.4)$$

$$V_B < v < V_2 \quad (p_{\parallel}'(v) < 0, \rho'(v) < 0, p_{\perp}'(v) < 0, B'(v) < 0) \quad (3.8.5)$$

Заметим, что при  $M_0^2 \rightarrow \infty$  имеем  $V_2 \rightarrow V_*$ , а  $B_B, V_{\perp}, V_p, V_{\parallel}, V_1$  стремятся к нулю. Нетрудно также показать, что

$$V_{\parallel} > 1, \quad \text{если } M_0^{-2} > 1 + 3N_0^{-2} \quad (3.9.1)$$

$$V_p > 1, \quad \text{если } M_0^{-2} > 1 + N_0^{-2} \quad (3.9.2)$$

$$V_{\perp} > 1, \quad \text{если } M_0^{-2} > 1 + \frac{1}{2}N_0^{-2} \quad (3.9.3)$$

$$V_B > 1, \quad \text{если } M_0^{-2} > 1 \quad (3.9.4)$$

Неравенства (3.9) позволяют по известным параметрам  $M_0^2$  и  $N_0^2$  определить, в какой из областей (3.8) находится начальная скорость  $v = 1$ .

Чтобы в плоскости  $S_{\parallel}, S_{\perp}$  выделить области, соответствующие (3.8.1,2,3,4,5), необходимо в соотношениях (3.9) перейти к параметрам  $S_{\parallel}, S_{\perp}, M_A^2$  (опустив индексы 0). В результате получается, что неравенствам (3.9.1,2,3,4) отвечают области соответственно правее прямых 9, 6, 7, 3

$$\begin{array}{ll} 9 & S_{\parallel} = \frac{1}{3}M_A^2 + S_{\perp}, & 6 & S_{\parallel} = \frac{1}{3}M_A^2 + \frac{1}{3}S_{\perp} \\ 7 & S_{\parallel} = \frac{1}{3}M_A^2 + \frac{1}{6}S_{\perp}, & 3 & S_{\parallel} = \frac{1}{3}M_A^2 \end{array}$$

Прямые 6 и 7 совпадают с прямыми 6 и 7, полученными в работе [6] при исследовании изменения  $\rho$  и  $p_{\perp}$  в слабых ударных волнах. Прямые 9, 6 и 7 делят область  $C$  на четыре подобласти:  $C_1', C_1'', C_2, C_3$ , причем  $C_1, C_2$  и  $C_3$  совпадают с соответствующими областями в работе [6]. При  $M_A^2 > 3$  область  $C_1'$  исчезает. В области  $A$  выполнены (3.8.5) в областях  $B$  и  $C_3$  — (3.8.4), в  $C_2$  — (3.8.3), в  $C_1''$  — (3.8.2) и в  $C_1'$  (3.8.1). Это обозначено на фиг. 4. Обратное соответствие не всегда имеет место, поскольку в плоскости  $S_{\parallel}S_{\perp}$  рассматриваются только гиперболические области, в то время как полученные в этом пункте зависимости параметров потока от  $v$  не зависят от гиперболичности системы и выполняются вдоль линий тока при  $v \parallel B$ . Они, в частности, выполняются и в стационарных простых волнах.

Отметим, наконец, что аномальное по сравнению с обычной магнитной гидродинамикой поведение функции  $\rho(v)$  имеет место только в области  $C$ , т. е. в случае  $RMHD$  [4].

**4. Возникновение неустойчивости в плазме.** В этом пункте выясняется возможность выхода из области устойчивости [4] (ограниченной линиями 1 и 2 на фиг. 2, а, б) при движении вдоль линий тока ( $v \parallel \mathbf{B}$ ). Полученный результат применим к стационарным простым волнам, если предположена еще гиперболичность системы. В дальнейшем рассматриваются только стационарные простые волны.

Переходя в выражениях для  $S_{\parallel}$  и  $S_{\perp}$  к безразмерным величинам и используя (1.9) и (1.14), получаем следующее параметрическое представление (с параметром  $v$ ) семейства кривых, по которым движется в плоскости  $S_{\parallel}S_{\perp}$  точка, изображающая состояние параметров в стационарной простой волне

$$S_{\perp} = S_{\perp 0} / v \quad (S_{\perp 0} = 4\pi p_{\perp 0} / B_0^2) \quad (4.1)$$

$$S_{\parallel} = S_{\parallel 0} / v^4 \rho(v) \quad (S_{\parallel 0} = 4\pi p_{\parallel 0} / B_0^2) \quad (4.2)$$

Через каждую точку плоскости проходит одна кривая этого семейства. Для угла наклона  $\theta$  касательной к этой кривой в точке  $(S_{\parallel}, S_{\perp})$  к оси  $OS_{\parallel}$  получается

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{S_{\perp}^2}{3S_{\parallel}(S_{\parallel} + S_{\perp} - M_A^2/3)} \quad (4.3)$$

Обозначим цифрой 10 прямую  $S_{\parallel} = M_A^2/3 - S_{\perp}$  (фиг. 2, б). Слева от этой прямой  $\operatorname{tg} \theta < 0$ , а справа от нее  $\operatorname{tg} \theta > 0$ . На самой прямой  $\theta = \pi/2$ . При  $S_{\perp} \rightarrow 0$   $\operatorname{tg} \theta \rightarrow 0$ .

Ясно, что некоторые кривые семейства (4.1), (4.2) пересекают линии 1 и 2, т. е. течение выходит из области устойчивости плазмы. Исследуем, в какой из стационарных простых волн это происходит (с возрастанием или с убыванием  $v$ ). Из (4.1) видно, что достаточно знать, как меняется  $S_{\perp}$  при выходе из области устойчивости: если  $S_{\perp}$  возрастает, то  $v$  убывает и наоборот.

Выясним сначала, как происходит переход в «шланговую» неустойчивость, т. е. как пересекается прямая (2.8) с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \theta_1 = 1$ . Обозначим через  $\operatorname{tg} \theta|_1$  значения (4.3) в точках прямой 1. Легко увидеть, что, когда  $\operatorname{tg} \theta|_1 < 0$ , или  $\operatorname{tg} \theta|_1 > 0$ , но  $\operatorname{tg} \theta|_1 > 1$ , переход в шланговую неустойчивость совершается при уменьшении  $S_{\perp}$ . Условие  $\operatorname{tg} \theta|_1 > 1$  получается подстановкой (2.8) в (4.3) После преобразования оно приобретает вид

$$S_{\perp}^2 - 3S_{\parallel}^2 - 3S_{\parallel}S_{\perp} + S_{\parallel}M_A^2 > 0 \quad (4.4)$$

Гипербола  $\delta$ , получаемая приравниванием нулю (4.4), совпадает с полученной в работе [6] при исследовании шланговой неустойчивости в слабых ударных волнах. Как показано в [6], неравенство (4.4) выполнено слева от этой кривой. Обозначим через  $Q$  точку пересечения 1 и  $\delta$  (фиг. 2, б). В результате получим, что при  $M_A^2 < 3$  возникновение шланговой неустойчивости возможно в стационарных простых волнах с уменьшением  $v$  (фиг. 2, а), а при  $M_A^2 > 3$  (фиг. 2, б) оно возможно

в волнах с уменьшением  $v$  (выше точки  $Q$ ),  
в волнах с увеличением скорости (ниже точки  $Q$ ).

Наконец, выясним, как происходит переход в «зеркальную» неустойчивость, т. е. как пересекается кривая 2 (2.9). Касательная к этой кривой

составляет с осью  $OS_{\parallel}$  угол  $\theta_2$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{(2S_{\perp} + 1)^2}{4S_{\perp}(S_{\perp} + 1)}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 > 1 \quad (4.5)$$

Обозначим через  $R_1$  и  $R_2$  точки пересечения соответственно 2 с 8 и 2 с 10 (фиг. 2, б). Обозначим далее через  $\operatorname{tg} \theta|_2$  тангенс угла наклона кривых семейства (4.1), (4.2) в точках их пересечения с кривой 2. Можно показать, что на кривой 2 есть точка  $R$ , расположенная между  $R_1$  и  $R_2$ , такая, что выше нее  $\operatorname{tg} \theta|_2 < \operatorname{tg} \theta_2$ , а ниже нее (на дуге  $RR_2$ )  $\operatorname{tg} \theta|_2 > \operatorname{tg} \theta_2$ . Ниже  $R_2$   $\operatorname{tg} \theta|_2 < 0$ . Если точка  $R$  находится на границе гиперболической области, то это будет обязательно область  $A$  (фиг. 2б); границы областей  $B$  и  $C$  всегда находятся выше точки  $R$ .

Переход в зеркальную неустойчивость возможен:

- в стационарной простой волне с увеличением скорости,
- если этот переход происходит выше точки  $R$ ;
- в волне с уменьшением скорости — ниже точки  $R$ .

В работе [6] показано, что параметры солнечного ветра при не очень большом  $S_{\parallel}$  соответствуют подобласти  $A_2$  (левее кривой 8 на фиг. 2, б). Из результатов п.2 и п.4 видно, что переход в шланговую неустойчивость в солнечном ветре возможен при обтекании выпуклого контура и невозможен при обтекании вогнутого контура. Это соответствует сделанному в работе [6] выводу о невозможности такого перехода в слабых ударных волнах (которые могут появиться при обтекании вогнутого контура). Если продолжить это соответствие, нетрудно заметить, что переход в зеркальную неустойчивость возможен в слабых ударных волнах.

Автор благодарит В. Б. Баранова за постановку задачи, советы и постоянное внимание к работе, а также А. Г. Куликовского за обсуждение результатов.

Поступило 14 X 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kato Y., Tajiri M., Taniuti T. Propagation of hydromagnetic waves in collisionless plasma I. J. Phys. Soc. Japan, 1966, vol. 21, No. 4, pp. 765—777.
2. Kato Y., Taniuti T. Hydromagnetic plane steady flow in compressible ionized Gases. Progr. Theoret. Phys., 1959, vol. 21, No. 4.
3. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
4. Abraham-Shrauner B. Propagation of hydromagnetic waves through an anisotropic plasma. J. Plasma Phys., 1967, vol. 1, No. 3, pp. 361—378.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
6. Баранов В. Б., Каргалев М. Д. Магнитная гидродинамика плоских течений в плазме с анизотропным давлением. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.