

К ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СЛОБОИОНИЗОВАННОГО ГАЗА ОКОЛО ЭЛЕКТРОДА

В. С. ЮФЕРЕВ

(Ленинград)

Метод сращиваемых асимптотических разложений применяется для анализа пограничного слоя слабоионизованного газа около электрода, когда дебаевская длина больше длины свободного пробега. Предполагается, что потоки эмиссии не являются малыми. В результате расчета приэлектродного слоя получено граничное условие для уравнения диффузии в амбиполярной области.

Движение слабоионизованного газа около электрода рассматривалось в различной постановке во многих работах. Большое внимание уделялось задачам, в которых концентрация заряженных частиц в пограничном слое не является равновесной, а определяется из решения уравнения диффузии. При этом возникает необходимость в исследовании тонкой пристеночной области, так называемого приэлектродного слоя, в котором имеет место существенное отклонение газа от нейтральности.

Если дебаевская длина значительно больше длины свободного пробега, то для описания указанного приэлектродного слоя можно использовать уравнения сплошной среды. Подобный подход неоднократно применялся в теории зондов, газового разряда, пограничного слоя.

В работах [1-4] рассматривалось ламинарное течение проводящего газа около заряженного тела. Для получения решения использовался метод сращиваемых асимптотических разложений по параметру, характеризующему отношение толщин приэлектродного и пограничного слоев. При этом в большинстве случаев электрод предполагался неземитирующим [1-3], что позволило считать концентрации ионов и электронов на стенке равными нулю.

Влияние эмиссионных свойств электрода исследовалось в [4]. Однако, хотя это явно не указывалось, полученное решение справедливо только при небольших потоках эмиссии, когда концентрации заряженных частиц на стенке являются достаточно малыми порядка $O(\Lambda^{2/3}\delta^{-2/3})$ (Λ — дебаевская длина, δ — толщина пограничного слоя).

Анализ области возмущения неподвижной плазмы около электрода при достаточно общих граничных условиях на его поверхности выполнен в работе [5]. Тем не менее вопрос о влиянии величины концентрации заряженных частиц на стенке на поведение решения в приэлектродном слое специально не обсуждался. Кроме этого, в отличие от [1-4] решения в амбиполярной и приэлектродной областях не сращивались асимптотически, а сшивались на некотором конечном расстоянии от электрода.

Таким образом, во всех указанных работах, практически не рассматривалась ситуация, когда концентрации электронов и ионов в пристеночной области не являются слишком малыми, что может иметь место при достаточно больших потоках эмиссии на электроде. В этом случае, как будет показано в дальнейшем, необходимо по иному сращивать приэлектродную и амбиполярную области. При этом удается получить аналитическую зависимость между концентрациями заряженных частиц на стенке и на внешней границе приэлектродного слоя.

1. Предполагается, что проводимость газа определяется присадкой, степень ионизации которой мала, температура электронов и тяжелых частиц одинакова, магнитное поле отсутствует, вязкость пропорциональна температуре, числа Шмидта ионов и электронов постоянны, внешний поток квазинейтрален, а дебаевская длина, как уже указывалось, значительно превышает длину свободного пробега.

В безразмерном виде уравнения пограничного слоя на пластине можно записать в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{P} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + (\gamma - 1) M_\infty^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + k_1 E_\infty \theta (E - E_\infty u) \\
 u \frac{\partial c_e}{\partial x} + v \frac{\partial c_e}{\partial y} &= - \frac{1}{\beta S_i} \frac{\partial \Gamma_e}{\partial y} + K^*, \quad u \frac{\partial c_i}{\partial x} + v \frac{\partial c_i}{\partial y} = - \frac{1}{S_i} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial y} + K^* \\
 \alpha \frac{\partial E}{\partial y} &= c_i - c_e, \quad \Gamma_i = c_i E - \frac{\partial c_i}{\partial y}, \quad \Gamma_e = - c_e E - \frac{\partial c_e}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u^\circ}{u_\infty^\circ}, \quad 0 = \frac{T^\circ}{T_\infty^\circ}, \quad x = \frac{x^\circ}{L}, \quad y = \frac{\sqrt{R}}{L} \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_\infty} dy^\circ, \quad E = \frac{e E^\circ L}{k T_\infty^\circ \sqrt{R}} \\
 S_i &= \frac{v_\infty}{D_{i_\infty}}, \quad \beta = \frac{D_{i_\infty}}{D_{e_\infty}}, \quad \alpha = \left(\frac{\Lambda_\infty}{L} \right)^2 R, \quad \Lambda_\infty^2 = \frac{\epsilon_0 k T_\infty^\circ}{e^2 n_{e_\infty^\circ}}, \quad R = \frac{u_\infty^\circ L}{v_\infty} \\
 k_1 &= \frac{1 + \beta}{\beta} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{c_{e_\infty^\circ}}{S_i}, \quad c_e = \frac{c_e^\circ}{c_{e_\infty^\circ}}, \quad c_{e,i}^\circ = \frac{n_{e,i}}{n} \quad (n \gg n_{i,e}) \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Здесь n — полное количество частиц в единице объема, а L — некоторый характерный размер. Член K^* в (1.1) учитывает изменение концентраций заряженных частиц за счет реакций ионизации и рекомбинации. Индексы $^\circ$ соответствуют размерным величинам; индексы w и ∞ соответствуют характеристикам газа на стенке и во внешнем потоке; индекс e относится к электронам, а i — к ионам.

Систему (1.1) необходимо дополнить соответствующими граничными условиями. Для уравнений количества движения, энергии и Пуассона это сделать нетрудно

$$u = v = 0, \quad \theta = \theta_w \quad (y = 0), \quad u = \theta = 1, \quad E = E_\infty \quad (y = \infty) \quad (1.3)$$

Для уравнений же диффузии электронов и ионов вопрос о форме граничных условий на поверхности электрода не является еще окончательно решенным. Обычно на стенке задается связь между потоками заряженных частиц и их концентрациями [6]

$$\frac{1}{2} \Gamma_i^\circ + \frac{1}{4} n_i w_i = j_1, \quad \frac{1}{2} \Gamma_e^\circ + \frac{1}{4} n_e w_e = j_2 \quad (1.4)$$

где $\Gamma_{i,e}^\circ$, $j_{1,2}$, w_i, w_e — диффузионный поток, поток эмиссии и тепловая скорость ионов и электронов соответственно.

Условия (1.4) содержат в себе противоречие. С одной стороны, при их выводе предполагалось, что функции распределения электронов и ионов близки к максвелловским, а скорость диффузии заряженных частиц значительно меньше их тепловой скорости. С другой стороны, общий вид этих выражений приводит к заключению, что скорости диффузии и тепловые скорости одного порядка. Тем не менее в данной работе были использованы граничные условия в форме (1.4), поскольку они в основном, по-видимому, правильно отражают физическую сторону явления.

Переходя в (1.4) к безразмерным переменным (1.2) и полагая коэффициент диффузии равным

$$D_{i,e} = \frac{1}{3} w_{i,e} l_{i,e}$$

где $l_{i,e}$ — длина свободного пробега ионов и электронов, получаем

$$\begin{aligned}
 c_{iw} + \epsilon_1 \Gamma_{iw} &= a_1, \quad c_{ew} + \epsilon_2 \Gamma_{ew} = a_2 \quad (y = 0); \quad c_{i,e} = 1 \quad (y = \infty) \\
 \epsilon_{1,2}^\circ &= \frac{2}{3} \frac{(l_{i,e})_\infty}{L} \sqrt{R} \theta_w^{1/2}, \quad a_{1,2} = \frac{4 j_{1,2} \theta_w^{1/2}}{(w_{i,e} n_e)_\infty} \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты $\varepsilon_{1,2}^\circ$ являются очень малыми, поскольку они пропорциональны отношению длины свободного пробега к толщине пограничного слоя.

Для решения задачи (1.1) — (1.5) воспользуемся малостью параметра α , который выражает отношение дебаевской длины к характерной толщине пограничного слоя, и применим метод сращиваемых асимптотических разложений. При этом должно выполняться требование, чтобы толщина приэлектродного слоя определялась в основном величиной данного параметра. Однако если поток электронов или ионов становится близким по величине к соответствующему потоку эмиссии, то толщины пограничного и приэлектродного слоев могут оказаться сравнимыми между собой и указанное условие будет нарушенным.

В соответствии с основным направлением работы дальнейшее рассмотрение ограничивается достаточно большими потоками эмиссии и такими плотностями тока, чтобы концентрации заряженных частиц на электроде не были слишком малыми, т. е.

$$a_{1,2} \gg o(\alpha^{1/3}), \quad a_{1,2} - \varepsilon_{1,2}^\circ (\Gamma_{i,e})_w = (c_{i,e})_w \gg o(\alpha^{1/3}) \quad (1.6)$$

Случай $a_{1,2} \lesssim o(\alpha^{1/3})$ рассматривался в работах [1-4].

При выполнении (1.6) требование, о котором шла речь выше, заведомо удовлетворяется.

2. Как обычно, первый член внешнего разложения описывает область амбиполярной диффузии в пограничном слое. В системе (1.1) положим $\alpha = 0$, получим

$$c_e = c_i = c, \quad u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{S} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \quad (2.1)$$

$$E = \frac{1}{c} \left(E_\infty - \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \frac{\partial c}{\partial y} \right), \quad Sm = \frac{1 + \beta}{2} S_i$$

Граничные условия зададим следующим образом:

$$c = c_w(x) \quad (y = 0), \quad c = 1 \quad y = \infty \quad (2.2)$$

Величина c_w пока неизвестна и определяется из условия сращивания внешнего и внутреннего разложений. После того как c_w найдена, задача для амбиполярной области полностью отделяется от расчета приэлектродного слоя.

В дальнейшем потребуются значения напряженности электрического поля и потоков заряженных частиц при $y = 0$. Обозначим

$$X = E_w c_w = E_\infty - \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_w \quad (2.3)$$

Тогда

$$E_w = \frac{X}{c_w}, \quad \Gamma_{iw} = X - \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_w, \quad \Gamma_{ew} = -X - \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_w \quad (2.4)$$

3. Чтобы получить уравнения, описывающие приэлектродный слой, необходимо соответствующим образом растянуть поперечную координату и изменить некоторые зависимые переменные.

Положим

$$y = \alpha^{1/2} t, \quad E = \alpha^{-1/2} G, \quad \theta = \theta_w + \alpha^{1/2} h \quad (3.1)$$

В отличие от работ [2-4] в данной статье масштаб концентраций заряженных частиц не изменялся, что согласуется с предположением (1.6).

Физический смысл преобразования (3.1) становится очевидным, если вернуться к первоначальным размерным переменным

$$y^{\circ} = \Lambda_{\infty} t, \quad G = \frac{eE^{\circ}\Lambda_{\infty}}{kT_{\infty}^{\circ}}$$

Подставляя (3.1) в (1.1) и устремляя α к нулю, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(-c_i G + \frac{dc_i}{dt} \right) = 0, \quad \frac{dG}{dt} = c_i - c_e \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(c_e G + \frac{dc_e}{dt} \right) = 0, \quad \frac{1}{P} \frac{d^2 h}{dt^2} + k_1 E_{\infty} \theta_w G = 0$$

Видно, что конвективные члены оказываются малыми более высокого порядка и не влияют в первом приближении на характеристики приэлектродного слоя.

Первые два уравнения системы (3.2) можно проинтегрировать. Получающиеся произвольные постоянные при этом определяются из условия срачивания с решением в амбиполярной области. Так как масштаб концентраций не изменялся, указанное срачивание необходимо производить не из условия равенства потоков заряженных частиц, как это делалось в работах [1-4], а из условия равенства E и $c_{i,e}$. При этом, чтобы сохранить в (3.2) влияние внешнего электрического поля E_{∞} , надо положить

$$X = \alpha^{-1/2} \lambda \quad (3.3)$$

Тогда

$$E_w = \alpha^{-1/2} \frac{\lambda}{c_w}, \quad G = \frac{\lambda}{c_w}, \quad c_{i,e} = c_w \quad (t = \infty) \quad (3.4)$$

Первоначально рассмотрим первые три уравнения системы (3.2). Интегрируя один раз и удовлетворяя условиям (3.4), получаем

$$\frac{dc_i}{dt} - c_i G = -\lambda, \quad \frac{dc_e}{dt} + c_e G = \lambda, \quad \frac{dG}{dt} = c_i - c_e \quad (3.5)$$

Сравнение (2.4) и (3.5) показывает, что потоки частиц во внутреннем разложении отличаются от потоков в амбиполярной области при $y = 0$ на величину $(\partial c / \partial y)_w$. Однако по сравнению с каждым отдельным слагаемым в левой части системы (3.5) величина этого разрыва имеет порядок $O(\alpha^{1/2})$ и, следовательно, не оказывает существенного влияния на распределение электрического поля и концентрацию электронов и ионов в приэлектродном слое. Все это остается справедливым до тех пор, пока $c_{i,e}$ на стенке имеют порядок, больший чем $O(\alpha^{1/3})$. В противном случае срачивание надо производить так, как в работах [2-4].

Учитывая сказанное выше, перейдем в граничных условиях (1.5) к новым переменным (3.1) и (3.3). Обозначим

$$\varepsilon_{1,2} = \alpha^{-1/2} \varepsilon_{1,2}^{\circ} \quad (3.6)$$

Тогда краевое условие на стенке для системы уравнений приэлектродного слоя (3.5) запишется в виде

$$c_{iw} = a_1 - \varepsilon_1 \lambda, \quad c_{ew} = a_2 + \varepsilon_2 \lambda \quad (t = 0) \quad (3.7)$$

Коэффициенты $\varepsilon_{1,2}$ пропорциональны отношению длины свободного пробега к дебаевской длине и поэтому по-прежнему остаются малыми.

Исключая из (3.5) концентрации заряженных частиц, получаем уравнение для напряженности электрического поля

$$d^2G/dt^2 - 1/2G + bG + 2\lambda = 0 \quad (3.8)$$

$$G_{u2} = 2b + 2(c_{iw} + c_{ew}), \quad dG/dt = c_{iw} - c_{ew} \quad (t = 0)$$

$$G = \frac{\lambda}{c_w} \quad (t = \infty), \quad b = -2c_w + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{c_w} \right)^2 \quad (3.9)$$

Здесь c_{iw} и c_{ew} определяются равенствами (3.7).

Величина c_w должна быть выбрана таким образом, чтобы G могло удовлетворить всем трем краевым условиям (3.9).

Уравнение (3.8) проще, чем уравнение Пенлеве, которое рассматривалось в [1-5], и допускает понижение порядка

$$(dG/dt)^2 = 1/4G^4 - bG^2 - 4\lambda G + \text{const}$$

Отсюда, удовлетворяя граничным условиям при $t=0$ и $t=\infty$, получаем алгебраическое уравнение для определения c_w

$$(c_{iw} - c_{ew})^2 = \frac{1}{4} \left[G_w^4 - \left(\frac{\lambda}{c_w} \right)^4 \right] - b \left[G_w^2 - \left(\frac{\lambda}{c_w} \right)^2 \right] - 4\lambda \left(G_w - \frac{\lambda}{c_w} \right)$$

После преобразований с учетом (3.9) будем иметь

$$\lambda^2 = - \frac{c_w(c_w^2 - c_{iw}c_{ew})^2}{2(c_w - c_{iw})(c_w - c_{ew})}, \quad \begin{aligned} c_{iw} &= a_1 - \varepsilon_1\lambda \\ c_{ew} &= a_2 + \varepsilon_2\lambda \end{aligned} \quad (3.10)$$

Выражение (3.10) сразу же позволяет сделать два вывода. Во-первых, величина c_w ограничена значениями концентраций электронов и ионов на поверхности электрода, поскольку иначе λ^2 становится отрицательной. Во-вторых, λ ограничено значениями

$$\lambda_{1,2} = \pm a_{1,2} / \varepsilon_{1,2}$$

Далее, так как коэффициенты $\varepsilon_{1,2}$ малы, то можно ожидать, что c_w достигает своего предела c_{iw} или c_{ew} уже при значениях $\lambda \ll \lambda_{1,2}$. Это позволяет применить для анализа зависимости c_w от λ в (3.10) метод асимптотических разложений по $\varepsilon_{1,2}$.

Внешнее разложение имеет вид

$$\begin{aligned} c_w &= c_0 + o(\varepsilon_{1,2}) \\ \lambda^2 &= - \frac{c_0^2(c_0^2 - a_1a_2)^2}{2(c_0 - a_1)(c_0 - a_2)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Алгебраическое уравнение (3.11) симметрично относительно $a_{1,2}$ и имеет две ветви решения. Чтобы определить, какую из них выбрать для заданных значений $a_{1,2}$, рассмотрим поведение решения при больших и малых λ

$$c_0 = \sqrt{a_1a_2} + \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{\sqrt{2a_1a_2}} \lambda + \dots \quad (3.12)$$

$$c_0 = a_1 - a_1^3(a_1 - a_2)\lambda^{-2} + \dots \quad \text{или} \quad c_0 = a_2 - a_2^3(a_2 + a_1)\lambda^{-2} + \dots$$

Анализ полученных выражений позволяет заключить, что

$$c_0 \rightarrow a_1 \quad (\lambda \rightarrow +\infty), \quad c_0 \rightarrow a_2 \quad (\lambda \rightarrow -\infty) \quad (3.13)$$

Это условие и определяет необходимую ветвь решения.

Расчеты по формуле (3.11) представлены на фиг. 1, на которой кривые 1, 2, 3, 4 определяются значениями a_1 и a_2 , указанными в скобках, 1 (0.05, 0.02), 2 (0.02, 0.05), 3 (0.02, 0.005), 4 (0.005, 0.02).

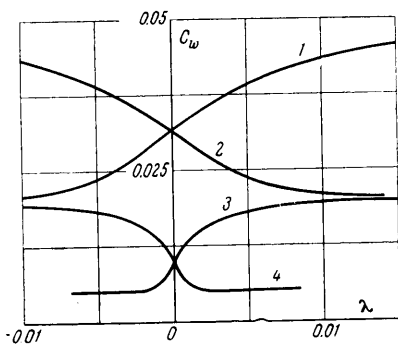
Видно, что c_0 очень быстро достигает предельных значений $a_{1,2}$, что и оправдывает применение используемого метода.

Для получения внутреннего разложения положим

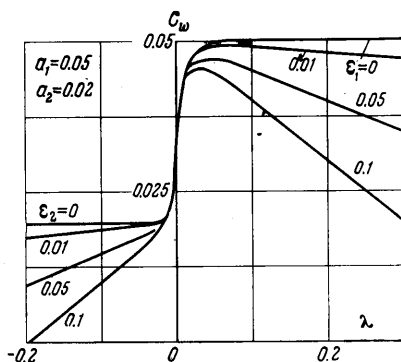
$$\varepsilon_1 \lambda = \Delta, \quad \varepsilon_2 \lambda = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Delta, \quad c_w = c_1 + o(\Delta)$$

Тогда

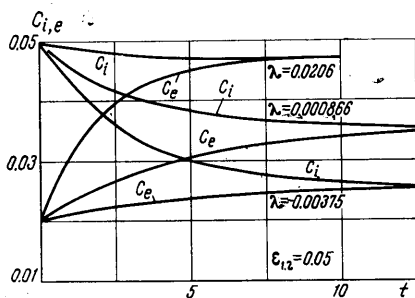
$$c_1 = a_1 - \varepsilon_1 \lambda \quad \text{или} \quad c_1 = a_2 + \varepsilon_2 \lambda \quad (3.14)$$



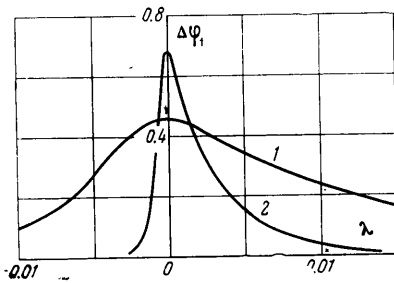
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Используя (3.13) при построении составного разложения, получаем, что в первом приближении

$$c_w = c_0 - \varepsilon_1 \lambda \quad (\lambda > 0), \quad c_w = c_0 + \varepsilon_2 \lambda \quad (\lambda < 0) \quad (3.15)$$

Результаты вычислений при различных λ показаны на фиг. 2. Видно, что, когда $\lambda \rightarrow \lambda_{1,2}$, то $c_w \rightarrow 0$. В этом случае применяемое асимптотическое разложение перестает быть справедливым, так как напряженность электрического поля в амбиполярной области, как это следует из (2.1), становится слишком большой. Здесь уже необходимо использовать разложение по степеням $\alpha^{1/3}$, как это делается в [2-4].

Система уравнений (3.5) была численно проинтегрирована для некоторых частных случаев. На фиг. 3 показано изменение концентрации заряженных частиц в приэлектродном слое. Зависимость от λ дополнительно падения потенциала в слое по формуле

$$\Delta\psi = -\theta_w \Delta\psi_1, \quad \Delta\psi_1 = \int_0^{\infty} \left(G - \frac{\lambda}{c_w} \right) dt \quad (3.16)$$

представлена на фиг. 4, где кривые 1 ($a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.02$) и 2 ($a_1 = 0.02$, $a_2 = 0.005$) построены при $\epsilon_{1,2} = 0.05$.

Полное же падение потенциала в пограничном слое равно сумме падения потенциала в амбиполярной области и выражения (3.16).

Что же касается уравнения энергии в системе (3.2), то здесь необходимо сделать небольшое дополнение. Из физических соображений очевидно, что температура в приэлектродном слое существенно не изменяется, а прирост теплового потока пропорционален дополнительному падению потенциала в слое. Именно поэтому новая переменная для температуры была выбрана в форме (3.1), а величина E_∞ при выводе (3.2) не деформировалась, хотя аналогичная ей величина X претерпела сжатие.

Таким образом, тепловой поток на стенке можно определить в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_w = \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{\text{амб}} - k_1 E_\infty \Delta\psi_c \quad (3.17)$$

Наконец, комбинируя (2.3), (3.3) и (3.10), получаем недостающее краевое условие для уравнения диффузии (2.1) в амбиполярной области

$$\lambda(c_w) = \alpha^{1/2} \left[E_\infty - \frac{1-\beta}{1+\beta} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_w \right] \quad (3.18)$$

В заключение отметим, что проведенный анализ приэлектродного слоя остается в основном справедливым и для неподвижной плазмы.

Автор благодарит Э. А. Тропна за полезные обсуждения данной работы.

Поступило 20 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Chung P. M. Electrical characteristic of Couette and stagnation boundary layer flows of weakly ionized gases. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, p. 110.
2. Лэм. Общая теория течения слабоионизованных газов. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 2, стр. 42.
3. Me Assey E. V., Hsuan Yen. Electron heat transfer and probe characteristic in a moving nonequilibrium plasma. AIAA Paper, 1969, No. 69-699.
4. Bienkowski G., Kalnavarns I. The effect surface emission on continuum electrostatic probe theory. AIAA Paper, 1968, No. 68-167.
5. Любимов Г. А., Михайлов В. Н. К анализу области возмущения плазмы вблизи электрода. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3, стр. 9.
6. Блю Э., Ингольд Д., Озеров В. Диффузия электронов и ионов в нейтральном газе. Термоэмиссионное преобразование энергии. М., Атомиздат, 1965.