

## НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ ТВЕРДЫМИ СТЕНКАМИ, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ СВОБОДНА И КОЛЕБЛЕТСЯ С БОЛЬШОЙ ЧАСТОТОЙ

В. А. БИУШКИН, С. Г. ДАДАЕВ, Г. А. ЗАВЬЯЛОВ

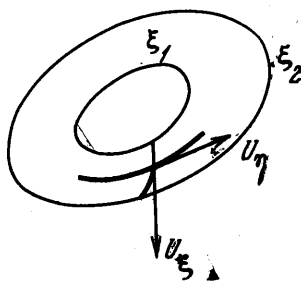
(Челябинск)

Изучается давление в тонком слое вязкого сжимаемого газа, заключенного между двумя стенками, одна из которых свободна и колеблется по заданному гармоническому закону с большой частотой.

При больших частотах колебаний одной из стенок становится возможным применять асимптотические методы [1]. Движение газа, как показано в работе [2], можно принять близким к изотермическому и влиянием инерционных членов в уравнениях движения газа можно пренебречь.

1. Постановка краевой задачи. Уравнение распределения давления в тонком слое вязкого газа между двумя произвольными по форме твердыми стенками имеет вид

$$\frac{1}{H_{\xi}H_{\eta}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \rho \frac{H_{\eta}}{12\mu H_{\xi}} h^3 \frac{\partial p}{\partial \xi} - \rho H_{\eta} u_{\xi} \frac{h}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \rho \frac{H_{\xi}}{12\mu H_{\eta}} h^3 \frac{\partial p}{\partial \eta} - \rho H_{\xi} u_{\eta} \frac{h}{2} \right) \right] = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь  $\xi, \eta$  — криволинейные координаты на неподвижной твердой стенке;  $H_{\xi}, H_{\eta}$  — параметры Ляме;  $u_{\xi}, u_{\eta}$  — проекции скорости подвижной стенки на орты криволинейной системы координат (фиг. 1). Введем безразмерные величины

$$\alpha = \xi/l, \quad \beta = \eta/l, \quad H = h/\delta, \quad P = P/P_a \\ V_{\alpha} = u_{\xi}/u, \quad V_{\beta} = u_{\eta}/u \quad (1.2)$$

Здесь  $l$  — длина,  $\delta$  — толщина газового слоя,  $P_a$  — давление окружающей среды,  $u$  — скорость.

Обозначив  $\psi = PH$ , уравнение (1.1) с учетом (1.2) запишем в виде

$$\frac{1}{L_{\alpha}L_{\beta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{L_{\beta}}{L_{\alpha}} \left( \frac{H}{2} \frac{\partial \psi^2}{\partial \alpha} - \psi^2 \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right) - \Lambda_u L_{\beta} \psi V_{\alpha} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{L_{\alpha}}{L_{\beta}} \left( \frac{H}{2} \frac{\partial \psi^2}{\partial \beta} - \psi^2 \frac{\partial H}{\partial \beta} \right) - \Lambda_u L_{\alpha} \psi V_{\beta} \right] \right\} = \frac{12\mu l^2}{p_a \delta^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.3)$$

Пусть свободная твердая стенка колеблется по заданному гармоническому закону с большой частотой  $\nu$  и, кроме того, совершает еще одно движение, которое подлежит определению и оказывается также близким к колебательному процессу с характерной частотой  $\omega_0 \ll \nu$ . Для дальнейшего удобно ввести безразмерное время двумя способами

$$T = \omega_0 t, \quad \tau = \nu t \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L_\alpha L_\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{L_\beta}{L_\alpha} \left( \frac{H}{2} \frac{\partial \psi^2}{\partial \alpha} - \psi^2 \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right) - \Lambda_u L_\beta \psi V_\alpha \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{L_\alpha}{L_\beta} \left( \frac{H}{2} \frac{\partial \psi^2}{\partial \beta} - \psi^2 \frac{\partial H}{\partial \beta} \right) - \Lambda_u L_\alpha \psi V_\beta \right] \right\} = \Lambda_v \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \Lambda_\omega \frac{\partial \psi}{\partial T} \\ & \Lambda_u = \frac{6\mu l}{\rho_a \delta^2}, \quad \Lambda_v = \frac{12\mu l^2 \nu}{\rho_a \delta^2}, \quad \Lambda_\omega = \frac{12\mu l^2 \omega_0}{\rho_a \delta^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $\Lambda_u$ ,  $\Lambda_v$ ,  $\Lambda_\omega$  — безразмерные параметры сжимаемости газового слоя;  $L_\alpha$ ,  $L_\beta$  — безразмерные параметры Ляме.

При  $\Lambda_v \rightarrow \infty$  ( $\nu \rightarrow \infty$ ) функция  $\psi$  близка к функции  $\psi_\infty(\alpha, \beta, T)$ , которая удовлетворяет асимптотическому уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L_\alpha L_\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{L_\beta}{L_\alpha} \left( \frac{H_0}{2} \frac{\partial \psi_\infty^2}{\partial \alpha} - \psi_\infty^2 \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \right) - \Lambda_u L_\beta \psi_\infty V_{\alpha 0} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{L_\alpha}{L_\beta} \left( \frac{H_0}{2} \frac{\partial \psi_\infty^2}{\partial \beta} - \psi_\infty^2 \frac{\partial H_0}{\partial \beta} \right) - \Lambda_u L_\alpha \psi_\infty V_{\beta 0} \right] \right\} = \Lambda_\omega \frac{\partial \psi}{\partial T} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

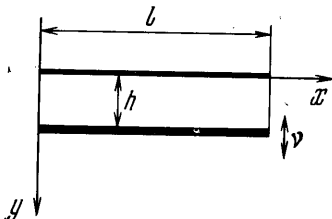
$$H_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H d\tau, \quad V_{\alpha 0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_\alpha d\tau, \quad V_{\beta 0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_\beta d\tau$$

Пренебрегая корректирующими функциями [3] вблизи границ  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  твердых стенок, запишем граничные условия уравнения (1.6)

$$\begin{aligned} \psi_\infty^2(\alpha, \beta, T) &= \frac{1}{J_+} \int_0^{2\pi} H_+^3 d\tau, \quad \psi_\infty^2(\alpha_2, \beta, T) = \frac{1}{J_-} \int_0^{2\pi} H_-^3 d\tau \\ & \left( J_\pm = \int_0^{2\pi} H_\pm d\tau \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $H_+ = H(\alpha_1, \beta, \tau, T)$ ,  $H_- = H(\alpha_2, \beta, \tau, T)$  — толщины слоя, определенные при  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно.

**2. Квазистационарный процесс в газовом слое.** Пусть свободная твердая стенка колеблется с большой частотой  $\nu$ , а низкочастотные колебания отсутствуют. Тогда уравнение (1.6) запишется в виде



Фиг. 2

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{L_\beta}{L_\alpha} \left( \frac{H_0}{2} \frac{\partial \psi_\infty^2}{\partial \alpha} - \psi_\infty^2 \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \right) - \right. \\ & \left. - \Lambda_u L_\beta \psi_\infty V_{\alpha 0} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{L_\alpha}{L_\beta} \left( \frac{H_0}{2} \frac{\partial \psi_\infty^2}{\partial \beta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \psi_\infty^2 \frac{\partial H_0}{\partial \beta} \right) - \Lambda_u L_\alpha \psi_\infty V_{\beta 0} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

В граничных условиях (1.7) функции  $H_\pm$ , а следовательно и  $\psi_\infty$ , не будут зависеть от  $T$ . В качестве примера рассмотрим плоское течение газа между двумя параллельными стенками, одна из которых колеблется с большой частотой  $\nu$  (фиг. 2).

Обозначив  $\alpha = x$ , уравнение (2.1) для данного случая запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi_{\infty}^2}{\partial x} = 0 \tag{2.2}$$

Безразмерная толщина слоя равна

$$H = 1 + H_1 \cos \tau \quad (H_1 < 1) \tag{2.3}$$

Здесь  $H_1$  — безразмерная амплитуда колебаний стенки. Граничные условия (1.7) в данной задаче будут иметь вид

$$\psi_{\infty}^2(0) = 1 + \frac{3}{2}H_1^2, \quad \psi_{\infty}^2(1) = 1 + \frac{3}{2}H_1^2 \tag{2.4}$$

После определения функции  $\psi_{\infty}$ , давление в слое газа будет

$$P = \frac{\psi_{\infty}}{H} = \frac{(1 + \frac{3}{2}H_1^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + H_1 \cos \tau} \tag{2.5}$$

Реакция газового слоя, действующая на пластину, за один период колебания равна

$$F = p_0 l \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (P - 1) dx d\tau \tag{2.6}$$

Жесткость газового слоя определим следующим образом:

$$C = -dF / d\delta \tag{2.7}$$

Безразмерные реакция и жесткость газового слоя равны соответственно

$$f \equiv \frac{F}{p_0 l} = \left( \frac{1 + \frac{3}{2}H_1^2}{1 - H_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1, \quad K \equiv \frac{C\delta}{p_0 l} = \frac{\frac{5}{2}H_1^2}{(1 + \frac{3}{2}H_1^2)^{\frac{1}{2}}(1 - H_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

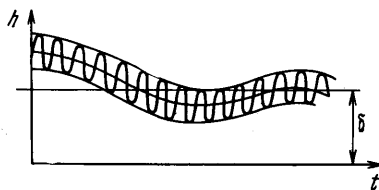
При колебании одной из стенок с большой частотой  $\nu$  газовый слой может уравновесить внешнюю постоянную нагрузку и обладает жесткостью, т. е. удовлетворяет всем требованиям, которые предъявляются к опорам. При асимптотическом решении ( $\nu \rightarrow \infty$ ) величины (2.8) не зависят от частоты  $\nu$ , а зависят от амплитуды  $H_1$ .

**3. Неустановившееся движение газового слоя.** Пусть кроме колебания свободной стенки с большой частотой  $\nu$  происходит ее дополнительное движение.

Величины  $H_0$  и  $\psi_{\infty}$  представим в следующем виде:

$$H_0 + \Delta H, \quad \psi_{\infty} + \Delta \psi \tag{3.1}$$

Фиг. 3



Здесь  $\Delta H$  и  $\Delta \psi$  — возмущения, подлежащие определению. Ограничиваясь линейными членами с символом  $\Delta$ , уравнение (1.6) запишем в виде

$$\frac{1}{L_{\alpha} L_{\beta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{L_{\beta}}{L_{\alpha}} \left( \frac{\partial \psi_{\infty}^2}{\partial \alpha} \frac{\Delta H}{2} + H_0 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\psi_{\infty} \Delta \psi) - 2\psi_{\infty} \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \Delta \psi - \psi_{\infty}^2 \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \Lambda_{\alpha} L_{\beta} (V_{\alpha 0} \Delta \psi + \psi_{\infty} \Delta V_{\alpha}) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{L_{\alpha}}{L_{\beta}} \left( \frac{\partial \psi_{\infty}^2}{\partial \beta} \frac{\Delta H}{2} + H_0 \frac{\partial}{\partial \beta} (\psi_{\infty} \Delta \psi) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2\psi_{\infty} \frac{\partial H}{\partial \beta} \Delta \psi - \psi_{\infty}^2 \frac{\partial \Delta H}{\partial \beta} \right) - \Lambda_{\alpha} L_{\alpha} (V_{\beta 0} \Delta \psi + \psi_{\infty} \Delta V_{\beta}) \right] \right\} = \Lambda_{\alpha} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial T} \tag{3.2}$$

Толщину слоя при  $\alpha = \alpha_1$  представим в виде

$$H_+(\alpha_1, \beta, \tau, T) = H_0(\alpha_1, \beta) + \Delta H(\alpha_1, \beta, T) + H_1 \cos \tau \quad (3.3)$$

Аналогично запишется толщина слоя при  $\alpha = \alpha_2$

$$H_-(\alpha_2, \beta, \tau, T) = H_0(\alpha_2, \beta) + \Delta H(\alpha_2, \beta, T) + H_1 \cos \tau \quad (3.4)$$

Граничные условия уравнения (3.2) с учетом (3.3) и (3.4) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta \psi(\alpha_1, \beta, T) &= \frac{H_0(\alpha_1, \beta)}{\psi_\infty(\alpha_1, \beta)} \Delta H(\alpha_1, \beta, T) \\ \Delta \psi(\alpha_2, \beta, T) &= \frac{H_0(\alpha_2, \beta)}{\psi_\infty(\alpha_2, \beta)} \Delta H(\alpha_2, \beta, T) \end{aligned} \quad (3.5)$$

К этим условиям присоединим начальное условие

$$\Delta \psi(\alpha, \beta, T = 0) = \Delta \psi_0 \quad (3.6)$$

Определив функцию  $\Delta \psi = \Delta \psi(\alpha, \beta, T)$ , можно определить давление в возмущенном движении стенки

$$\Delta P = \frac{\Delta \psi(\alpha, \beta, T)}{H_0(\alpha, \beta) + H_1 \cos \tau} - \psi_\infty(\alpha, \beta) \frac{\Delta H(\alpha, \beta, T)}{[H_0(\alpha, \beta) + H_1 \cos \tau]^2} \quad (3.7)$$

В среднем за один период высокочастотных колебаний давление в газовом слое определяется

$$\langle \Delta P \rangle = \frac{\Delta \psi(\alpha, \beta, T)}{[H_0^2(\alpha, \beta) - H_1^2]^{1/2}} - \psi_\infty(\alpha, \beta) \frac{H_0(\alpha, \beta) \Delta H(\alpha, \beta, T)}{[H_0^2(\alpha, \beta) - H_1^2]^{3/2}} \quad (3.8)$$

Величина реакции газового слоя равна

$$\Delta F = P_a l \iint_a G L_\alpha L_\beta \cos \theta \langle \Delta P \rangle d\alpha d\beta \quad (3.9)$$

Здесь  $G$  — площадь выделенной поверхности стенки,  $\theta$  — угол между вектором элементарной силы и выбранным направлением.

**4. Неустановившееся движение газового слоя между двумя параллельными стенками.** Рассмотрим плоское течение газа между стенками, одна из которых свободна и колеблется с большой частотой. На высокочастотные колебания этой стенки накладывается произвольное возмущение. Обозначая  $\alpha = x$  и принимая  $V_{\alpha 0} = V_{\beta 0} = 0$ , уравнение (3.2) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \psi_\infty^2}{\partial x} \frac{\Delta H}{2} + H_0 \frac{\partial}{\partial x} (\psi_\infty \Delta \psi) - 2\psi_\infty \frac{\partial H_0}{\partial x} \Delta \psi - \psi_\infty^2 \frac{\partial \Delta H}{\partial x} \right] = \Lambda_\omega \frac{\partial \Delta \psi}{\partial T} \quad (4.1)$$

Выберем характерный зазор так, чтобы  $H_0 = 1$ . Уравнение (4.1) для слоя газа между параллельными стенками будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial x^2} = \frac{\Lambda_\omega}{\psi_\infty} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial T} \quad (4.2)$$

Краевые условия (3.5) и (3.6) для уравнения (4.2)

$$\Delta \psi_\infty(0, T) = \frac{\Delta H(0, T)}{\psi_\infty}, \quad \Delta \psi(1, T) = \frac{\Delta H(1, T)}{\psi_\infty}, \quad \Delta \psi(x, 0) = \Delta \psi_0(x) \quad (4.3)$$

Применив к (4.2) преобразование Лапласа и приняв  $\Delta\psi_0(x) = 0$ , получим

$$\frac{\partial^2 \Delta\psi^+}{\partial x^2} - \frac{\Lambda_\infty}{\psi_\infty} s \Delta\psi^+ = 0 \quad (4.4)$$

Здесь  $S$  — переменная совершенного преобразования.

Решение уравнения (4.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$\Delta\psi^+(0, s) = \frac{\Delta H^+}{\psi_\infty}, \quad \Delta\psi^+(1, s) = \frac{\Delta H^+}{\psi_\infty} \quad (4.5)$$

запишется так:

$$\Delta\psi^+ = \frac{\Delta H^+}{\psi_\infty} \operatorname{ch} \sigma x + \frac{\Delta H^+}{\psi_\infty} (1 - \operatorname{ch} \sigma) \frac{\operatorname{sh} \sigma x}{\operatorname{sh} \sigma} \quad \left( \sigma = \left( \frac{\Lambda_\infty}{\psi_\infty} s \right)^{1/2} \right) \quad (4.6)$$

Применим к выражению (3.8) преобразование Лапласа

$$\Delta P^+ = \frac{\Delta\psi^+}{(1 - H_1^2)^{1/2}} - \psi_\infty \frac{\Delta H^+}{(1 - H_1^2)^{3/2}} \quad (4.7)$$

Изображение реакции газового слоя (3.9) с учетом (4.6) и (4.7) запишется следующим образом:

$$\Delta f^+ \equiv \frac{\Delta F^+}{p_a l} = \frac{2\Delta H^+}{\psi_\infty (1 - H_1^2)^{1/2}} \frac{1}{\sigma} \operatorname{th} \frac{1}{2} \sigma - \psi_\infty \frac{\Delta H^+}{(1 - H_1^2)^{3/2}} \quad (4.8)$$

Разложив мероморфную функцию в равенстве (4.8) на простейшие дроби, получим

$$\Delta f^+ = \frac{8\Delta H^+}{\Lambda_\infty (1 - H_1^2)^{1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2 + s} - \psi_\infty \frac{\Delta H^+}{(1 - H_1^2)^{3/2}} \quad (4.9)$$

Здесь

$$\alpha_k^2 = \frac{(2k-1)^2 \pi^2 \psi_\infty}{\Lambda_\infty}$$

Теперь можем найти оригинал реакции газового слоя

$$\Delta \dot{f} = \frac{8}{\Lambda_\infty (1 - H_1^2)^{1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \Delta H \exp[-\alpha_k^2 (T - \tau)] d\tau - \psi_\infty \frac{\Delta H}{(1 - H_1^2)^{3/2}} \quad (4.10)$$

Полная реакция газового слоя равна

$$f = \left( \frac{1 + 3/2 H_1^2}{1 - H_1^2} \right)^{1/2} + \frac{8}{\Lambda_\infty (1 - H_1^2)^{1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \Delta H \times \quad (4.11)$$

$$\times \exp[-\alpha_k^2 (T - \tau)] d\tau - \psi_\infty \frac{\Delta H}{(1 - H_1^2)^{3/2}} - 1$$

**5. Устойчивость.** Рассмотрим устойчивость свободной твердой стенки. Уравнение движения стенки на газовом слое около равновесного положения запишется так:

$$\frac{d^2}{dT^2} (\Delta H) = k \Delta f \quad \left( k = \frac{p_a l}{m \delta \omega_0^2} \right) \quad (5.1)$$

Здесь  $k$  — безразмерный параметр,  $m$  — масса подвижной стенки.

Применив к уравнению (5.1) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим

$$s^2 \Delta H^+ - \frac{8 \Delta H^+ k}{\Lambda_\infty (1 - H_1^2)^{1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2 + s} + \psi_\infty \frac{k \Delta H^+}{(1 - H_1^2)^{3/2}} = 0 \quad (5.2)$$

Исследование характеристического уравнения (5.2) показывает, что равновесное положение свободной стенки устойчиво при  $H_1 < 1$  и любых значениях параметров  $k > 0$  и  $\Lambda_\infty > 0$ .

Оценим собственную частоту  $\omega$  колебаний свободной стенки, которые накладываются на колебания с заданной большой частотой. По истечении достаточно большого промежутка времени реакция смазочного слоя будет равна

$$\Delta f^+ = \frac{8 \Delta H^+}{\pi^2 (1 - H_1^2)^{1/2} (1 + {}^{3/2} H_1^2)^{1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k - 1)^2} - \psi_\infty \frac{\Delta H^+}{(1 - H_1^2)^{3/2}} \quad (5.3)$$

Ряд в равенстве (5.3) сходится и сумма ряда равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (5.4)$$

Приближенное значение реакции газового слоя можно определить из равенства (5.3) с учетом (5.4)

$$\Delta f^+ = - \frac{{}^{5/2} H_1^2}{(1 + {}^{3/2} H_1^2)^{1/2} (1 - H_1^2)^{3/2}} \Delta H^+ \quad (5.5)$$

Запишем приближенное характеристическое уравнение

$$s^2 + \frac{{}^{5/2} H_1^2 k}{(1 + {}^{3/2} H_1^2)^{1/2} (1 - H_1^2)^{3/2}} = 0 \quad (5.6)$$

Модуль корня характеристического уравнения (5.6) равен

$$|s| = \left[ \frac{{}^{5/2} H_1^2 k}{(1 + {}^{3/2} H_1^2)^{1/2} (1 - H_1^2)^{3/2}} \right]^{1/2} \quad (5.7)$$

Размерная частота определяется согласно равенству

$$\omega = \omega_0 |s| \quad (5.8)$$

Величина  $|s|$  имеет порядок единицы и  $\omega \ll v$ . Колебательный процесс во времени изображен на фиг. 3.

Поступило 13 VII 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pan C. H. T., Malonoski S. B., Broussard P. H. Theory and experiment squeeze-film gas bearing, pt 1. Cylindrical journal bearing. ASME, Ser. D, J. Basic Engng, Trans., 1966, vol. 88, No. 2.
2. Рабинович Е. Б., Снопов А. И. Вибрирование пластины над слоем теплопроводного газа. Машиноведение, 1970, № 3.
3. Pan C. H. T. On asymptotic analysis of gaseous squeeze-film bearing. Trans. ASME, J. Lubrication Techn., 1967.