№ 1 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1971

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ВЯЗКОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Д. ПЕРМИНОВ

(*Москва*)

Приводятся постановка задачи и некоторые результаты численного решения задачи об осесимметричных телах с заданными длиной, относительной толщиной, объмом или суммарным потоком тепла, обладающих минимальным сопротивлением в гиперзвуковом потоке вязкого газа. Считается, что давление на поверхности тела дается модифицированным законом Ньютона; коэффициент трения определяется по методу локальной пластины.

При расчетах аэродинамических характеристик тел в вязком гиперзвуковом потоке часто считают, что давление на теле дается модифицированным законом Ньютона [1, 2], а коэффициент трения постоянен. В этом случае вариационные задачи о телах минимального сопротивления сводятся к минимизации некоторого явным образом выписанного функционала [3, 4]. Получающиеся при этом уравнения Эйлера нелинейны, что сильно сужает класс задач, которые могут быть исследованы аналитически. Численный метод локальных вариаций [5] позволяет решать многие из возникающих вариационных задач с относительно малыми затратами машинного времени [6, 7]. Точные и численные решения вариационных задач [4, 6, 7] указывают на то, что сопротивление трения не только составляет значительную часть полного сопротивления тонких оптимальных тел, но и может оказаться существенным при определении формы нетонких тел минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке. Это обстоятельство указывает на необходимость решения вариационных задач с более реальным законом распределения трения вдоль поверхности тела (особенно для нетонких тел).

1. Постановка задачи. Коэффициент сопротивления плоского или осесимметричного тела, обтекаемого потоком газа, дается формулой

$$c_x = \frac{X}{q_\infty S} = \frac{1}{S}\int_0^S [-c_p(\mathbf{n}, \mathbf{u}_x) + c_f(\mathbf{t}, \mathbf{u}_x)]\, dS \tag{1.1}$$

Здесь X — сопротивление; q_∞ — скоростной напор в набегающем потоке; S — некоторая площадь; $\mathbf{u}_x$ — единичный вектор вдоль оси x; $\mathbf{n}$ и $\mathbf{t}$ — единичные нормальный и касательный векторы к элементу поверхности dS, а c_p и c_f — соответственно коэффициенты давления и трения. Если принять, что распределение давления дается законом Ньютона с модифицирующим множителем, учитывающим зависимость давления p_0^* в критической точке за прямым скачком уплотнения от числа M_∞ [1, 2], то для коэффициента давления получим

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = \frac{2(\pi - \pi_\infty)}{\gamma M_\infty{}^2 \pi_\infty} = \frac{2(1-\pi_\infty)\dot{y}^2}{\gamma M_\infty{}^2 \pi_\infty (1+\dot{y}^2)}, \quad \pi = \frac{p}{p_0^*}, \quad \pi_\infty = \frac{p_\infty}{p_0^*} \tag{1.2}$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей, $r_b = y = y(x)$ — уравнение формы тела, а $\dot{y} = dy / dx$.

Для получения выражения для коэффициента трения c_f воспользуемся гипотезой локального подобия, согласно которой напряжение трения на стенке τ_b зависит от параметров в данном сечении так же, как при обтекании плоской пластины постоянной температуры потоком газа с местным числом M. В переменных Дородницына [3]

$$\xi = \int_0^s \rho_\delta \mu_\delta u_\delta r_b^{2j} ds, \qquad \eta(s, y_1) = \frac{u_\delta r_b^{2j}}{\sqrt{2\xi}} \int_0^{y_1} \rho \, dy_1, \qquad f = \int_0^\eta \frac{u}{u_\delta} d\eta$$

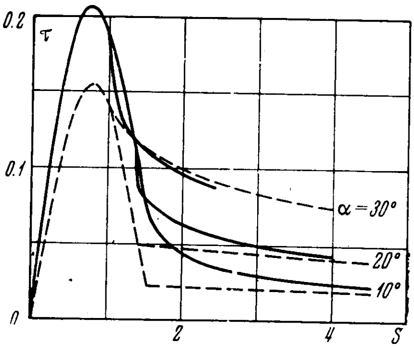
(индекс δ относится к внешней границе пограничного слоя, индекс b — к стенке, а $j = 0, 1$ для плоского или осесимметричного случаев соответственно) можно написать

$$\tau_b = \mu_b f''(0) \rho_b u_\delta^2 r_b^j / \sqrt{2\xi}$$

Будем считать, что зависимость вязкости от температуры дается формулой $\mu / \mu_0^* = (T / T_0^*)^\omega$, а вдоль границы пограничного слоя справедливы соотношения

$$\frac{p}{p_0^*} = \left(\frac{\rho}{\rho_0^*}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0^*}\right)^{1/b},$$

$$u_\delta^2 = \frac{2p_0^*}{b\rho_0^*}(1 - \pi^b), \qquad b = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$



Фиг. 1

Индексы ($_0$*) относятся, как и раньше, к критической точке за прямым скачком уплотнения.

Для τ_b имеем

$$\tau_b = f''(0) \left(\frac{T_b}{T_0^*}\right)^{\omega - 1} (\rho_0^* \mu_0^*)^{1/2} \left(\frac{2p_0^*}{b\rho_0^*}\right)^{3/4} \pi (1 - \pi^b) r_b^j \times$$

$$\times \left(2 \int_0 \pi^a (1 - \pi^b)^{1/2} r_b^{2j} ds\right)^{-1/2}$$

$$a = (1 - \omega + \omega\gamma) / \gamma$$

Сравнивая в частном случае пластинки полученную формулу для τ_b с формулой Янга [8], которая дает напряжение трения на пластинке для различных чисел M_∞, P, ω и различных отношений температур T_b / T_0^*, получаем, что

$$f''(0) = A (T_0^* / T_b)^{\omega - 1} \pi^{b(\omega - 1)} / \sqrt{2}$$

$$A = 0.664 \{0.45 + [0.55 (T_b / T_0^*) + 0.18 \sqrt{P} (1 - \pi^b)] \pi^{-b}\}^{1/2(\omega - 1)}$$

Окончательно для c_f имеем

$$c_f = \frac{\tau_b}{q_\infty} = \frac{4\tau}{(\gamma - 1) M_\infty^2 \pi_\infty \sqrt{R_{0*}}}, \qquad R_{0*} = \frac{\rho_0^* V_m R_1}{\mu_0^*}, \qquad V_m^2 = 2RT_0^* / b$$

$$\tau = (A / 2) \pi^a (1 - \pi^b) \, y^j \left(\int_0^{\bar{s}} \pi^a (1 - \pi^b)^{1/2} y^{2j} d\bar{s}\right)^{-1/2}, \qquad \bar{s} = s / R_1 \qquad (1.3)$$

Здесь R_1 — радиус миделя или половина толщины.

На фиг. 1 приведены результаты расчетов τ по формуле (1.3) в сравнении с точным решением [9] на сферически затупленных конусах с полууглами раствора 0, 10 и 30° при $M_\infty = 6.0$, $P = 0.7$, $\gamma = 1.4$, $\omega = 0.5$, $T_b / T_0^* = 0.01$. (Сплошные линии — точное решение, пунктир — формула (1.3).) Сравнение показывает, что, как и следовало ожидать, асимптотические значения даются формулой (1.3) довольно точно, а максимальные значения на затуплении несколько хуже.

Воспользовавшись гипотезой локального подобия и интегральным уравнением энергии в криволинейных координатах, можно плоучить формулу для суммарного потока тепла [10]

$$\chi = S_*^2 R_* P^{4/3} = B \int_0^1 A^2 y^{2j} \pi^a (1-\pi^b)^{1/2} \sqrt{1+\lambda^2 y'^2}\, d\bar{x} \tag{1.4}$$

где

$$S_* = \frac{Q}{2\pi^j l R_1^j \rho_* u_* (H_* - h_b)},$$

$$R_* = \frac{\rho_* u_* l}{\mu_*} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)-\omega} \frac{R_{0*}}{\lambda}$$

$$B = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{1}{\gamma-1} + \omega, \quad y = \frac{r_b}{R_1},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \lambda = \frac{R_1}{l}$$

(звездочкой обозначены критические параметры за прямым скачком уплотнения). Пользуясь (1.4), можно получить выражение для локального потока тепла.

Удовлетворительное совпадение полученных таким образом местных потоков тепла на сферически затупленных конусах с результатами приближенной теории Лиза [10] и с точным решением [9] указывает на возможность использования формулы (1.4) для расчета суммарного потока тепла.

Известные решения вариационных задач о телах минимального сопротивления при $c_f = \mathrm{const}$ показывают, что оптимальным часто является тело с плоской передней частью (торцом) [4]. При этом формула (1.2) становится существенно менее точной и дает на торце $\pi = 1$ и $u_\delta = 0$, что согласно (1.4) приводит к нулевому потоку тепла через торец. Поэтому для определения газодинамических параметров на торце необходимо знать более детальную картину течения, для чего можно использовать метод интегральных соотношений в простейшем виде [11] в предположении, что скорость на кромке торца равна скорости звука. Выпишем основные формулы для этого случая [10].

Распределение скорости на торце в плоском случае может быть получено в виде

$$\frac{y}{y_0} = \frac{2\nu}{1+\nu^2} \left[1 - \frac{\pi_\infty}{2}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/(\gamma-1)}\right] \times$$
$$\times \left[1 - \frac{\pi_\infty}{1+\nu^2}\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\nu^2\right)^{1/(\gamma-1)}\right]^{-1}$$

Распределение скорости на торце в осесимметричном случае получено для $M_\infty = \infty$

$$\frac{y}{y_0} = \nu \left(\frac{\gamma+1}{4\gamma+2} + \frac{3\gamma+1}{4\gamma+2}\nu^2\right)^{-(2\gamma+1)/(3\gamma+1)}, \quad \nu = u/u_*$$

Используя формулы для получения на торце значений c_{xp}, ξ и χ и переходя при интегрировании от переменной y к переменной ν, которая, по предположению, меняется на торце от 0 до 1, получаем

$$c_{xp} = J_x^{(j)} y_0^{j+1}, \qquad \xi = J_\xi^{(j)} y_0^{2j+1}, \qquad \chi = J_\chi^{(j)} y_0^{2j+1}$$

$$J_x^{(0)} = \frac{4\theta}{\gamma(\gamma+1)\pi_\infty M_\infty^2} \int_0^1 (1-\nu^2)(\varphi^{1/b} - \pi_\infty)\varphi^{1/(\gamma-1)-\omega}\zeta(\nu)\, d\nu$$

$$J_\xi^{(0)} = \frac{2\theta\lambda}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}\int_0^1 K_1(\nu)\,d\nu, \quad J_x^{(0)} = \lambda\theta\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\varkappa-1}\int_0^1 A^2K_1(\nu)\,d\nu$$

$$J_x^{(1)} = \frac{4(\gamma+1)}{\gamma\pi_\infty(4\gamma+2)M_\infty^2}\int_0^1 \nu(1-\nu^2)(\varphi^{1/b}-\pi_\infty)\psi^{-(7\gamma+3)/(3\gamma+1)}d\nu$$

$$J_\xi^{(1)} = \lambda\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}\frac{\gamma+1}{4\gamma+2}\int_0^1 K_2(\nu)\,d\nu,$$

$$J_x^{(1)} = \lambda\frac{\gamma+1}{4\gamma+2}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\varkappa}\int_0^1 A^2K_2(\nu)\,d\nu$$

$$\psi(\nu) = \frac{\gamma+1}{4\gamma+2}+\frac{3\gamma+1}{4\gamma+2}\nu^2, \quad \varphi(\nu) = \pi^b = 1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\nu^2$$

$$\theta = 1-\frac{\pi_\infty}{2}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/(\gamma-1)},$$

$$\zeta(\nu) = \frac{(\gamma+1)\left[(1+\nu^2)\varphi^{1/(\gamma-1)}-\pi_\infty\right]-2\gamma\nu^2\varphi^{1/(\gamma-1)}}{\left[(1+\nu^2)\varphi^{1/(\gamma-1)}-\pi_\infty\right]^2}$$

$$K_1(\nu) = \nu(1-\nu^2)\varphi^{\varkappa-1+1/(\gamma-1)}\zeta(\nu), \qquad K_2(\nu) = \nu^3(1-\nu^2)\varphi^{\varkappa}\psi^{-(9\gamma+4)/(3\gamma+1)}.$$

Переходя к безразмерным переменным $\bar{x} = x/l$ и $\bar{y} = y/R_1$ и взяв S равным площади миделя $2^{1-j}\pi^jR^{j+1}$, выпишем исходные формулы для коэффициента сопротивления, объема и потока тепла (черточки опущены)

$$c_x = c_{xp}+c_{xf} = J_x^{(j)}\,y_0^{j+1}+\frac{2^{1+j}\lambda^2(1-\pi_\infty)}{\pi_\infty\gamma M_\infty^2}\int_0^1\frac{y^{\cdot 3}y^j\,dx}{1+\lambda^2y^{\cdot 2}}+$$

$$+\frac{2^{j+2}}{\lambda^{1/2}(\gamma-1)\pi_\infty M_\infty^2\sqrt{R_{0*}}}\int_0^1 \tau y^j\,dx \tag{1.5}$$

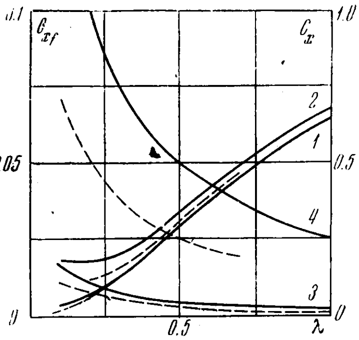
$$\tau = \frac{A\pi^a(1-\pi^b)y^j}{2\sqrt{\int_0^x \pi^a(1-\pi^b)^{1/2}y^{2j}(1+\lambda^2y^{\cdot 2})^{1/2}\,dx+J_\xi^{(j)}\,y_0^{2j+1}}} \tag{1.6}$$

$$v = \frac{V}{2^{j-1}\pi^jR_1^{j+1}l} = \int_0^1 y^{j+1}\,dx \tag{1.7}$$

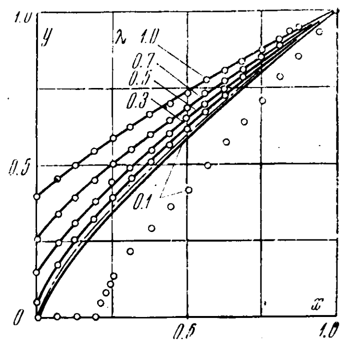
$$\chi = J_x^{(j)}\,y_0^{2j+1}+B\int_0^1 A^2y^{2j}\pi^a(1-\pi^b)^{1/2}(1+\lambda^2y^{\cdot 2})^{1/2}\,dx \tag{1.8}$$

Теперь задача о теле минимального полного сопротивления в вязком гиперзвуковом потоке (в классе тел, состоящих из переднего торца и боковой поверхности, максимальный наклон которой ограничен требованием сверхзвукового характера течения на ней) может быть сформулирована следующим образом: найти функцию $y = y(x)$, минимизирующую функционал (1.5) при наличии или отсутствии) изопериметрических ограничений (1.7) и (1.8).

2. Метод решения и результаты. Численный метод локальных вариаций [5], использованный для решения сформулированной вариационной задачи, был модифицирован так, чтобы при подсчете изменения функционала от данной вариации формы в точке x_i учесть перераспределение трения, которое согласно (1.6) происходит при такой вариации во всех точках $x \geqslant x_i$. Такая модификация, техническая сторона которой очевидна, позволила решить поставленную задачу с требуемой точностью. Естественное ограничение на точность получаемого решения возникает в тех



Фиг. 2



Фиг. 3

случаях, когда в качестве решения получается функция $y = \varphi(x)$, для которой $\varphi'(x) \to \infty$ в некоторой точке x_0. Такая особенность имеет место, например, для тонких осесимметричных тел при $R_{0*} \to \infty$ в точке $x_0 = 0$.

Решение задачи о теле минимального сопротивления давления ($\tau \equiv 0$) легко получить аналитически. При $j = 1$ имеем из (1.5)

$$c_{xp} = J_x^{(1)} y_0^2 + B_1 \int_0^1 \frac{y'^3 y \, dx}{1 + \lambda^2 y'^2}, \qquad B_1 = \frac{4\lambda^2 (1 - \pi_\infty)}{\gamma \pi_\infty M_\infty^2}$$

Решение соответствующего уравнения Эйлера можно выписать в параметрическом виде

$$x = -\frac{c}{2} \left[\lambda^4 \ln t + \frac{\lambda^2}{t^2} + \frac{3}{4t^4} \right]_{t_0}^{t}, \qquad y = -\frac{c}{2} \frac{(1 + \lambda^2 t^2)^2}{t^3} \tag{2.1}$$

где t_0 — положительный корень биквадратного уравнения

$$(2J_x^{(1)} - B_1 / \lambda^2) \lambda^4 t_0^4 + (4J_x^{(1)} - 3B_1 / \lambda^2) \lambda^2 t_0^2 + 2J_x^{(1)} = 0$$

Постоянная интегрирования c и конечное значение параметра $t = t_1$ находятся из условий

$$x(t_1) = y(t_1) = 1$$

Минимальное значение c_{xp} вычисляется по формуле

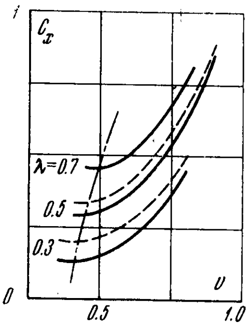
$$c_{xp} = J_x^{(1)} y_0^2 - (B_1 c^2 / 4) (\lambda^8 t^2 / 2 - \lambda^4 \ln t + 5\lambda^2 / 2t^2 + {}^3/_4 t^4) \Big|_{t_0}^{t_1} \tag{2.2}$$

Анализируя выписанное решение, легко видеть, что при

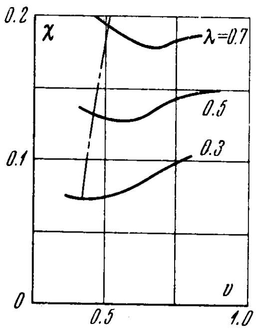
$$\lambda \to 0, \quad t_0 = y_0{}' \to \infty, \quad y_0 \to 0, \quad \text{а} \quad y \to x^{3/4}.$$

Это соответствует известному решению для тонких тел [3, 4]. Так как в методе локальных вариаций подынтегральная функция заменяется кусочно-линейной, то при $\lambda \to 0$ точность получаемого решения уменьшается. В случае необходимости требуемая точность расчетов для тонких тел заданного удлинения может быть обеспечена с помощью перехода к переменной $x = x(y)$, поскольку производная dx / dy не обращается в бесконечность.

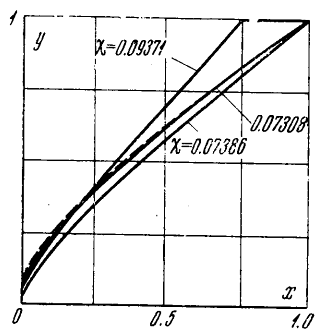
На фиг. 2 и фиг. 3 приведены результаты решения задачи о $c_{x\,\min}$ при различных значениях относительной толщины λ для $M = 6.0$, $P = 0.7$, $T_b / T_0 = 0.1$, $\omega=0.5$, $R_{0*} = 10^6$ и 10^4. На фиг. 2 сплошными линиями приведены зависимости полного сопротивления c_x и сопротивление трения c_{xf} от относительной толщины для $R_{0*} = 10^6$ (кривые *1* и *3* соответственно) и для $R_{0*} = 10^4$ (кривые *2, 4*), а штрих-пунктиром — зависимость $c_{xp}(\lambda)$, рассчитанная по формуле (2.2). На фиг. 3 для нескольких значений λ приведены формы тел минимального сопротивления. Сплошными линиями даны численные решения при $R_{0*} = 10^6$, полыми кружочками — при $R_{0*} = 10^4$, а штрих-пунктиром — результаты расчетов по формуле (2.1) (тела минимального сопротивления давления), которые совпадают с полученными по методу



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

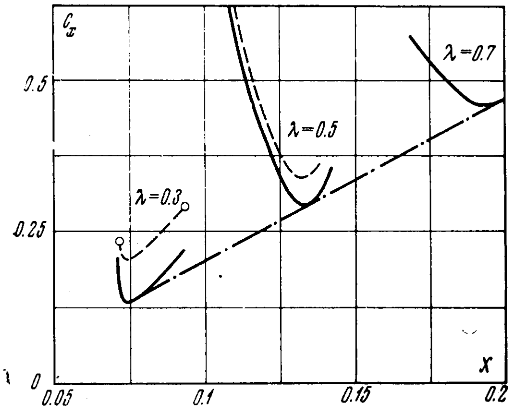
локальных вариаций при всех $\lambda \geqslant 0.3$. Этот факт указывает на то, что для $\lambda \geqslant 0.3$ при изменении числа R_{0*} от 10^6 до 10^4 форма тела, имеющего минимальное полное сопротивление в вязком гиперзвуковом потоке, определяется в основном распределением давления и может быть найдена без учета трения. Заметим при этом, что сопротивление трения c_{xf} на теле минимального сопротивления при $\lambda = 0.3$ и $R_{0*} = 10^4$ составляет $\sim {}^1/_3$ полного сопротивления. При малых $\lambda \sim 0.1$ с возрастанием трения оптимальными являются тела с «иглой» в передней части, распределение давления и трения на которых неправильно описывается в рамках принятых в данной работе допущений. Отметим лишь, что решения этого класса были получены для осесимметричных тел произвольного удлинения при значениях коэффициента $c_f = \text{const}$, больших некоторого критического значения, которое, вообще говоря, является функцией относительной толщины [4].

Для сравнения на фиг. 2 приведены пунктиром результаты решения задачи с $c_f = \text{const} = R_{0*}^{-1/2}$, которые подтверждают сделанное выше заключение о слабой зависимости формы тела минимального сопротивления от закона распределения трения.

При необходимости для заданного λ иметь больший относительный объем v или меньший тепловой поток χ, чем получаемые в результате решения изложенной выше задачи, возникает задача о минимуме функционала (1.5) при изопериметрическом ограничении (1.7) или (1.8). Эти изопериметрические задачи решались также методом локальных вариаций с использованием неопределенных множителей Лагранжа, по которым строился сходящийся интеративный процесс (по методу Ньютона). В качестве начального приближения для множителей μ_1 (при заданном v) или ν_1 (при заданном χ) можно выбрать, например, нулевые значения μ_1 или ν_1, что соответствует решению задачи о теле минимального сопротивления без изопериметрических ограничений.

Зависимости коэффициента сопротивления c_x и теплового потока χ от относительного объема v, полученные в результате решения задачи о теле заданного объема с минимальным сопротивлением в вязком гиперзвуковом потоке для тех же значений M_∞, P, R_{0*}, ω, T_b / T_0 и для $\lambda = 0.3$, 0.5 и 0.7 приведены на фиг. 4, 5; сплошные линии — результаты расчетов при $R_{0*} = 10^6$, пунктир — $R_{0*} = 10^4$, а штрих-пунктиром даны зависимости, полученные из решения задачи без ограничения на объем. Как видно из фиг. 5, для $\lambda = 0.5$ и 0.7 увеличение объема приводит сначала к уменьшению полного теплового потока, в то время как для $\lambda = 0.3$ такого уменьшения не получено. Анализируя формы полученных оптимальных тел, можно еще раз отметить, что изменение R_{0*} от 10^6 до 10^4 практически не влияет на форму оптимальных тел.

На фиг. 6, 7 приведены результаты решения задачи об осесимметричном теле минимального сопротивления с заданной относительной толщиной λ и потоком тепла χ. На фиг. 7 приведены для $\lambda = 0.3$, 0.5 и 0.7 зависимости $c_x(\chi)$ при числах $R_{0*} = 10^6$ (сплошные линии) и 10^4 (пунктир); штрих-пунктиром показана та же зависимость, полученная без ограничения на поток тепла. Отметим, что для $\lambda = 0.3$ при дальнейшем уменьшении потока тепла оптимальными телами опять получаются тела с иглой в передней части; характер зависимости $c_x(\chi)$ при этой относительной толщине качественно подтверждает вывод работы [12] о том, что тела минимального сопротивления характеризуются малым потоком тепла. На фиг. 6 для $\lambda = 0.3$ приведены формы оптимальных тел, соответствующие некоторым значениям потока тепла. Увеличение потока тепла по сравнению с величиной, которая имеет место на теле с минимальным сопротивлением (без ограничения на поток тепла), приводит сначала к некоторому уменьшению объема, а потом к росту, причем последний достигается за счет появления в хвостовой части тела участка постоянной толщины (фиг. 6). Для $\lambda = 0.5$ и 0.7 увеличение потока тепла приводит к увеличению торца и объема, а форма образующей становится более полной, приближаясь к конической. Изменение числа R_{0*} от 10^6 до 10^4 опять практически не сказывается на форме оптимальных тел.



Фиг. 7

Поступило 23 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Oliver R. E. On experimental investigation of flow about simple blunt bodies at nominal Mach number of 5.8. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 2.
2. Гродзовский Г. Л. Некоторые особенности обтекания тел при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 6.
3. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Theory of optimum aerodynamic shapes. New York — London, Acad. Press, 1965. (Рус. перев.: Теория оптимальных аэродинамических форм. М., «Мир», 1969.)
5. Черноусько Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 4.
6. Перминов В. Д. Крылья заданного объема с максимальным аэродинамическим качеством в гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
7. Перминов В. Д. Крылья с оптимальными характеристиками в гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
8. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
9. Анкудинов А. Л. Результаты расчета пограничного слоя на затупленных конусах в сверхзвуковом потоке. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 5.
10. Белянин Н. М. Определение формы тела с минимальным тепловым потоком при ламинарном режиме течения в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
11. Черный Г. Г. Гиперзвуковое обтекание крыльев при больших углах атаки. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 2.
12. Гродзовский Г. Л. О телах вращения с минимальным коэффициентом лобового сопротивления и малой теплопередачей при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.