№ 1 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1971

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ИЗЛУЧАЮЩЕМ ГАЗЕ

В. П. СТУЛОВ

(*Москва*)

Исследуются уравнения динамического пограничного слоя в теплопроводном газе; выводятся уравнения пограничного слоя в излучающем и поглощающем газе при различных предположениях о величинах параметров, определяющих взаимодействие излучения с движущимся газом.

Для построения приближенного решения системы уравнений движения газа с учетом излучения при больших значениях числа Рейнольдса используется метод погранслойных поправок [1, 2]. Заметим, что этот метод для обоснования уравнений пограничного слоя в несжимаемой жидкости и построения высших приближений применялся в работах [3, 4].

Приближенным решением n-го порядка считается система таких достаточно гладких функций, что применение к ней оператора системы дифференциальных уравнений и граничных условий дает результат порядка ε^{n+1}, где ε — малый параметр. Иными словами, данная система функций должна удовлетворять системе уравнений и граничных условий с невязками порядка ε^{n+1}. В каждом приближении решение состоит из двух частей — гладкой и локальной. Гладкая часть решения представляет собой частичную сумму степенного ряда относительно ε. Малый параметр оказывается при старшей производной, поэтому порядок уравнений для гладкой части ниже порядка исходной системы уравнений, вследствие чего нельзя удовлетворить всем граничным условиям. Для устранения появляющейся невязки в граничных условиях строится локальная часть решения, состоящая из функций, быстро затухающих при удалении от границы. Для получения системы уравнений, описывающих локальную часть решения, вводится «быстрая» переменная $\eta = y / \varepsilon$. Простым преобразованием искомых функций уравнения для локальной части решения сводятся к уравнениям пограничного слоя.

1. Динамический пограничный слой в теплопроводном газе. Уравнения Навье — Стокса для плоского течения сжимаемого газа с постоянными коэффициентами вязкости μ и теплопроводности k имеют вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\varepsilon^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tag{1.1}$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\varepsilon^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} - u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} = \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \varepsilon^2 \Phi$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T$$

Здесь

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{R} = \frac{\mu}{L \rho_\infty U_\infty}, \quad \lambda^2 = \frac{1}{P} = \frac{k}{c_p L \rho_\infty U_\infty}$$

Система (1.1) записана в безразмерных переменных; переход от размерных переменных к безразмерным осуществлен по формулам

$$
\begin{gathered}
x' = Lx, \quad y' = Ly, \quad u' = U_\infty u, \quad v' = U_\infty v \\
\rho' = \rho_\infty \rho, \quad p' = \rho_\infty U_\infty^2 p, \quad T' = \frac{U_\infty^2}{c_p} T
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Пусть $\varepsilon \ll 1$, $\lambda \sim 1$. Примером течения с большим числом Рейнольдса R и числом Пекле P порядка единицы может служить движение электронного газа. Ниже выводятся уравнения, описывающие гладкую и локальную части нулевого приближения относительно ε.

Уравнения для гладкой части получаются из (1.1), если в них положить $\varepsilon = 0$. Эти уравнения описывают движение невязкого теплопроводного сжимаемого газа. Очевидно, система для гладкого решения позволяет удовлетворить всем краевым условиям для температуры, сформулированным для системы (1.1), однако не позволяет удовлетворить условию прилипания. Пусть для определенности указанная невязка в граничных условиях на скорость u образуется на участке поверхности, совпадающем с координатной линией $y = 0$. Вводится новая переменная $\eta = y / \varepsilon$. Полное нулевое приближение ищется в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
u^\circ &= u_0(x, y) + u^*(x, \eta) \\
v^\circ &= v_0(x, y) + \varepsilon v^{**}(x, \eta) = v_0(x, y) + \varepsilon v^*(x, \eta) + \varepsilon v_1(x, 0) \\
p^\circ &= p_0(x, y) \\
T^\circ &= T_0(x, y) + \varepsilon^2 T^{**}(x, \eta) = T_0(x, y) + \varepsilon^2 T^*(x, \eta) + \varepsilon^2 T_1(x, 0) \\
\rho^\circ &= \rho_0(x, y) + \varepsilon^2 \rho^{**}(x, \eta) = \rho_0(x, y) + \varepsilon^2 \rho^*(x, \eta) + \varepsilon^2 \rho_1(x, 0)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Функции вида $f_0(x, y)$ описывают гладкое решение, функции со звездочками означают погранслойные поправки. Одной звездочкой отмечены локальные функции, стремящиеся к нулю при $\eta \to \infty$. Для v, T, ρ погранслойные поправки состоят из локальных функций и величин, независящих от η. Эти константы служат граничными условиями для гладкой части первого приближения.

Подставляя (1.3) в (1.1), переходя к переменной $\eta = y / \varepsilon$, разлагая функции в ряд по ε, отбрасывая члены $\sim \varepsilon$ и выше и учитывая уравнения для гладкой части решения, получаем систему уравнений для погранслойных поправок

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}[\rho_0(x,0)u^*] + \rho_0(x,0)\frac{\partial v^{**}}{\partial \eta} = 0 \\
[u_0(x,0) + u^*]\frac{\partial u^*}{\partial x} + \left(\eta \frac{\partial v_0(x,0)}{\partial y} + v^{**}\right)\frac{\partial u^*}{\partial \eta} + u^* \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0(x,0)}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} \\
\rho_0(x,0)u^* \frac{\partial T_0(x,0)}{\partial x} - u^* \frac{\partial p_0(x,0)}{\partial x} = \lambda^2 \frac{\partial^2 T^{**}}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)^2 \\
T_0(x,0)\rho^{**} + \rho_0(x,0)T^{**} = 0
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Граничные условия для погранслойных поправок имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\text{при } \eta = 0 \\
&\qquad u^* = -u_0(x, 0), \quad v^{**} = 0, \quad T^{**} = 0 \\
&\text{при } \eta \to \infty \\
&\qquad u^* = 0, \quad v^{**},\ T^{**} \quad \text{ограничены}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Легко проверить, что при условиях (1.5) решение (1.3) удовлетворяет исходным граничным условиям с невязкой порядка ε.

При $\rho_0(x, 0) = \mathrm{const}$ первое и второе уравнения (1.4) совпадают с соответствующими уравнениями для несжимаемой жидкости [3]. Это связано с тем, что на малой толщине динамического пограничного слоя возмущения плотности малы, поскольку $\lambda \sim 1$.

В силу граничных условий (1.5) u^* — локальная функция. Из первого уравнения (1.4) с учетом (1.5) следует

$$v^{**} = \frac{1}{\rho_0(x,0)}\int_\eta^\infty \frac{\partial}{\partial x}[\rho_0(x,0)u^*(x,\xi)]\,d\xi - \qquad (1.6)$$

$$-\frac{1}{\rho_0(x,0)}\int_\eta^\infty \frac{\partial}{\partial x}[\rho_0(x,0)u^*(x,\xi)]\,d\xi = v^*(x,\eta) + v_1(x,0)$$

Очевидно, первое слагаемое (1.6) — локальная функция. Решение третьего уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5) при известной функции u^* можно записать в виде

$$T^{**} = \int_\eta^\infty\int_\xi^\infty \psi(x,\tau)\,d\tau - \int_0^\infty\int_\xi^\infty \psi(x,\tau)\,d\tau = T^*(x,\eta) + T_1(x,0) \qquad (1.7)$$

Здесь

$$\psi(x,\eta) = \lambda^{-2}\left[\rho_0(x,0)u^*\frac{\partial T_0(x,0)}{\partial x} - u^*\frac{\partial p_0(x,0)}{\partial x} - \left(\frac{\partial u^*}{\partial\eta}\right)^2\right] \qquad (1.8)$$

Функция $\psi(x, \eta)$ — локальная, поэтому $T^*(x, \eta)$ — также локальная функция. Аналогичную структуру имеет решение для ρ^{**}.

Замена искомых функций

$$\begin{gathered} u_* = u^\circ + [u_0(x,0) - u_0(x,y)] \\ \varepsilon v_* = v^0 + \left[y\frac{\partial v_0(x,0)}{\partial y} - v_0(x,y)\right] \\ \varepsilon^2 T_* = T^\circ + \left[\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 T_0(x,0)}{\partial y^2} - T_0(x,y)\right] \end{gathered} \qquad (1.9)$$

позволяет свести уравнения для погранслойных поправок (1.4) к обычным уравнениям пограничного слоя

$$\frac{\partial}{\partial x}[\rho_0(x,0)u_*] + \frac{\partial}{\partial\eta}[\rho_0(x,0)v_*] = 0$$

$$\rho_0(x,0)u_*\frac{\partial u_*}{\partial x} + \rho_0(x,0)v_*\frac{\partial u_*}{\partial\eta} = -\frac{\partial p_0(x,0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial\eta^2} \qquad (1.10)$$

$$\rho_0(x,0)u_*\frac{\partial T_0(x,0)}{\partial x} - u_*\frac{\partial p_0(x,0)}{\partial x} = \lambda^2\left(\frac{\partial^2 T_0(x,0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial\eta^2}\right) + \left(\frac{\partial u_*}{\partial\eta}\right)^2$$

Из первого соотношения (1.9) следует

$$u_* = u^* + u_0(x, 0) \qquad (1.11)$$

Иначе говоря, $u_* \to u_0(x, 0)$ при $\eta \to \infty$. Тогда из первого уравнения (1.10) получается, что $v_* \to \infty$ при $\eta \to \infty$, если $\rho_0(x, 0) \neq \mathrm{const}$. Аналогично из третьего уравнения (1.10) получается, что $T_* \to \infty$ при $\eta \to \infty$. Это же свойство легко установить из формул связи (1.9). Таким образом, уравнения пограничного слоя (1.10) правильно описывают пристеночное течение лишь при ограниченных η. В этом состоит одна из основных трудностей, встречающихся при численном решении уравнений пограничного слоя с переменным внешним течением.

Уравнения (1.10) можно получить также методом внешних и внутренних разложений [5]. Внешнее разложение совпадает с гладким решением $f_0(x, y)$. Внутреннее разложение следует искать в виде

$$u = u_*(x, \eta), \qquad T - T_0(x, 0) = \varepsilon^2 T_*(x, \eta)$$
$$v = \varepsilon v_*(x, \eta), \qquad \rho - \rho_0(x, 0) = \varepsilon^2 \rho_*(x, \eta) \tag{1.12}$$

Если толщины динамического и теплового пограничных слоев одного порядка ($\lambda \sim \varepsilon \ll 1$), вязкая диссипация в пограничном слое может привести к изменению температуры на величину порядка самого значения T. Однако в рассматриваемом здесь случае общее возмущение температуры в пограничном слое, в том числе и за счет вязкой диссипации, порядка ε^2, хотя порядок члена $(\partial u_* / \partial\eta)^2$ прежний. Это связано с тем, что возмущение T порядка $T_0(x, 0)$, образующееся в пограничном слое, в данном случае распределяется во всем поле течения посредством теплопроводности, вследствие чего его амплитуда уменьшается до величины $\sim\varepsilon^2$. Таким образом, наличие интенсивного по сравнению с вязкостью механизма переноса тепловой энергии (теплопроводности) не разрушает пограничный слой, а только изменяет его структуру. Аналогичная задача о пограничном слое в газе с малым числом Прандтля рассматривалась М. Н. Коганом [8].

2. Динамический и тепловой пограничные слои в излучающем газе. Уравнения движения газа с учетом излучения получены в книге Дж. Сэмпсона [6] из кинетических уравнений, в которых излучение рассматривается как отдельная компонента — фотонный газ. Если тензор напряжений и потоки для молекулярного газа вычислить в приближении Чепмена — Энскога, то получаются уравнения, аналогичные уравнениям Навье — Стокса. При использовании обычных в радиационной газовой динамике предположений относительно давления и энергии излучения уравнения неразрывности и импульса совпадают с первыми тремя уравнениями (1.1). Уравнения энергии и переноса излучения имеют вид

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} - u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} =$$
$$= \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \varepsilon^2 \Phi + \Gamma \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \right)$$
$$l \frac{\partial I_\nu}{\partial x} + m \frac{\partial I_\nu}{\partial y} = \varkappa_\nu [B_\nu(T) - I_\nu(x, y, \Omega)] \tag{2.1}$$
$$\mathbf{S} = \int\limits_0 \int\limits_\Omega \Omega I_\nu(\Omega) d\Omega \, d\nu$$

Здесь I_ν — спектральная интенсивность излучения, $\mathbf{S}$ — вектор потока лучистой энергии $\Omega(l, m)$ — единичный вектор направления, $B_\nu(T)$ — функция Планка. Безразмерные параметры

$$\Gamma = \frac{S_\infty}{\rho_\infty U_\infty{}^3}, \qquad \varkappa_\nu = \frac{L}{L_\nu} \tag{2.2}$$

представляют собой отношение характерного лучистого потока к характерному потоку кинетической энергии газа и отношение характерной длины задачи к средней длине свободного пробега излучения соответственно. Коэффициент поглощения $\varkappa_\nu$ считается постоянным; обобщение на случай переменного $\varkappa_\nu$ не представляет труда. Для перехода к безразмерным переменным кроме (1.2) использовались формулы

$$S' = S_\infty S, \qquad I_\nu' = S_\infty I_\nu, \qquad B_\nu' = S_\infty B_\nu \tag{2.3}$$

Исходные граничные условия задаются в виде на обтекаемой поверхности

$$u = v = 0, \qquad T = T_w, \qquad I_\nu = I_{\nu w} \tag{2.4}$$

вдали от тела

$$u = U_\infty, \qquad T = T_\infty, \qquad I_\nu = I_{\nu\infty}$$

Пусть $\lambda \sim \varepsilon \ll 1$ (для простоты считается $\lambda = \varepsilon$), $\varkappa_\nu \sim 1$, $\Gamma \sim 1$. Иными словами, рассматривается перенос излучения в слабовязком газе; длина пробега фотона порядка характерной длины.

Уравнения для гладкой части решения получаются, если в первых трех уравнениях (1.1) и в уравнениях (2.1) положить $\lambda = \varepsilon = 0$. Эта система описывает движение идеального излучающего и поглощающего газа. При ее решении нельзя удовлетворить условиям прилипания и условию $T = T_w$ на границе $y = 0$. Вводится новая переменная $\eta = y / \varepsilon$. Полное нулевое приближение ищется в виде

$$\begin{gathered}
u^\circ = u_0(x, y) + u^*(x, \eta) \\
v^\circ = v_0(x, y) + \varepsilon v^{**}(x, \eta) = v_0(x, y) + \varepsilon v^*(x, \eta) + \varepsilon v_1(x, 0) \\
T^\circ = T_0(x, y) + T^*(x, \eta) \qquad \rho^\circ = \rho_0(x, y) + \rho^*(x, \eta) \\
I_\nu^\circ = I_{\nu 0}(x, y, \Omega) + \varepsilon I_\nu^{**}(x, \eta, \Omega) = I_{\nu 0}(x, y, \Omega) + \\
+ \varepsilon I_\nu^*(x, \eta, \Omega) + \varepsilon I_{\nu 1}(x, 0, \Omega) \\
S^\circ = S_0(x, y) + \varepsilon S^{**}(x, \eta) = S_0(x, y) + \varepsilon S^*(x, \eta) + \varepsilon S_1(x, 0)
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (1.1) и (2.1) и производя указанные при выводе уравнений (1.4) упрощения, получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}[u_0(x,0)\rho^* + u^*\rho_0(x,0) + \rho^* u^*] + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho^* v^{**}) + \\
+ \left(\rho^* + \eta \frac{\partial \rho^*}{\partial \eta}\right) \frac{\partial v_0(x,0)}{\partial y} + \rho_0(x,0)\frac{\partial v^{**}}{\partial \eta} = 0 \\
[\rho^*(u_0(x,0) + u^*) + \rho_0(x,0)u^*]\left(\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial x}\right) + \\
+ \rho_0(x,0)u_0(x,0)\frac{\partial u^*}{\partial x} + [\rho_0(x,0) + \rho^*]\left(\eta \frac{\partial v_0(x,0)}{\partial y} + v^{**}\right)\frac{\partial u^*}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} \\
[\rho^*(u_0(x,0) + u^*) + \rho_0(x,0)u^*]\left(\frac{\partial T_0(x,0)}{\partial x} + \frac{\partial T^*}{\partial x}\right) + \\
+ \rho_0(x,0)u_0(x,0)\frac{\partial T^*}{\partial x} + [\rho_0(x,0) + \rho^*]\left(\eta \frac{\partial v_0(x,0)}{\partial y} + v^{**}\right)\frac{\partial T^*}{\partial \eta} - \\
- u^* \frac{\partial p_0(x,0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)^2 + \Gamma \frac{\partial S_\nu^{**}}{\partial \eta} \\
m \frac{\partial I_\nu^{**}}{\partial \eta} = \varkappa_\nu [B_\nu(T_0(x,0) + T^*) - B_\nu(T_0(x,0))]
\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$S^{**} = \int_0^\infty \int_\Omega \Omega I_\nu^{**}(\Omega)\, d\Omega\, d\nu, \qquad \rho^* T_0(x,0) + \rho_0(x,0)T^* + \rho^* T^* = 0$$

Граничные условия для погранслойных поправок имеют вид

при $\eta = 0$

$$u^* = -u_0(x, 0), \quad v^{**} = 0, \quad T^* = T_w - T_0(x, 0), \quad I_\nu^{**} = 0 \qquad (2.7)$$

при $\eta \to \infty$

$$u^* = 0, \quad T^* = 0, \quad v^{**}, \quad I_\nu^{**} \ \text{ограничены}$$

При помощи рассуждений, аналогичных проведенным в п.1, можно показать, что I_ν^{**} состоит из локальной функции и константы.

Интересно отметить, что в рассматриваемом случае уравнение переноса излучения содержит только член с излучением и не содержит поглощения. Действительно, в силу сделанных предположений об определяющих параметрах длина свободного пробега излучения много больше толщины пограничного слоя, поэтому в пограничном слое поглощение не происходит. Погранслойная поправка для I_ν возникает за счет отличия функции Планка в пристеночной области от ее идеального значения, поскольку вблизи стенки имеет место температурный пограничный слой. Хотя возмущение функции Планка порядка единицы, возмущение $I_\nu \sim \varepsilon$, так как быстрый перенос излучения распределяет возмущение функции Планка на всю область течения.

Замена искомых функций

$$u_* = u^\circ + [u_0(x, 0) - u_0(x, y)], \quad T_* = T^\circ + [T_0(x, 0) - T_0(x, y)]$$

$$\varepsilon v_* = v^\circ + \left[y \frac{\partial v_0(x, 0)}{\partial y} - v_0(x, y)\right], \quad \rho_* = \rho^\circ + [\rho_0(x, 0) - \rho_0(x, y)]$$

$$\varepsilon I_{\nu *} = I_\nu^\circ + \left[y \frac{\partial I_{\nu 0}(x, 0, \Omega)}{\partial y} - I_{\nu 0}(x, y, \Omega)\right]$$

$$\varepsilon S_* = S^\circ + \left[y \frac{\partial S_0(x, 0)}{\partial y} - S_0(x, y)\right] \qquad (2.8)$$

приводит уравнения (2.6) к уравнениям пограничного слоя

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_* u_*) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho_* v_*) = 0 \qquad \rho_* u_* \frac{\partial u_*}{\partial x} + \rho_* v_* \frac{\partial u_*}{\partial \eta} =$$

$$= -\frac{\partial p_0(x, 0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial \eta^2}$$

$$\rho_* u_* \frac{\partial T_*}{\partial x} + \rho_* v_* \frac{\partial T_*}{\partial \eta} = u_* \frac{\partial p_0(x, 0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial \eta^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial u_*}{\partial \eta}\right)^2 + \Gamma\left[\frac{\partial S_{x0}(x, 0)}{\partial x} + \frac{\partial S_{y*}}{\partial \eta}\right]$$

$$l \frac{\partial I_{\nu 0}(x, 0, \Omega)}{\partial x} + m \frac{\partial I_{\nu *}}{\partial \eta} = \varkappa_\nu [B_\nu(T_*) - I_{\nu 0}(x, 0, \Omega)]$$

$$S_* = \int_0^\infty \int_\Omega \Omega I_{\nu *}(\Omega)\, d\Omega\, d\nu \qquad (2.9)$$

Из четвертого уравнения (2.9) следует, что $I_{\nu *} \to \infty$ при $\eta \to \infty$, т. е. уравнениями (2.9) можно пользоваться до расстояний от стенки, не превышающих толщину пограничного слоя ($\eta \sim 1$). Вместе с тем уравнения (2.6) справедливы во всей области.

В рассматриваемом случае влияние излучения на структуру пограничного слоя состоит в потере энергии за счет высвечивания и поглощения внешнего излучения. Отметим, что поток лучистой энергии одного порядка с конвективным потоком тепла. Задача о влиянии излучения на пограничный слой в критической точке тупого тела рассматривалась в работе [9].

3. Пограничный слой в излучающем и сильно поглощающем газе. Пусть $\lambda \sim \varepsilon \ll 1$ $(\lambda = \varepsilon)$, $\varkappa_\nu = \varepsilon^{-1} \gg 1$ для всех значений ν. Здесь длина свободного пробега фотона считается малой, порядка толщины пограничного слоя. Полагая в первых трех уравнениях (1.1) и в уравнениях (2.1) $\lambda = \varepsilon = 0$, $\varkappa_\nu^{-1} = \varepsilon = 0$, получаем уравнения для гладкой части решения. Из уравнения переноса излучения и формулы для потока излучения следует

$$I_{\nu 0}(x, y, \Omega) = B_\nu[T_0(x, y)], \qquad \mathrm{S}_0(x, y) = 0 \tag{3.1}$$

Следовательно, в уравнении энергии член $\Gamma \operatorname{div} \mathrm{S}$ отсутствует. Уравнения для гладкой части описывают движение идеального равновесно излучающего газа. Перенос энергии излучением внутри потока не происходит, так как испущенный фотон немедленно поглощается. При решении уравнений для гладкой части нельзя удовлетворить всем граничным условиям на обтекаемой поверхности (2.4) (кроме условия непроницаемости).

Полное нулевое приближение, строится в виде

$$I_\nu^\circ = B_\nu[T_0(x, y)] + I_\nu^*(x, \eta, \Omega), \qquad \mathrm{S}^\circ = \mathrm{S}^*(x, \eta) \tag{3.2}$$

Выражения для других искомых функций совпадают с (2.5). Подставляя (3.2) и (2.5) в (1.1) и (2.1), получаем

$$[\rho^*(u_0(x,0) + u^*) + \rho_0(x,0)u^*]\left(\frac{\partial T_0(x,0)}{\partial x} + \frac{\partial T^*}{\partial x}\right) +$$
$$+ \rho_0(x,0)u_0(x,0)\frac{\partial T^*}{\partial x} + (\rho_0(x,0) + \rho^*)\left(\eta\frac{\partial v_0(x,0)}{\partial y} + v^{**}\right)\frac{\partial T^*}{\partial \eta} -$$
$$- u^*\frac{\partial p_0(x,0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial S_y^*}{\partial \eta}$$
$$m\frac{\partial I_\nu^*}{\partial \eta} = B_\nu[T_0(x,0) + T^*] - B_\nu[T_0(x,0)] - I_\nu^*(x, \eta, \Omega) \tag{3.3}$$
$$\mathrm{S}^* = \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \Omega I_\nu^*(\Omega)\, d\Omega\, d\nu$$

Уравнения неразрывности и импульса совпадают с соответствующими уравнениями (2.6). При выводе уравнений (3.3) приходится принять, что $\Gamma \sim \varepsilon$. Поскольку в основном потоке $\mathrm{S} = 0$, характерное значение S_∞ относится к обтекаемой поверхности. Следовательно, условие $\Gamma \sim \varepsilon$ эквивалентно предположению, что поток лучистой энергии с поверхности должен быть $\sim \varepsilon$ относительно потока кинетической энергии. Это требование имеет простую физическую интерпретацию. В самом деле, пусть $S_w \sim 1$. Поскольку $\varkappa_\nu^{-1} \sim \varepsilon \to 0$, то весь поток излучения с поверхности должен быть поглощен в исчезающе-тонком слое, прилегающем к поверхности. Так как вне слоя толщиной $\sim \varepsilon$ все механизмы отвода тепла (конвекция, теплопроводность) отсутствуют, такое поглощение приведет к бесконечному нагреву газа, иначе говоря, стационарное решение задачи в пределе $\varepsilon \to 0$ не имеет места. Подобные явления иногда называют «тепловым взрывом».

Замена искомых функций

$$S_{\cdot} = S^{\circ}, \qquad I_{\nu\cdot} = I_{\nu}^{\circ} + [B_{\nu}(T_0(x, 0)) - B_{\nu}(T_0(x, y))] \tag{3.4}$$

(формулы для прочих функций совпадают с (2.8)) приводит уравнения (3.3) к уравнениям пограничного слоя

$$\rho_* u_* \frac{\partial T_*}{\partial x} + \rho_* v_* \frac{\partial T_*}{\partial \eta} = u_* \frac{\partial p_0(x,0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial u_*}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial S_{\nu *}}{\partial \eta}$$

$$m \frac{\partial I_{\nu *}}{\partial \eta} = B_{\nu}(T_*) - I_{\nu *}, \qquad S_* = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\Omega} \Omega I_{\nu *}(\Omega) d\Omega \, d\nu \tag{3.5}$$

Уравнения неразрывности и импульса совпадают с соответствующими уравнениями (2.9). Первые два уравнения (2.9) и уравнения (3.5) являются обычно используемыми в литературе уравнениями пограничного слоя в сжимаемом газе с учетом излучения [7]. Важно отметить, что в рамках принятых в данной работе допущений о постоянстве коэффициентов переноса и поглощения эти уравнения справедливы лишь при условии, что вне пограничного слоя газ излучает как абсолютно черное тело.

Институт механики МГУ

Поступило 26 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5(59), стр. 3—122.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 121, стр. 778—781.
3. Чудов Л. А. О некоторых недостатках классической теории пограничного слоя. Сб. «Численные методы в газовой динамике», Изд-во МГУ, 1963, вып. 2, стр. 98—109.
4. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. О двух методах построения высших приближений по малому параметру вязкости. Сб. «Вычислительные методы и программирование», 1967, вып. 8, стр. 173—185.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
6. Сэмпсон Д. Уравнения переноса энергии и количества движения в газах с учетом излучения. М., «Мир», 1969.
7. Андреев Г. Н. К учету радиационного потока в ламинарном пограничном слое. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6, стр. 109—111.
8. Коган М. Н. О течениях с большой теплопроводностью. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, стр. 488—490.
9. Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Конвективный теплообмен в излучающем газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.