ПОТОК ГРОМЕКИ — БЕЛЬТРАМИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ, П. Ф. ПОХИЛ, О. А. УСПЕНСКИЙ

(*Москва*)

Исследовано двупараметрическое однородное винтовое движение идеальной несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Показана возможность существования различных режимов течения, определяемых значением относительной интенсивности вращения потока.

Из общих уравнений вихревого движения идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}=-\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right),\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

для осесимметричного однородного винтового потока (потока Громеки — Бельтрами [1]), в котором

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=k\mathbf{v},\qquad k=\mathrm{const}$$

$$p_0=p+{}^1/_2\rho(u^2+v^2+w^2)=\mathrm{const}$$

можно получить

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+v\left(k^2-\frac{1}{r_2}\right)=0 \tag{1}$$

$$u=-\frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial z},\qquad w=\frac{1}{kr}\frac{\partial}{\partial r}(vr)$$

Здесь u, v, w — соответственно радиальная, тангенциальная и осевая составляющие скорости, а p_0 — полное давление.

Рассмотрим на основании (1) течение вращающейся жидкости в полубесконечной цилиндрической трубе радиуса R. Введем безразмерные переменные

$$\xi=\frac{r}{R},\ \zeta=\frac{z}{R},\ \lambda=kR,\quad U=\frac{uR}{\Gamma_0},\ V=\frac{vR}{\Gamma_0}$$

$$W=\frac{wR}{\Gamma_0},\quad \vartheta=V-V_0$$

Здесь V_0 — распределение безразмерной скорости вращения на входе в трубу, а $\Gamma_0=vR$ — значение циркуляции у стенки. Тогда уравнения (1) принимают вид

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}(\vartheta\xi)\right]+\lambda^2\vartheta=-\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(V_0\xi)\right]-\lambda_2V_0 \tag{2}$$

$$U=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta},\qquad W=\frac{1}{\lambda\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}[(\vartheta+V_0)\xi]$$

Граничными условиями к приведенной системе будут

$$\vartheta(0, \zeta) = 0, \quad \vartheta(1, \zeta) = 0, \quad \vartheta(\xi, 0) = 0, \quad \vartheta(\xi, \infty) < \infty \tag{3}$$

Решение (2), (3) представимо в виде ряда Фурье — Бесселя

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\zeta) J_1(\mu_n \xi) \tag{4}$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_1(\mu_n) = 0$.

Подставляя далее (4) в (2), получаем n уравнений для определения функций $\Phi_n(\zeta)$

$$\Phi_n''(\zeta) - (\mu_n^2 - \lambda^2)\Phi_n(\zeta) = f_n \qquad (n=1, 2 \ldots) \tag{5}$$

причем

$$f_n = -\frac{2}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^{1.0} \xi \left\{ \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}(V_0 \xi) \right] - \lambda^2 V_0 \right\} J_1(\mu_n \xi) d\xi \tag{6}$$

С учетом граничных условий по координате ζ отсюда будем иметь две возможные формы функций, удовлетворяющих (5)

1) при $\mu_n^2 - \lambda^2 > 0$

$$\Phi_n(\zeta) = \frac{f_n}{\mu_n^2 - \lambda^2} [\exp(-\zeta \sqrt{\mu_n^2 - \lambda^2}) - 1]$$

2) при $\mu_n^2 - \lambda^2 < 0, \quad \varphi_n \neq {}^{\pi}/_{2}(2n+1)$

$$\Phi_n(\zeta) = \frac{f_n}{\lambda^2 - \mu_n^2} \left[1 - \frac{\cos(\zeta \sqrt{\lambda^2 - \mu_n^2} + \varphi_n)}{\cos \varphi_n} \right]$$

Таким образом, общее решение задачи о двупараметрическом однородном винтовом потоке Громеки — Бельтрами в полубесконечной цилиндрической трубе с заданным распределением циркуляции на входе представляется рядом

$$V = V_0 + \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n}{\lambda^2 - \mu_n^2} \left[1 - \frac{\cos(\zeta \sqrt{\lambda^2 - \mu_n^2} + \varphi_n)}{\cos \varphi_n} \right] J_1(\mu_n \xi) +$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n}{\mu_n^2 - \lambda^2} [\exp(-\zeta \sqrt{\mu_n^2 - \lambda^2}) - 1] J_1(\mu_n \xi) \tag{7}$$

При относительно малых интенсивностях вращения потока $(\lambda < \mu_1)$ периодические составляющие в (7) отсутствуют, решение однозначно и имеет вид

$$V = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\mu_n^2 - \lambda^2} [\exp(-\zeta \sqrt{\mu_n^2 - \lambda^2}) - 1] J_1(\mu_n \xi) \tag{8}$$

асимптотически вырождающийся на бесконечном удалении в

$$V \to V_0 + \sum_{n=1} \frac{f_n}{\lambda^2 - \mu_n^2} J_1(\mu_n \xi).$$

Выполняя разложение V_0 в ряд Фурье — Бесселя, подставляя сюда (6) и интегрируя, будем иметь

$$V(\xi, \infty) \to 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n J_1(\mu_n \xi)}{(\lambda^2 - \mu_n^2) J_0(\mu_n)} = \frac{J_1(\lambda\xi)}{J_1(\lambda)} \tag{9}$$

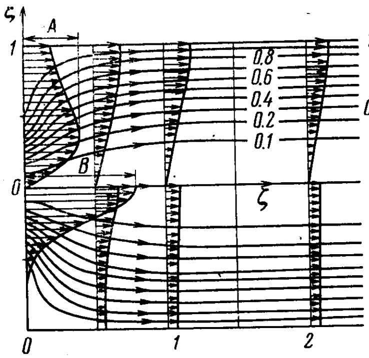
что соответствует однопараметрическому винтовому течению [2, 4].

Для примера были просчитаны значения скоростей в рассматриваемом потоке при задании на входе в трубу распределения

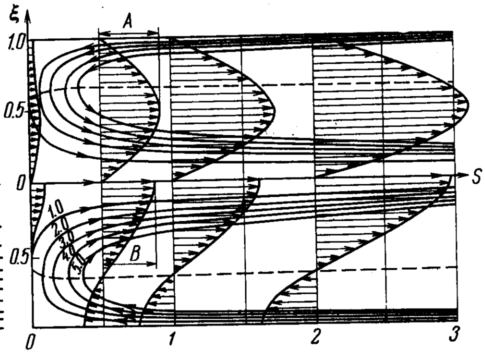
$$V_0 = \frac{1}{\xi}\frac{1 - \exp(-N\xi^2)}{1 - \exp(-N)} \qquad (N = \text{const}) \tag{10}$$

которое близко к наблюдаемому в действительности.

На фиг. 1 и 2 для случая $N = 10$, $\lambda = 1.0$ и $N = 10$, $\lambda = 3.80$ соответственно представлены картины линий тока и профили безразмерных осевой W и тангенциальной V составляющих скорости для нескольких сечений по длине трубы (на фиг. 1



Фиг. 1



Фиг. 2

масштабом для V является величина $A = 2.00$, а для $W - B = 20.0$; на фиг. 2 аналогичные величины равны $A = 10.7$, $B = 19.1$).

Расчет показывает, что при $\lambda < 2.42$ по мере удаления от входа диаметр ядра вихря, внутри которого жидкость вращается примерно по закону твердого тела, увеличивается, довольно быстро заполняя все сечение трубы.

С увеличением скорости вращения ($\lambda > 2.42$) у стенки в соответствии с (8) появляется зона обратных осевых течений.

Из общего решения (7) следует, что при относительной интенсивности вращения $\lambda > \mu_1 = 3.83$ поток модулируется периодическими возмущениями с длиной волны

$$l_n = \frac{2\pi R}{\sqrt{\lambda^2 - \mu_n^2}},$$

причем при $\zeta \to \infty$ уже невозможно установление однопараметрического режима течения. В этом случае задача, вообще говоря, становится некорректно поставленной, так как при известном λ допускает многозначные решения, определяемые заданием фазы колебаний φ_n. Аналогичная ситуация возникает всякий раз при решении уравнения Гельмгольца с большим значением параметра в неограниченной по одной координате внутренней области (например, при решении задачи об обтекании идеальной вращающейся жидкостью малого тела, помещенного на оси канала [3]).

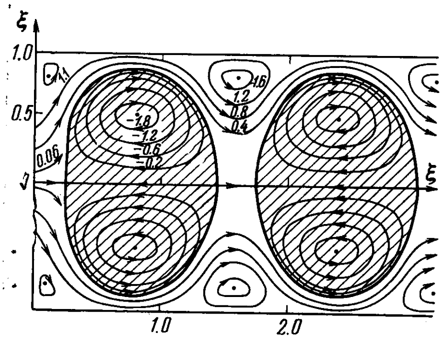
Однако при значениях λ из области $\mu_1 < \lambda < \mu_2$ еще можно сохранить некоторую видимость однозначности задавая постоянную величину фазы колебаний φ_1. Легко видеть, что физически это эквивалентно наложению некоторого ограничения на радиальную скорость у входа в трубу. Эта скорость может быть выбрана лишь из класса функций

$$U(\xi, 0) = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = -\frac{f_1 \operatorname{tg} \varphi_1}{\lambda\sqrt{\lambda^2-\mu_1{}^2}} J_1(\mu_1\xi) + \frac{1}{\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n}{\sqrt{\mu_n{}^2-\lambda^2}} J_1(\mu_n\xi)$$

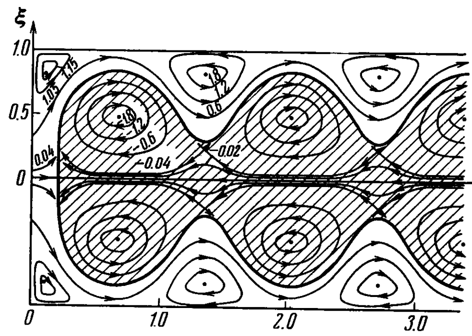
и, следовательно, не является произвольной.

Чтобы проиллюстрировать для такого случая влияния величины параметра λ на структуру течения, на фиг. 3 и фиг. 4 представлены картины линий тока соответственно для значений $\lambda = 5.50$ и $\lambda = 6.0$ (в обоих случаях $N = 10$ и $\varphi_1 = 0$).

Если $5.52 > \lambda > 3.83$, то на первичный вихрь накладывается система периодических вдоль ζ, не связанных друг с другом, стационарных тороидальных вихрей.



Фиг. 3



Фиг. 4

При этом внутри таких вихрей вращение жидкости происходит в направлении, противоположном направлению вращения у стенок канала («реверс вихря»), а на оси трубы имеет место противоток. Увеличение относительной интенсивности циркуляции до $\lambda \geqslant 5.52$ приводит к слиянию индивидуальных тороидальных вихрей (заштрихованная область на фиг. 4). Внешняя граница такой зоны вторичных движений у оси трубы при $\lambda \to \mu_2 = 7.02$ вырождается в слабо возмущенную цилиндрическую поверхность.

Нужно отметить, что появление обратных осевых движений в части канала при интенсивностях вращения λ, больших 2.42, связано с изменением здесь знака производной $(V\xi)d(V\xi) / d\xi$ и вызывает подозрение о неустойчивости течения в этой зоне [4].

Поступило 27 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Громека И. С. Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, 1952.
2. Гостинцев Ю. А. Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
3. Squire H. B. Rotating fluids. Surveys in Mech., Cambridge, Univ. Press, 1956.
4. Гостинцев Ю. А. Об устойчивости течения по трубе идеальной вращающейся жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.