

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ НА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТОКА В СЛОЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Б. С. РАУХМАН

(Ленинград)

Строится интегральное уравнение для решения задачи обтекания решетки профилей на осесимметричной поверхности тока в слое переменной толщины. Эта задача представляет собой одну из двух двумерных задач, к которым приближенно сводится общая задача пространственного течения жидкости в турбомашине [1, 2]. Для решения ее наряду с методами, основанными на рассмотрении течения в канале, получили развитие методы, в которых рассматривается течение в решетчатой области. Эти последние могут быть условно разделены на две группы.

Методы первой группы [3-5] основываются на упрощающих предположениях о характере изменения слоя, благодаря чему удается построить в замкнутом виде решения дифференциальных уравнений, описывающих течение в слое переменной толщины (например, через гармонические функции). Такой подход позволяет получить решение сравнительно просто, но в случае произвольного характера изменения слоя оно является приближенным, причем степень его приближения к точному решению в общем случае оценить не представляется возможным.

В методах второй группы [6, 7] не накладывается каких-либо ограничений на характер изменения толщины слоя. Общее решение представляется в виде интегральных соотношений и отыскивается итерационными способами. В этом случае принципиально может быть получено точное решение задачи при произвольном характере изменения слоя, если обеспечена сходимость итерационного процесса. Однако численное решение задачи с реализацией итерационного процесса оказывается весьма трудоемким, поэтому практически расчет ограничивается первым приближением.

В отличие от перечисленных методов, дающих в первом приближении точное решение только в случае постоянного слоя, построенное уравнение позволяет получить в том же приближении решение для слоя, аппроксимируемого гиперболой [3, 4].

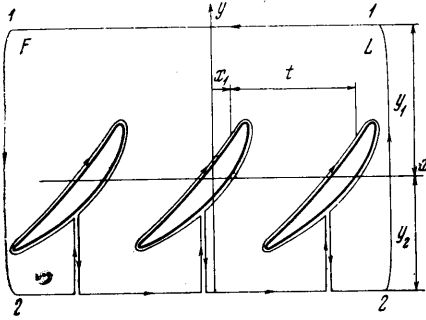
1. Интегральное уравнение обтекания решетки профилей. Применив к односвязной области F , ограниченной контуром L (фиг. 1), формулу Грина для оператора Лапласа и устремив наружный контур области вместе с числом профилей к бесконечности, можно получить интегральное соотношение для функции $u(x, y)$ в области решетки профилей

$$u(x, y) = \int_D \Delta u L_1(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta + \int_i \frac{\partial u}{\partial \sigma} K_1(\xi - x, \eta - y) d\sigma + \\ + \int_i \frac{\partial u}{\partial n} L_1(\xi - x, \eta - y) d\sigma + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_2 \right] y + \\ + \frac{1}{2} [u(x, y_1) + u(x, y_2)] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 y_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_2 y_2 \right] \quad (1.1)$$

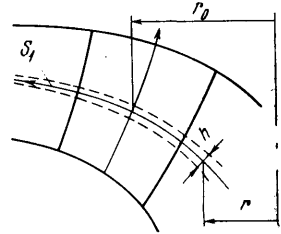
$$L_1 = \frac{1}{4\pi} \ln 2 \left[\operatorname{ch} \frac{2\pi}{t} (\eta - y) - \cos \frac{2\pi}{t} (\xi - x) \right] \quad (1.2)$$

$$K_1 = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} [\pi(\eta - y)/t]}{\operatorname{tg} [\pi(\xi - x)/t]} \quad (1.3)$$

Здесь l — контур одного из профилей решетки, рассматриваемого в качестве основного; D' — область одного периода решетки, внутри которой заключен основной профиль (без площади, ограниченной контуром профиля); ξ, η, σ — переменные интегрирования по области D' и контуру профиля l ; $(\partial u / \partial y)_1$ и $(\partial u / \partial y)_2$ — производные функции $u(x, y)$ в сечениях $y = y_1$ и $y = y_2$ далеко перед и за решеткой, t — шаг решетки профилей в плоскости x, y .



Фиг. 1. Решетка профилей в плоскости x, y



Фиг. 2. Схема проточной части

Задача обтекания решетки профилей на осесимметричной поверхности тока S_1 (фиг. 2) в слое с толщиной $h(y)$ потенциальным потоком несжимаемой жидкости сводится после отображения поверхности S_1 на плоскость x, y к решению дифференциального уравнения для функции тока ψ или для потенциала скорости ϕ при соответствующих краевых условиях [1].

Уравнение для функции тока ψ абсолютного движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{d \ln h}{dy} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

На контуре профиля функция тока ψ и ее касательная производная $\partial \psi / \partial s$ удовлетворяют условиям

$$\psi(s) = \omega \int_0^{s(s)} h \frac{r^2}{r_0} d\eta + c, \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = \omega h \frac{r^2}{r_0} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (1.5)$$

Здесь ω — угловая скорость вращения решетки, r и r_0 — расстояния до оси турбомашинны от текущей точки осесимметричной поверхности S_1 и от выбранного начала координат соответственно (фиг. 2); c — постоянная.

Для получения интегрального уравнения обтекания решетки преобразуем предварительно уравнение (1.4), выполнив для этого подстановку

$$\psi = h^{1/2} \Psi \quad (1.6)$$

Уравнение относительно Ψ будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - m(y) \Psi = 0 \quad \left(m(y) = \frac{1}{h^{-1/2}} \frac{d^2 h^{-1/2}}{dy^2} \right) \quad (1.7)$$

Представим функцию $\Psi(x, y)$ в виде суммы

$$\Psi(x, y) = \Psi_0(x, y) + \Psi_1(x, y) \quad (1.8)$$

Функция

$$\Psi_0(x, y) = h^{-1/2} \psi_0(x, y) = h^{-1/2} \left(-v_{0y}x + v_{0x} \int_0^y h d\eta \right) \quad (1.9)$$

определяет некоторый невозмущенный поток в плоскости x, y со скоростями

$$v_y = \frac{v_{1y}h_1}{h} = \frac{v_{0y}}{h}, \quad v_x = v_{0x}$$

Функция $\Psi_1(x, y)$ определяет поток, обусловленный возмущающим влиянием решетки. Применим интегральное соотношение (1.1) к функции Ψ_1 .

Нормальная производная функции тока $\partial\psi / \partial n$ связана с относительной скоростью $w(s)$ на контуре профиля соотношением

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \right)_l = hw(s) + \omega h \frac{r^2}{r_0} \frac{\partial x}{\partial s} \quad (1.10)$$

Учитывая представление (1.8), для функции $\Psi_1(x, y)$ получим

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) = & \iint_D m(\eta) \Psi_1(\xi, \eta) L_1 d\xi d\eta + \int_l h^{1/2} w(\sigma) L_1 d\sigma + \\ & + \int_l p(\xi, \eta) (L_1 d\xi + K_1 d\eta) + v_{0y} \int_l h^{-1/2}(\eta) (K_1 d\xi - L_1 d\eta) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} \right)_1 + \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} \right)_2 \right] y + \frac{1}{2} [\Psi_1(y_1) + \Psi_1(y_2)] - \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} \right)_1 y_1 + \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} \right)_2 y_2 \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p(x, y) = & v_{0y} \frac{dh^{-1/2}}{dy} x - v_{0x} \frac{d}{dy} \left(h^{-1/2} \int_0^y h d\eta \right) + \\ & + \omega r_0 \frac{d}{dy} \left(h^{-1/2} \int_0^y h \frac{r^2}{r_0^2} d\eta \right) + c \frac{dh^{-1/2}}{dy} \end{aligned}$$

Представим $\Psi_1(x, y)$ в двойном интеграле в виде суммы

$$\Psi_1(x, y) = \langle \Psi_1 \rangle(y) + \Psi_1'(x, y) \quad (1.12)$$

Здесь $\langle \Psi_1 \rangle(y)$ — осредненная по шагу функция $\Psi(x, y)$.
Полагая

$$v_{0x} = 1/2 (v_{1x} + v_{2x})$$

где v_{1x} и v_{2x} — составляющие скорости в сечениях 1 и 2, и выполнив при помощи формулы Стокса осреднение скоростей в области решетки,

можно получить

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1 \rangle (y) &= \frac{1}{t} \int_{x_1}^{x_1+t} \Psi_1(\xi, y) d\xi = \\ &= h^{-1/2}(y) \left[\int_l w(\sigma) L_2(\eta, y) d\sigma + \omega r_0 \int_l \frac{r^2}{r_0^2} (L_2 d\xi + K_2 d\eta) \right] \quad (1.13) \\ L_2 &= \frac{1}{2t} \left| \int_{\eta}^y h dy \right|, \quad K_2 = \frac{1}{2t} \text{sign}(y - \eta) h(\eta) (x - \xi). \end{aligned}$$

Отметим, что далеко перед и за решеткой, где отсутствует неравномерность скоростей по координате x , течение, определяемое функцией $\langle \Psi_1 \rangle + \Psi_0$, совпадает с действительным течением в решетке.

Приняв краевые значения Ψ_1 и $\partial \Psi_1 / \partial y$ в сечениях 1 и 2 совпадающими с соответствующими значениями осредненной функции $\langle \Psi_1 \rangle$ и ее производной $d\langle \Psi_1 \rangle / dy$ и проводя преобразования, получим

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= \int_l A(x, y; \sigma) w(\sigma) d\sigma + \omega r_0 \left[\int_l g(\eta) (L_1 d\xi + \right. \quad (1.14) \\ &+ K_1 d\eta) - \int_l g(\eta) (L_3 d\xi + K_3 d\eta) + h^{-1/2}(y) \int_l \frac{r^2}{r_0^2} (L_2 d\xi + K_2 d\eta) \left. \right] + \\ &+ \iint_D m(\eta) \Psi_1'(\xi, \eta) L_1 d\xi d\eta \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_3 &= 1/2 t^{-1} |y - \eta|, \quad K_3 = 1/2 t^{-1} \text{sign}(y - \eta) (x - \xi) \\ A(x, y, \sigma) &= h^{1/2}(\eta) L_1 + h^{-1/2}(y) L_2 - h^{1/2}(\eta) L_3 \\ g(y) &= h^{1/2} \frac{r^2}{r_0^2} - \int_0^y \frac{dh^{1/2}}{d\eta} \frac{r^2}{r_0^2} d\eta \end{aligned}$$

В формуле (1.14) двойной интеграл берется по всей полосе основного периода, включая площадь d , ограниченную контуром профиля, т. е. $D = D' + d$. При этом в области d

$$\Psi_1(x, y) = h^{-1/2}(y) \left(\omega r_0 \int_0^y h \frac{r^2}{r_0^2} d\eta - v_{0x} \int_0^y h d\eta + v_{0y} x + c \right) \quad (1.15)$$

На контуре профиля в соответствии с краевыми условиями задачи функция $\Psi_1(x, y)$ также принимает значение (1.15), следовательно, она непрерывна при переходе через контур профиля.

Устремив x, y к контуру профиля и учитывая, что на контуре выполняется условие (1.15), получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \int_l A(s, \sigma) w(\sigma) d\sigma - h^{-1/2} c &= v_{0y} b_1(s) + v_{1x} b_2(s) + \quad (1.16) \\ &+ \frac{\Gamma}{t} b_3(s) + \omega r_0 b_4(s) - \iint_D m(\eta) \Psi_1'(\xi, \eta) L_1 d\xi d\eta \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma = (v_{1x} - v_{2x}) t$ — циркуляция скорости на профиле в решетке

$$b_1(s) = h^{-1/2}(y) x(s), \quad b_2(s) = -h^{-1/2}(y) \int_0^{x(s)} h d\eta, \quad b_3(s) = -\frac{1}{2} b_2(s)$$

$$b_4(s) = h^{-1/2}(y) \int_0^{y(s)} h \frac{r^2}{r_0^2} d\eta - \left[\int_l g(\eta) (L_1 d\xi + K_1 d\eta) + \right. \\ \left. + h^{-1/2}(y) \int_l \frac{r^2}{r_0^2} (L_2 d\xi + K_2 d\eta) - \int_l g(\eta) (L_3 d\xi + K_3 d\eta) \right] \quad (1.17)$$

Уравнение (1.16) вместе с уравнением циркуляции

$$\int_l w(\sigma) d\sigma = \Gamma - \omega \int_l \frac{r^2}{r} d\xi \quad (1.18)$$

образуют замкнутую систему относительно функции $w(s)$ и постоянной s .

Эта система в принципе должна решаться итерационным путем, так как двойной интеграл в правой части уравнения (1.16) зависит от искомого решения.

Отметим в связи с этим некоторые важные особенности уравнения (1.16). Если $m(y) = 0$, обращается в нуль двойной интеграл в уравнении, и тогда решение может быть получено непосредственно, без итераций. Нетрудно убедиться, что $m(y) = 0$ при

$$h(y) = (\alpha y + \kappa)^{-2} \quad (\alpha, \kappa = \text{const}) \quad (1.19)$$

Таким образом, если в области, заключенной между сечениями 1 и 2, слой может быть аппроксимирован зависимостью (1.19), уравнение (1.16) с исключенным двойным интегралом дает точное решение поставленной задачи.

В общем случае при произвольном характере изменения слоя применение уравнения (1.16), как будет показано ниже, обеспечивает уже в первом приближении получение решения, практически совпадающего с точным, так как неравномерность функции $\Psi_1(x, y)$ по шагу весьма мала, вследствие чего мал и вес двойного интеграла в уравнении.

2. Численное решение задачи. Итерационный процесс при численном решении задачи может быть организован следующим образом. В первом приближении двойной интеграл в уравнении (1.16) принимается равным нулю, и находится решение интегрального уравнения. После этого по формуле (1.14) определяется функция $\Psi_1(x, y)$ в области D' и по формуле (1.15) в области d , а затем с учетом (1.13) находят величины $\Psi_1'(x, y)$. Во втором приближении решается система уравнений для определения добавок $\delta w(s)$ и δs к величинам $w(s)$ и s , найденным в первом приближении

$$\int_l A(s, \sigma) \delta w(\sigma) d\sigma - h^{-1/2} \delta s = - \iint_D m(\eta) \Psi_1'(\xi, \eta) L_1 d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$\int_l \delta w(\sigma) d\sigma = 0 \quad (2.2)$$

Далее итерационный процесс может быть продолжен до сходимости.

Решение интегральных уравнений (1.16), (1.18) и (2.1), (2.2) ищется сведением их к системе линейных алгебраических уравнений. При этом в процессе итераций изменяются только правые части уравнений, а левые остаются неизменными.

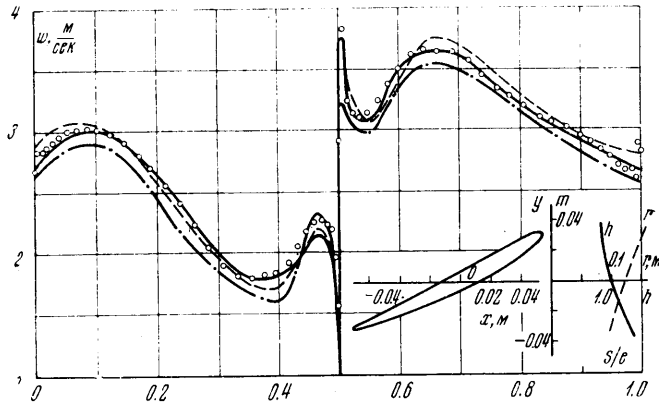
При сведении интегрального уравнения к системе алгебраических используются квадратурные формулы Гаусса аналогично тому, как это сделано в работе [8]. Контур профиля l разбивается на два участка: l_1 (по вогнутой стороне профиля) и l_2 (по выпуклой стороне профиля), причем в качестве концов участков выбираются точки на кромках профиля (например, точки пересечения средней линии профиля с его контуром). Интеграл в левой части уравнения (1.16) представляется в виде суммы двух интегралов по указанным участкам

$$\int_l A(s, \sigma) w(\sigma) d\sigma = \int_{l_1} A(s, \sigma) w(\sigma) d\sigma + \int_{l_2} A(s, \sigma) w(\sigma) d\sigma \quad (2.3)$$

и к каждому из них применяется квадратурная формула Гаусса.

Так как узлы квадратурных формул Гаусса симметричны относительно середины промежутка интегрирования и сгущаются к его концам, такое разбиение профиля обеспечивает сгущение расчетных точек на его кромках. При численной реализации излагаемой методики использованы формулы Гаусса для 32 точек, т. е. общее число точек принято равным 64.

Формулы численного интегрирования не могут быть непосредственно применены к интегралам (2.3), так как ядро интегрального уравнения имеет логарифмическую особенность при $\sigma = s$. Поэтому предварительно эта особенность должна быть устранена [1, 8]. На стороне профиля, противоположной той, где расположена точка



Фиг. 3. Сравнение распределения скорости на профиле, полученного различными способами

$\sigma = s$, функция $A(s, \sigma)$ имеет минимум в некоторой точке, расстояние которой до точки $\sigma = s$ минимально. Вблизи этой точки в случае тонкого профиля функция $A(s, \sigma)$ может изменяться весьма резко, что приводит к существенной погрешности при применении квадратурных формул. Поэтому интеграл по этой стороне профиля также представляется с помощью квадратурных формул после преобразования, аналогичного выполняемому для устранения особенности.

Получаемая система алгебраических уравнений первого приближения решается с четырьмя правыми частями (1.17), дающими обтекание решетки двумя бесциркуляционными потоками — продольным и поперечным, чисто циркуляционным потоком и потоком вытеснения, обусловленным вращением решетки. После этого из условия уравнивания скоростей в двух точках на кромках профиля определяется циркуляция Γ на профиле и находится распределение скорости при заданных режимных параметрах v_{0y} , v_{1x} и ω .

При вычислении двойного интеграла в уравнении (1.16) полоса между сечениями 1 и 2 разбивается прямыми $y = \text{const}$ и интеграл представляется через повторный

$$\iint_D m(\eta) \Psi_1'(\xi, \eta) L_1 d\xi d\eta = \int_{y_2}^{y_1} m(\eta) d\eta \int_{x_1}^{x_1+t} \Psi_1'(\xi, \eta) L_1 d\xi \quad (2.4)$$

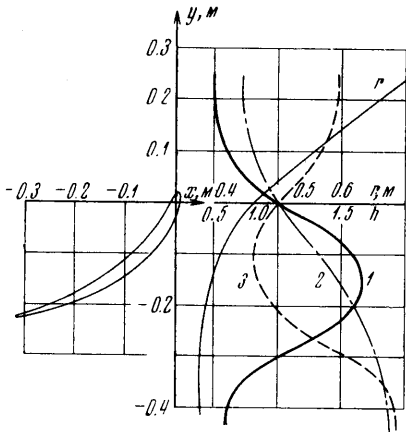
Для вычисления интеграла по ξ использована квадратурная формула Гаусса для шести точек, причем предварительно устраняется особенность в функции $L_1(\xi - x, \eta - y)$ при $\xi = x$, $\eta = y$. Интегрирование по η выполняется по формуле трапеций.

Изложенная методика запрограммирована на ЭЦВМ типа «Урал-2» и «Минск-22».

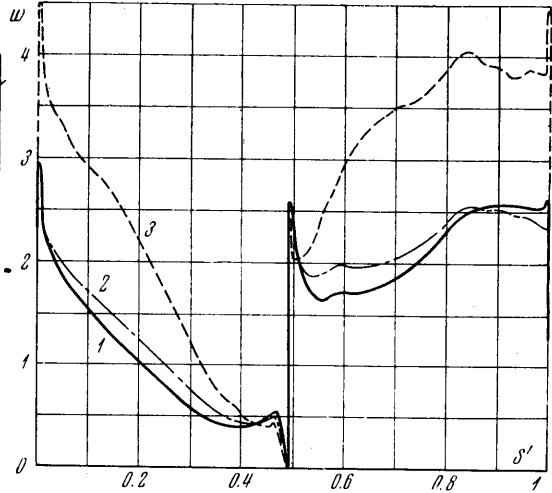
Для плоских прямых решеток профилей предлагаемая методика совпадает с изложенной в работе [8]. Приводимые в [8] данные свидетельствуют о хорошем согласовании результатов, полученных для плоских решеток с помощью предложенной в [8] методики и других методов расчета обтекания.

На фиг. 3 представлено распределение относительной скорости по развертке контура профиля s/l (l — полная длина контура профиля), полученное различными способами для решетки в гиперболическом слое ($t = 0.0656$ м, $r_0 = 0.1253$ м), спроектированной по методике [9]. Параметры расчетного режима: $v_{0y} = 0.908$ м/сек, $\omega = 27.8$ 1/сек, $v_{1x} = 2.68$ м/сек. Сплошная линия — расчет по методике [8], пунктир — по методике [9], штрих-пунктир — по методике [7], точки — по предлагаемой методике.

Для исследования сходимости итерационного процесса проведен расчет обтекания серии решеток профилей гидротурбин, отличающихся густотой и характером изменения слоя. На фиг. 4 представлен профиль одной из решеток ($t = 0.1809$ м, $r_0 = 0.4605$ м) и приведены исследованные зависимости $h(y)$. Соответствующие кривые распределения скорости для режима с параметрами $v_{0y} = 0.89$ м/сек, $\omega = 6,31$ 1/сек, $v_{1x} = 3.02$ м/сек приведены на фиг. 5.



Фиг. 4. Профиль решетки и зависимости $h(y)$



Фиг. 5. Распределение скорости на профилях решетки при различных зависимостях $h(y)$

Во всех случаях правые части системы уравнений второго приближения составили не более $0.1 \div 0.2\%$ правых частей системы первого приближения. Добавки δw к скоростям первого приближения при этом не превышают 0.5% величины относительной скорости на входе в решетку.

Полученные результаты показывают, что практически можно ограничиться расчетом первого приближения при любом характере изменения слоя, имеющем место в реальной турбомашине.

Поступило 28 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Стенанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
2. Wu Chung Hua. A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed-flow types. Trans. ASME, 1952, vol. 74, No. 8.
3. Белехова Н. Г. Учет пространственности потока, обтекающего рабочее колесо турбомашин. Вестн. ЛГУ, сер. матем., механ., астрономии, 1958, № 1.
4. Киселев К. А. Профилирование лопастей рабочего колеса радиально-осевой турбины методом особенностей. Вестн. ЛГУ, 1958, № 1.
5. Раухман Б. С. Прямая задача обтекания двумерной решетки профилей. «Котлотурбостроение», Тр. ЦКТИ, 1965, № 61.
6. Czibere T. Über die Berechnung der Schaufelprofile und der Strömung um die Schaufeln von Strömungsmaschinen. Ingr. Arch., 1964, Bd 33, Nr 4.
7. Викторов Г. В., Вучкова И. В. Расчет течения жидкости в произвольной решетке на осесимметричной поверхности тока в слое переменной толщины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
8. Раухман Б. С., Гольдин А. В. Решение прямой задачи обтекания двумерной решетки профилей на электронно-вычислительной машине. «Котлотурбостроение», Тр. ЦКТИ, 1965, № 61.
9. Викторов Г. В., Моргунов Г. М. Решение обратной задачи решеток профилей на осесимметричной поверхности тока в переменном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.