

О СЛОЕ СМЕШЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ В ОДНОРОДНОЙ НЕПРОВОДЯЩЕЙ И ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

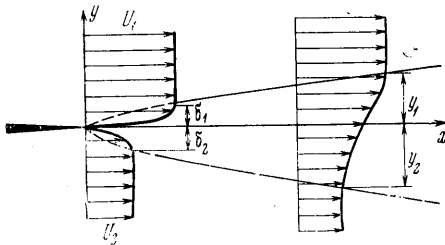
В. Г. ЛУЩИК, С. А. РЕГИРЕР

(Москва)

Исследуется смешение двух полубесконечных потоков однородной несжимаемой жидкости, сходящихся с разделяющей кромки. Обсуждаются некоторые аспекты постановки задачи и дается приближенное ее решение при помощи интегральных соотношений, которое обобщается на случай течения проводящей жидкости в продольном магнитном поле.

1. Постановка задачи. Рассмотрим развитое турбулентное течение несжимаемой жидкости в слое смешения двух полубесконечных потоков (фиг. 1), описываемое уравнением Рейнольдса [1-3]

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle uv \rangle \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь U , V — продольная и поперечная составляющие скорости среднего движения, $-\rho \langle uv \rangle$ — турбулентное касательное напряжение.

Будем считать, что зона смешения образуется за кромкой полубесконечной пластины ($x < 0$, $y = 0$), разделяющей два потока со скоростями U_1 , U_2 , причем влиянием пограничных слоев на пластине можно пренебречь ($\delta_1/x \ll 1$, $\delta_2/x \ll 1$).

Предположим, что задача имеет автомодельное решение

$$U = U_0(x) F'(\eta), \quad -\langle uv \rangle = U_0^2(x) g(\eta), \quad \eta = y/L(x) \quad (1.2)$$

Здесь $U_0(x)$, $L(x)$ — масштабы скорости и длины, $F(\eta)$, $g(\eta)$ — некоторые функции автомодельной переменной η ; штрих здесь и далее означает производную по автомодельной переменной.

Вводя функцию тока ψ равенствами $U = \partial\psi/\partial y$, $V = -\partial\psi/\partial x$, определяем ψ и V соотношениями

$$\psi = U_0 L F + \psi_*(x), \quad V = -F \frac{d}{dx}(U_0 L) + U_0 \eta F' \frac{dL}{dx} - \frac{d\psi_*}{dx} \quad (1.3)$$

Подставляя выражения (1.2) и (1.3) в уравнение (1.1), получаем

$$\frac{L}{U_0} \frac{dU_0}{dx} F'^2 - \frac{1}{U_0} \frac{d}{dx}(U_0 L) F F'' - \frac{1}{U_0} \frac{d\psi_*}{dx} F'' = g' \quad (1.4)$$

Это уравнение имеет смысл, если коэффициенты его не зависят от x , т. е.

$$\frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{dx} = \text{const}, \quad \frac{1}{U_0} \frac{d}{dx}(U_0 L) = \text{const}, \quad \frac{1}{U_0} \frac{d\psi_*}{dx} = \text{const}$$

Отсюда получаем, что автомодельное решение предполагаемой структуры существует при

$$L = \alpha x, \quad U_0 = \text{const}, \quad \varphi_* = \text{const}$$

Все остальные возможные случаи, как нетрудно убедиться, не имеют самостоятельного значения и связаны с изменением начала отсчета тех или иных величин.

Выражая турбулентное трение одной из двух следующих зависимостей

$$-\rho \langle uv \rangle = \rho l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\rho \langle uv \rangle = \rho \kappa b (U_1 - U_2) \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.5)$$

соответствующих первой и второй гипотезам Прандтля ($l = cx$ — путь смещения Прандтля, $b = kx$ — условная ширина зоны смещения, κ — эмпирическая константа), получаем автомодельное решение задачи в виде

$$\psi = U_0 x F(\eta), \quad U = U_0 F', \quad V = U_0 (\eta F' - F), \quad \eta = y/x \quad (1.6)$$

Функция $g(\eta)$ связана с $F(\eta)$ в соответствии с первой и второй гипотезами Прандтля соотношениями

$$g = c^2 F''^2, \quad g = \sigma_* F'' \quad \left(\sigma_* = \kappa k \frac{U_1 - U_2}{U_0} \right) \quad (1.7)$$

При этом функция $F(\eta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, вытекающему из (1.1). Для соотношений (1.5) будем соответственно иметь [1-2]

$$F + 2c^2 F''' = 0 \quad (1.8)$$

$$FF'' + \sigma_* F''' = 0 \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8), отвечающее первой гипотезе Прандтля, обладает тем очевидным свойством, что для него нельзя построить непрерывное и ограниченное (относительно компонент скорости) решение во всей области изменения η от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому первая гипотеза Прандтля непременно связана с представлением о зоне смещения конечной ширины $\delta = \eta_1 - \eta_2$. Для определения величин η_1, η_2 (т. е. границ зоны смещения) и трех постоянных интегрирования необходимо иметь пять граничных условий, четыре из которых очевидны: если $m = U_2 / U_1$ и $U_0 = U_1 - U_2$, то

$$U = U_1 \text{ или } F' = \frac{1}{1-m} \\ U' = 0 \text{ или } F'' = 0 \text{ при } \eta = \eta_1 \quad (1.10)$$

$$U = U_2 \text{ или } F' = \frac{m}{1-m} \\ U' = 0 \text{ или } F'' = 0 \text{ при } \eta = \eta_2 \quad (1.11)$$

В качестве пятого граничного условия будем задавать значение поперечной скорости на одной из границ (например, при $\eta = \eta_1$) зоны смещения, т. е.

$$V = V_1 \text{ или } \eta F' - F = p \text{ при } \eta = \eta_1 \quad (p = V_1 / U_0) \quad (1.12)$$

Уравнение (1.9), соответствующее второй гипотезе Прандтля, имеет (по крайней мере в области сходимости разложения Гертлера [3]) точное решение на всей оси η от $-\infty$ до $+\infty$, но не имеет, вообще говоря, решения, которое бы описывало зону смещения конечной ширины (это легко

проверить непосредственно). Таким образом, вторая гипотеза Прандтля связана с представлением об асимптотической зоне смешения. Разумеется, это не мешает строить приближенные кусочно-гладкие решения уравнения (1.9), в которых зоне основного изменения скорости приписывается конечная ширина (см. п. 4). При этом также требуется пять граничных условий — три условия для уравнения (1.9) и два соотношения для определения границ зоны смешения. Если строится решение для асимптотической зоны смешения, то необходимы только три граничных условия. Два из них очевидны: (1.13)

$$U \rightarrow U_1 \quad \text{или} \quad F' \rightarrow \frac{1}{1-m} \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow +\infty$$

$$U \rightarrow U_2 \quad \text{или} \quad F' \rightarrow \frac{m}{1-m} \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow -\infty$$

Третье граничное условие аналогично (1.12) примем в виде

$$V \rightarrow V_1 \quad \text{или} \quad \eta F' - F \rightarrow p \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow +\infty \quad (1.14)$$

Условия (1.12), (1.14) требуют дополнительного обсуждения, так как часто вместо них используются другие соотношения.

Обратимся сначала к уравнению (1.9). В литературе по теории струй со ссылкой на неопубликованную работу Кармана (см. [2, 4, 6]) приводится соотношение

$$U_1 V_1 = -U_2 V_2 \quad (1.15)$$

В монографии [5] вводится иное условие, а именно

$$V_1(\eta_1 U_1 - V_1) - V_2(\eta_2 U_2 - V_2) = 0 \quad (1.16)$$

Наконец, в монографии [6] утверждается, что (1.15) получается как следствие «интегрального соотношения импульсов»

$$\int_{\eta_2}^{\eta_1} U^2 d\eta = \eta_1 U_1^2 - \eta_2 U_2^2 \quad (1.17)$$

В цитированных работах относительно условий (1.15) — (1.17) утверждается, что они соответствуют случаю, когда нормально к потоку на жидкость не действуют внешние силы.

Все перечисленные соотношения, кроме (1.16), даются без вывода. При выводе соотношения (1.16) в [5] используется теорема импульсов в проекции на ось y , однако опускается член, учитывающий y -компоненту потока импульса через поперечное сечение зоны смешения. Если учесть этот член, то вместо (1.16) должно быть¹

$$V_1(\eta_1 U_1 - V_1) - V_2(\eta_2 U_2 - V_2) = \int_{\eta_2}^{\eta_1} UV d\eta \quad (1.18)$$

Заметим, что это соотношение получится также, если проинтегрировать по сечению зоны смешения (перейдя к переменной η) уравнение импульсов в проекции на ось y (без учета давления и турбулентных напряжений).

Что же касается соотношения (1.17), то его структура свидетельствует о связи с x -компонентой уравнения импульсов в интегральной форме. Однако подсчет компоненты потока импульса через границы зоны смешения и ее сечение, как нетрудно проверить, дает отличное от (1.17) соотношение

$$\int_{\eta_2}^{\eta_1} U^2 d\eta = \eta_1 U_1^2 - \eta_2 U_2^2 - U_1 V_1 + U_2 V_2 \quad (1.19)$$

¹ Поток импульса через точку $x = 0$, $y = 0$ равен нулю, так как для всех конечных $\eta_2 < \eta < \eta_1$ значения скоростей U , V ограничены.

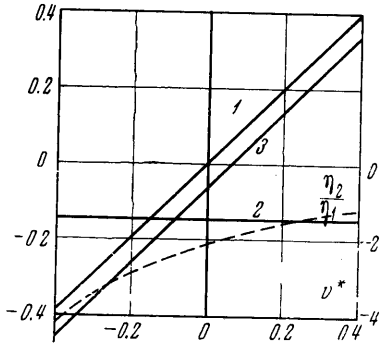
Ясно, что постановка задачи не допускает перехода от (1.19) к (1.17) без использования гипотетического условия Кармана (1.15).

Заметим еще, что отличие между (1.16) и (1.18) или (1.17) и (1.19) не может быть приписано малости тех или иных слагаемых, так как в рамках приближения пограничного слоя все члены уравнений (1.18), (1.19) имеют одинаковый порядок величины.

Действительно, если воспользоваться решением Толмина [1] при $m = 0$, обобщая его на случай ненулевой поперечной скорости при $\eta = \eta_1$, соотношение (1.18) с учетом (1.6) примет вид

$$F_1(\xi_1 F_1' - F_1) - F_2(\xi_2 F_2' - F_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} F(\xi F' - F) d\xi$$

$$(\xi = \eta / (2c^2)^{1/2}, \quad F' = dF / d\xi) \quad (1.20)$$



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены первый, второй и третий члены этого соотношения (кривые 1, 2 и 3 соответственно), а также отношение границ зоны смещения η_2 / η_1 в зависимости от безразмерной поперечной скорости $v^* = V_1 / U_1(2c^2)^{1/2}$. Как видно, в пределах разумного изменения величины η_2 / η_1 ($-4 < \eta_2 / \eta_1 < -1.5$) все члены соотношения (1.20) имеют приблизительно одинаковый порядок величины, причем соотношение (1.20) вообще не удовлетворяется.

Таким образом, зачастую формулируемые дополнительные условия для уравнения (1.8) не следуют из каких-либо убедительных физических или формальных соображений и в лучшем случае, как, например, условие Кармана (1.15), могут быть приняты в качестве гипотезы.

Более приемлемой поэтому представляется другая точка зрения (см. [7, 8]), состоящая в том, что в любом реальном случае по обе стороны от зоны смещения происходит некоторое, вообще говоря, двумерное течение. Характер этого течения полностью определяется «внешними» устройствами и не описывается уравнениями зоны смещения. Применяемый формализм (уравнения пограничного слоя с постоянным давлением) позволяет конкретизировать полностью внешнее течение по одну сторону зоны смещения (т. е. задать, например, U_1, V_1) и лишь частично по другую ее сторону. При этом величина U_2 задается, а V_2 вычисляется из решения. Очевидно, что именно этой ценой достигается возможность считать давление постоянным. Если внешние устройства (скажем, твердые границы) регулируют в действительности V_2 , а не давление, то следует использовать другие уравнения.

Перейдем теперь к вопросу о третьем граничном условии для уравнения Гертлера (1.9). В литературе оно фактически не формулируется явным образом, так как приближенное решение с точностью до аддитивной постоянной (см. далее п. 2) достаточно для определения продольной компоненты скорости. Нетрудно видеть, что точное решение уравнения (1.9) не допускает произвольной аддитивной постоянной и третье граничное условие необходимо сформулировать. Если попытаться использовать в качестве недостающего граничного условия одно из приведенных выше соотношений для зоны смещения конечной ширины $\delta = \eta_1 - \eta_2$, например (1.18), то окажется, что оно противоречит уравнению (1.9) с граничными условиями (1.13). Действительно, переходя в (1.18) к функции $F(\eta)$ согласно (1.6) и вычисляя интеграл справа по частям, вместо (1.18) будем иметь

$$\int_{\eta_2}^{\eta_1} \eta F F'' d\eta = 0$$

Отсюда, заменяя FF'' через F''' согласно (1.9) и выполняя интегрирование, получаем

$$(\eta F'' - F')|_{\eta_2}^{\eta_1} = 0 \quad (1.21)$$

Асимптотика решения уравнения Гертлера такова, что $\eta F'' \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$, а $F'|_{\eta_2}^{\eta_1}$ остается конечной и отличной от нуля величиной, если $U_1 \neq U_2$, что противоречит условию (1.21). Сказанное является еще одним доводом против использования соотношения (1.18) или эквивалентных ему в качестве дополнительного граничного условия.

2. Задача Гертлера. Обратимся к уравнению (1.9) с граничными условиями (1.13), (1.14). Согласно Гертлеру [3] введем параметр $\lambda = (U_1 - U_2) / (U_1 + U_2)$, в качестве характерной скорости используем $U_0 = (U_1 + U_2) / 2$ и введем новую независимую переменную $\varphi = \sigma\eta$, где $\sigma = (2\sigma_*)^{-1/2}$. Тогда для определения $F(\varphi)$ получим уравнение

$$F'''' + 2\sigma FF'' = 0 \quad (F' = dF/d\varphi) \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$\sigma F' \rightarrow 1 \pm \lambda \quad \text{при } \varphi \rightarrow \pm\infty \quad (2.2)$$

$$\varphi F' - F \rightarrow p \quad \text{при } \varphi \rightarrow +\infty \quad (2.3)$$

Решение задачи будем строить, как и в работе [3], при помощи разложения в ряд по степеням λ

$$\sigma F(\varphi) = f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \dots$$

Для функций f_i будем иметь

$$\begin{aligned} f_0'''' &= 0 \\ f_1'''' + 2(f_0 f_1'' + f_0'' f_1) &= 0 \\ f_2'''' + 2(f_0 f_2'' + f_0'' f_2) &= -2f_1 f_1'' \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение первого из этих уравнений возьмем в виде $f_0 = \varphi + \varphi_0$, так что условия (2.2) будут выполнены с точностью до членов порядка λ . Величину φ_0 выберем из условия (2.3), т. е. положим $\varphi_0 = -\sigma p$. Следующее приближение, удовлетворяющее условиям

$$f_1' \rightarrow \pm 1 \quad \text{при } \varphi \rightarrow \pm\infty, \quad \varphi f_1' - f_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } \varphi \rightarrow +\infty$$

находится после простых вычислений в виде

$$\begin{aligned} \sigma F &= f_0 + \lambda f_1 = \\ &= \varphi - (1 - \lambda)\sigma p + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \left[(\varphi - \sigma p) \int_0^{\varphi - \sigma p} e^{-z^2} dz + \frac{1}{2} e^{-(\varphi - \sigma p)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, в первом приближении

$$U \approx U_0 \left[1 + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi - \sigma p} e^{-z^2} dz \right] \quad (2.6)$$

$$V \approx \frac{U_0}{\sigma} \left\{ \sigma p - \lambda \left[\sigma p - \frac{2\sigma p}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi - \sigma p} e^{-z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\varphi - \sigma p)^2} \right] \right\}$$

Очевидно, что решение Гертлера получается из (2.6) при $p = 0$, т. е. оно соответствует равной нулю поперечной скорости при $\varphi \rightarrow +\infty$.

Из (2.6) видно, что профиль продольной компоненты скорости имеет такой же вид, что и в решении Гертлера, но он сдвинут (без деформации) вдоль оси φ . Поперечная компонента скорости отличается от распределения Гертлера более существенно. В частности, она становится несимметричной; значения V при $\varphi \rightarrow \pm\infty$ оказываются различными

$$V(+\infty) = pU_0, \quad V(-\infty) = p(1 - 2\lambda)U_0 \quad (2.7)$$

Заметим теперь, что примененная процедура решения использует условие (2.3) уже в нулевом приближении. Необходимость этого вовсе не очевидна (более того, распределение V согласно (2.6) не соответствует действительности) и можно потребовать, скажем, чтобы выполнялось условие

$$\varphi(f_0 + \lambda f_1)' - (f_0 + \lambda f_1) = \sigma p$$

В этом случае решение будет иметь вид

$$\sigma F = f_0 + \lambda f_1 = \chi + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \left[\chi \int_0^x e^{-z^2} dz + \frac{1}{2} e^{-x^2} \right] - (1 + \lambda) \varphi_0 - \sigma p \quad (2.8)$$

$$U \approx U_0 \left[1 + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz \right]$$

$$V \approx \frac{U_0}{\sigma} \left\{ \sigma p + \lambda \left[\varphi_0 - \frac{2\varphi_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right] \right\}$$

$$V(+\infty) = p U_0, \quad V(-\infty) = p \left(1 + \frac{2\lambda\varphi_0}{\sigma p} \right) U_0 \quad (\chi = \varphi + \varphi_0)$$

Это решение совпадает с (2.5) — (2.7) лишь при $\varphi_0 = -\sigma p$, но удовлетворяет условиям (1.13), (1.14) для всех φ_0 .

Произвол (в смысле неопределенности величины φ_0) в решении (2.8) является следствием разложения в ряд по заведомо не малому параметру λ и совершенно не связан с постановкой задачи. Поэтому естественно попытаться либо устранить этот произвол, выбирая φ_0 из условия наилучшей в определенном смысле аппроксимации точного решения задачи (2.1) — (2.3), либо использовать другие приближенные методы расчета.

В качестве примера использования первой из этих возможностей может быть указана следующая процедура. Потребуем, чтобы решение (2.8) удовлетворяло интегральному соотношению импульсов, взятому в виде

$$\lim_{\varphi', \varphi'' \rightarrow \infty} \int_{-\varphi'}^{\varphi''} (F''' + 2\sigma F F'') d\varphi = 0 \quad (2.9)$$

Подставляя сюда выражение для F (порядок предельного перехода не имеет значения), получаем

$$\lambda \sqrt{2} - [(1 + \lambda) \varphi_0 + \sigma p] \sqrt{\pi} = 0$$

Отсюда

$$\varphi_0 = \frac{1}{1 + \lambda} \left(\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sigma p \right) \quad (2.10)$$

Сопоставление решения с экспериментальными данными предусматривает введение в него значений U_0 , λ , p , измеренных в реальном течении. После этого можно сравнивать, допустим, распределения $U(\varphi)$ и оценивать качество решения. Очевидно, что введение в расчет еще одной эмпирической величины φ_0 , предлагаемое в [5, 6], не оправдывается никакими формальными соображениями. Формула же (2.10) является следствием только уравнения (2.1) и необходимых граничных условий (2.2), (2.3).

В решении [6] при $\lambda = 1$ значение $\varphi_0 = 0.33$ выбрано из условий совпадения расчетного профиля $U(\varphi)$ с опытным (в [5] из тех же соображений

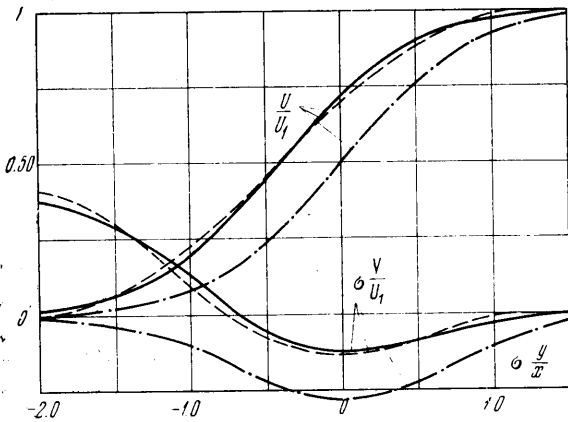
выбрано $\phi_0 = 0.3$). Формула (2.10) при $p = 0$ дает весьма близкое значение $\phi_0 = 0.398$, которому соответствуют профили $U(\phi)$, $V(\phi)$, практически не отличающиеся от приведенных в [6].

На фиг. 3 приведены профили продольной и поперечной составляющих скорости, соответствующих решению (2.8), для случая $\lambda = 1$, $p = 0$, $\phi_0 = 0.398$ (сплошные линии). Там же для сравнения нанесены кривые (штрих-пунктир), соответствующие решению Гертлера [3].

Следует отметить, что если вместо (2.9) воспользоваться «энергетическим» интегральным соотношением

$$\lim_{\phi', \phi'' \rightarrow \infty} \int_{-\phi'}^{\phi''} F'(F''' + 2\sigma FF'') d\phi = 0 \quad (2.11)$$

то получится снова равенство (2.10). Такая нечувствительность к выбору интегрального соотношения служит, очевидно, косвенным подтверждением правильности формулы (2.10) не только в качественном, но и в количественном отношении.



Фиг. 3

Как указывалось выше, для решения уравнения (2.1) можно использовать также методы, не связанные с разложением Гертлера, например метод итераций и прямые методы (интегральные соотношения), применение которых рассмотрим ниже.

3. Интегральные соотношения для слоя смешения. При исследовании смешения затопленной

струи или струи в спутном потоке часто пользуются интегральными соотношениями, выражающими законы сохранения массы или импульса [9]. В слое смешения не сохраняется ни одна из этих величин, поэтому интегральные соотношения, которые будут далее выведены, не имеют столь ясного физического смысла. Это не мешает, разумеется, использовать их при построении приближенных решений.

Допустим, что существует интеграл от $\partial U / \partial x$ вдоль всей оси y . Тогда из уравнения неразрывности и уравнения (1.1) обычным образом получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial x} dy = -(V_1 - V_2)$$

$$\frac{1}{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U^{n+2}}{\partial x} dy + \frac{1}{n+1} (U_1^{n+1} V_1 - U_2^{n+1} V_2) = - \int_{-\infty}^{\infty} U^n \frac{\partial}{\partial y} \langle uv \rangle dy \quad (3.1)$$

Полагая согласно (1.5)

$$-\langle uv \rangle = K(x) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^a \quad (3.2)$$

и замечая, что первое равенство (3.1) получается из второго при $n = -1$,

можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U^{n+2}}{\partial x} dy + (U_1^{n+1} V_1 - U_2^{n+1} V_2) = \quad (3.3)$$

$$= n(n+1) \alpha K(x) \int_{-\infty}^{\infty} U^{n-1} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{\alpha+1} dy \quad (n \geq -1)$$

Соотношения (3.3) являются аналогом интегральных соотношений В. В. Голубева [10]. Аналог соотношений Л. Г. Лойцянского [11] будем иметь, если проинтегрировать (1.1) с весом y^n , однако при этом возникнут интегралы, сходимость которых заранее не очевидна. Поэтому эти интегральные соотношения удобнее использовать, когда зона смешения имеет конечную ширину, или когда аппроксимирующие функции для U, V обеспечивают сходимость интегралов, или, наконец, когда соотношения записываются для конечной части потока.

Обозначим составляющие скорости на линиях $y = Y_1(x), y = Y_2(x)$ через $U = U_1(x), V = V_1(x)$ и $U = U_2(x), V = V_2(x)$ соответственно. Тогда, умножая (1.1) на y^n и интегрируя по y в пределах от Y_2 до Y_1 , получаем

$$\int_{Y_2}^{Y_1} \frac{\partial}{\partial x} (y^n U^2) dy - (U_1 V_1 Y_1^n - U_2 V_2 Y_2^n) - \quad (3.4)$$

$$- n \int_{Y_2}^{Y_1} y^{n-1} U V dy = \int_{Y_2}^{Y_1} y^n \frac{\partial}{\partial y} \langle uv \rangle dy$$

Еще одну группу интегральных соотношений, которые могут быть использованы и имеют к тому же ясный физический смысл, можно получить для интенсивности вихря среднего течения $\omega = \partial U / \partial y$. Дифференцируя (1.1) по y , умножая на ω^n и интегрируя вдоль всей оси y , будем с учетом (3.2) иметь

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} U \omega^{n+1} dy = n(n+1) \alpha K(x) \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{n+\alpha-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 dy \quad (3.5)$$

Для автомодельных течений соотношения (3.3) — (3.5) приобретают следующий вид:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \eta \frac{d}{d\eta} (F')^{n+2} d\eta + (U_1^{n+1} V_1 - U_2^{n+1} V_2) = (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} g' (F')^n d\eta \quad (3.6)$$

$$(F' = dF/d\eta, \quad g' = dg/d\eta)$$

$$- \int_{H_2}^{H_1} \eta^{n+1} \frac{d}{d\eta} (F')^2 d\eta + (U_1 V_1 H_1^n - U_2 V_2 H_2^n) - \quad (3.7)$$

$$- n \int_{H_2}^{H_1} \eta^{n-1} F' (\eta F' - F) d\eta = \int_{H_2}^{H_1} \eta^n g' d\eta$$

$$(H_1 = Y_1 / x = \text{const}, \quad H_2 = Y_2 / x = \text{const})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\eta \frac{d}{d\eta} (F' \Omega^{n+1}) + (n+1) F' \Omega^{n+1} \right] d\eta = (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} g'' \Omega^n d\eta \quad (3.8)$$

$$(\Omega = d^2 F / d\eta^2)$$

Соотношение (3.6) при $n=0$ и $n=1$ уже фактически использовалось в п. 2 (см. (2.9), (2.11)) для вычисления постоянной φ_0 в приближенном решении (2.8). Соотношению (3.8), как можно убедиться прямым вычислением, решение (2.8) тождественно удовлетворяет при любом φ_0 .

Соотношение (3.7) может быть преобразовано следующим образом:

$$-\int_{H_2}^{H_1} \eta^n F F'' d\eta = \int_{H_2}^{H_1} \eta^n g' d\eta \quad (3.9)$$

В таком виде (3.9) будет использовано в п. 4 для случая, когда $g(\eta)$ определено второй формулой (1.7), соответствующей второй гипотезе Прандтля, и $g' = \sigma_* F'''$. В другом случае, когда для $g(\eta)$ принято первое соотношение (1.7), соответствующее первой гипотезе Прандтля, и $g' = 2c^2 F'' F'''$, оба интеграла в (3.9) содержат F''' в качестве сомножителя подынтегральной функции. Если $F(\eta)$ ищется в виде полинома по η , то (3.9) эквивалентно более простому соотношению

$$-\int_{H_2}^{H_1} \eta^n F d\eta = 2c^2 \int_{H_2}^{H_1} \eta^n F''' d\eta \quad (3.10)$$

4. Решение задачи о слое смешения. Рассмотрим в качестве примера использования интегральных соотношений вида (3.7) решение уравнений (1.8), (1.9), соответствующих двум гипотезам Прандтля (1.5) для слоя смешения конечной ширины $\delta = \eta_1 - \eta_2$.

Представим решение в виде полинома четвертой степени от безразмерной переменной η

$$F(\eta) = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + a_4 \eta^4 \quad (\eta = y/x) \quad (4.1)$$

коэффициенты которого, определенные из граничных условий (1.10)–(1.12) имеют вид

$$a_0 = \frac{2\theta - 1}{2(\theta - 1)^3} \eta_1 - p, \quad a_1 = \frac{m}{1 - m} - \frac{\theta^2(3 - \theta)}{(\theta - 1)^3} \quad \left(\theta = \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)$$

$$a_2 = \frac{3\theta}{(\theta - 1)^3} \eta_1^{-1}, \quad a_3 = -\frac{\theta + 1}{(\theta - 1)^3} \eta_1^{-2}, \quad a_4 = \frac{1}{2(\theta - 1)^3} \eta_1^{-3} \quad (4.2)$$

Для безразмерных величин продольной и поперечной составляющих скорости (1.6) с учетом (4.1), (4.2) получим следующие выражения:

$$\frac{U - U_2}{U_1 - U_2} = (\theta - 1)^{-3} \left[\theta^2(\theta - 3) + 6\theta \frac{\eta}{\eta_1} - 3(\theta + 1) \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^3 \right] \quad (4.3)$$

$$\frac{V}{U_1 - U_2} = \frac{\eta_1}{(\theta - 1)^3} \left[\frac{p}{\eta_1} (\theta - 1)^3 - \frac{2\theta - 1}{2} + \right. \\ \left. + 3\theta \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^2 - 2(\theta + 1) \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^4 \right] \quad (4.4)$$

Вводя новую переменную $\zeta = (\eta_1 - \eta) / (\eta_1 - \eta_2)$ для продольной составляющей скорости, можно получить выражение

$$\Theta(\zeta) = \frac{U - U_2}{U_1 - U_2} = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \quad (4.5)$$

которое не зависит от отношения скоростей, т. е. является универсальным.

Для определения оставшихся неизвестными величин ϕ и η_1 воспользуемся интегральными соотношениями.

Рассмотрим случай, соответствующий первой гипотезе Прандтля (задача Толмина — Кьюза). Этому случаю соответствует интегральное соотношение (3.10) ($H_1 = \eta_1$, $H_2 = \eta_2$, $n = 0, 1$), из которого с использованием (4.1), (4.2) получаются выражения для ϕ и η_1

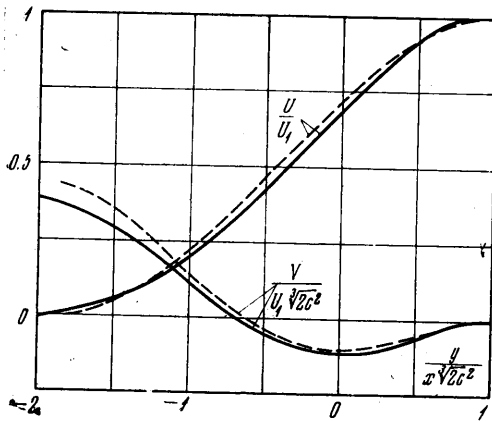
$$\phi = -\frac{13-3m}{7+3m} + 20\frac{1-m}{7+3m}\frac{p}{\eta_1}, \quad \eta_1 = \frac{1}{1-\phi} \left(48c^2 \frac{1-m}{1+m} \right)^{1/3} \quad (4.6)$$

Сравнение профилей продольной и поперечной составляющих скорости, определенных по (4.3), (4.4) с учетом выражений (4.6) с точным решением Толмина [1] ($m = 0$), в котором пятое граничное условие (1.12) принято в виде

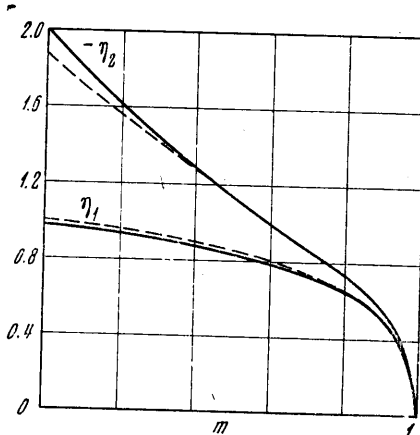
$$V = V_1 = 0 \quad \text{или} \quad \eta F' - F = 0 \quad (p = 0) \quad \text{при} \quad \eta = \eta_1 \quad (4.7)$$

представлено на фиг. 4. Сплошные линии соответствуют точному решению Толмина, пунктир — приближенному. Как видно, совпадение профилей скорости и границ зоны смещения вполне удовлетворительное.

В работе Кьюза [2] решение Толмина обобщено на случай $m \neq 0$ ($0 \leq m \leq 1$). Пятое граничное условие в этой работе представлено в двух вариантах: граничное



Фиг. 4



Фиг. 5

условие Толмина (4.7) и условие Кармана (1.15). Как следует из [2], отличие зависимостей $\eta_1(m)$, $\eta_2(m)$ в первом и втором случаях оказалось незначительным вследствие того, что условие Кармана (1.15) дает значение поперечной скорости при $\eta = \eta_1$, по существу, мало отличающееся от нулевой, что соответствует условию (4.7). Поэтому для иллюстрации точности приближенного метода расчета на фиг. 5 представлены зависимости $\eta_1(m)$, $\eta_2(m)$, определенные по (4.6) с использованием только граничного условия (4.7). Сплошные линии соответствуют точному решению Кьюза [2], пунктир — приближенному.

Следует отметить, что величина c , входящая в соотношения (4.6), которая была введена для связи пути смещения Прандтля с продольной координаты, не имеет ясного физического смысла и, вообще говоря, зависит от отношения скоростей смешивающихся потоков m .

Поэтому удобнее использовать [1] другую постоянную c_b , которая связывает путь смещения Прандтля l с шириной зоны смещения $b = y_1 - y_2$. Действительно, поскольку l — длина, которая до некоторой степени характеризует масштаб турбулентности (средний размер турбулентных возмущений) в данном сечении $x = \text{const}$, то естественно предположить, что она пропорциональна ширине слоя с градиентом скорости, в котором порождается турбулентность, т. е. согласно [1] $l = c_b b$.

Для относительной ширины зоны смещения $k = b/x$ с учетом выражения (4.6) для η_1 получается выражение

$$k = \frac{c}{c_b} = \eta_1 - \eta_2 = \left(48c^2 \frac{1-m}{1+m} \right)^{1/3} \quad (4.8)$$

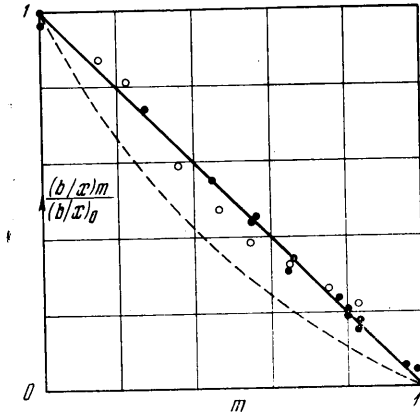
Отсюда можно получить

$$c(m) = 48c_b^3 \frac{1-m}{1+m}, \quad k(m) = 48c_b^2 \frac{1-m}{1+m} \quad (4.9)$$

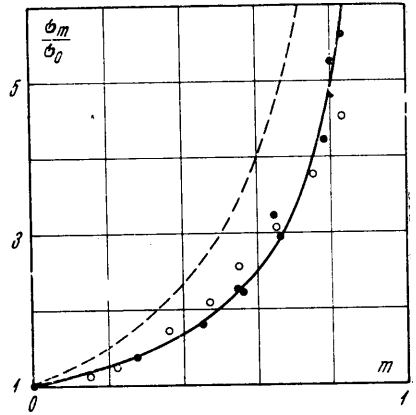
Таким образом, величина c оказалась действительно зависящей от m , и если иметь в виду эту зависимость, то решением Кьюза [2] можно пользоваться и в случае $m \neq 0$.

Следует заметить, что второе выражение (4.9) для $k(m)$ с точностью до постоянной c_b совпадает с аналогичным выражением, предложенным Г. Н. Абрамовичем и подтвержденным экспериментом [5].

Однако более поздние эксперименты [12, 13], в которых исследовалось течение, близкое к рассматриваемому, т. е. было устранено влияние начальных условий (получены однородные потоки с минимальными величинами начальных пограничных слоев и урвной турбулентности), дают зависимость для $k_m / k_{m=0}$, близкую к $1 - m$, которая была предложена О. И. Навозновым и А. А. Павельевым [12].



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 6 представлены экспериментальные данные, полученные в работе [12] (сплошные кружки), а также данные работы [13] (светлые кружки), пересчитанные по формуле (4.16) (см. ниже). Там же нанесены зависимости $k_m / k_0 = 1 - m$ (сплошная кривая), $k_m / k_0 = (1 - m) / (1 + m)$ (пунктир).

Таким образом, из сравнения с экспериментом оказалось, что величина c_b также не является постоянной и зависит от m приблизительно как

$$\frac{(c_b)_m}{(c_b)_{m=0}} \approx \sqrt{1 + m} \quad (4.10)$$

Обратимся теперь к случаю, соответствующему второй гипотезе Прандтля (задача Гертлера для слоя конечной ширины). Этому случаю соответствует интегральное соотношение (3.9), из которого, как и в предыдущем случае, получаются недостающие соотношения для ϕ и η_1

$$\phi = -\frac{44 - 9m}{26 + 9m} + 70 \frac{1 - m}{26 + 9m} \frac{p}{\eta_1}, \quad \eta_1 = \frac{1}{1 - \phi} \left(40\kappa k \frac{1 - m}{1 + m} \right)^{1/2} \quad (4.11)$$

Нетрудно заметить, что полученные соотношения (4.11) для ϕ и η_1 имеют одинаковую структуру и количественно близки (при соответствующем выборе констант) выражениям (4.6). Это лишь раз подтверждает известный факт, что для свободной турбулентности обе гипотезы Прандтля дают близкий результат.

Сравнение профилей продольной и поперечной составляющих скорости, определенных по (4.3), (4.4) с учетом (4.11), с решением (2.8) для случая $\lambda = 1$, $p = 0$ ($\phi_0 = 0.398$) представлено на фиг. 3 (пунктир).

В выражениях (4.11) величины κ и k не будут независимыми. Между ними существует связь

$$k = \left(40\kappa k \frac{1 - m}{1 + m} \right)^{1/2}$$

Отсюда можно получить зависимость для k от κ и m

$$k(m) = 40\kappa \frac{1-m}{1+m} \quad (4.12)$$

Полученное выражение для $k(m)$ с точностью до постоянной совпадает с аналогичным выражением (4.7). Для полного совпадения зависимостей (4.12) и (4.7) необходимо потребовать, чтобы $\kappa = 1.2 c_b^2$.

Приблизительное равенство констант κ и c_b^2 в двух гипотезах Прандтля для турбулентного трения является следствием того, что струйный профиль скорости близок к линейному. Действительно, турбулентное напряжение в соответствии с первой гипотезой Прандтля (1.5) для профиля скорости, близкого к линейному, можно записать в виде

$$-\rho \langle uv \rangle = \rho l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \approx \rho (c_b b)^2 \frac{U_1 - U_2}{b} \frac{\partial U}{\partial y} = \rho c_b^2 b (U_1 - U_2) \frac{\partial U}{\partial y}$$

откуда, сравнивая с выражением для турбулентного трения в соответствии со второй гипотезой Прандтля (1.5), видно, что $c_b^2 \approx \kappa$.

Величина κ аналогично c_b должна зависеть от m . Это можно проиллюстрировать на параметре подобия σ , введенном Гертлером [3]

$$\sigma = \left(4\kappa k \frac{1-m}{1+m} \right)^{-1/2} \quad (4.13)$$

С учетом (4.12) его можно записать следующим образом:

$$\sigma = (4\sqrt{10}\kappa)^{-1} \frac{1+m}{1-m} \quad (4.14)$$

или, отнеся это выражение для произвольного m к соответствующему выражению для $m = 0$, получим

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_0} = \frac{\kappa_0}{\kappa_m} \frac{1+m}{1-m} \quad (4.15)$$

Если предположить, что $\kappa = \text{const}$, т. е. $\kappa_m = \kappa_0$, то для σ_m / σ_0 получится выражение, предложенное Сайбеном [13]. В случае $\kappa_m = \kappa_0(1+m)$ получится выражение, предложенное Голиком [13]. На фиг. 7 представлены экспериментальные данные, полученные в работе Майлза и Ши [13] (светлые кружки), а также данные [12] (сплошные кружки), пересчитанные по формуле (следующей из (4.12) и (4.15))

$$\sigma_m / \sigma_0 = k_0 / k_m \quad (4.16)$$

Там же нанесены кривые, соответствующие $\kappa = \text{const}$ (пунктир) и $\kappa_m = \kappa_0(1+m)$ (сплошная кривая). Из фиг. 7 видно, что последняя зависимость для κ лучше соответствует эксперименту. Сравнивая эту зависимость с выражением (4.10) для c_b и учитывая, что $\kappa \approx c_b^2$, можно утверждать, что зависимость величин κ и c_b от m действительно имеет место и подтверждена независимыми экспериментальными данными, полученными в условиях, максимально приближенных к рассматриваемой задаче.

Следует отметить, что в работе [13] для σ_m / σ_0 предложена следующая эмпирическая зависимость:

$$\sigma_m / \sigma_0 = 1 + 5m^2 \quad (4.17)$$

которая в диапазоне $m = 0 \div 0.8$ близка к выражению

$$\sigma_m / \sigma_0 = (1-m)^{-1} \quad (4.18)$$

полученному для случая $\kappa_m = \kappa_0(1+m)$. Из (4.16), (4.17) для относительной ширины зоны смещения получается следующее выражение:

$$k_m / k_0 = (1 + 5m^2)^{-1}$$

Легко заметить, что это выражение не стремится к нулю при $m \rightarrow 1$. Поэтому, начиная с $m \approx 0.8$, использование (4.17) не оправдано.

5. Течение в продольном магнитном поле. Рассмотрим случай, когда жидкость является проводящей (с коэффициентом электропроводности σ) и на поток в направлении оси x наложено постоянное магнитное поле (с индукцией B). При этом в уравнении движения в проекции на ось x градиент давления в большей части слоя смещения по сравнению с инерционными членами имеет порядок [14, 15]

$$\frac{\partial P / \partial x}{\rho U \partial U / \partial x} \sim \frac{\sigma B^2 b^2}{\rho (U_1 - U_2) x} = S_x \left(\frac{b}{x} \right)^2, \quad S_x = \frac{\sigma B^2 x}{\rho (U_1 - U_2)}$$

что составляет величину не более 0.27 (см. ниже) при любых значениях числа Стюарта S_x ; b — некоторая условная ширина зоны смещения.

Если пренебречь градиентом давления, то уравнение движения в слое смещения (1.1) сохраняет прежний вид, а отличие от случая отсутствия магнитного поля состоит в определении напряжения Рейнольдса $-\rho \langle uv \rangle$, которое в рассматриваемом случае согласно [14, 16] можно представить в виде

$$-\rho \langle uv \rangle = -\psi \rho \langle uv \rangle_0 \quad (5.1)$$

Здесь $-\rho \langle uv \rangle_0$ — напряжение Рейнольдса в соответствии с гипотезами (1.5) или (1.6), ψ — коэффициент, учитывающий влияние магнитного поля, который для течения вдали от твердых стенок является согласно [14, 16] функцией локального числа Стюарта

$$S_i = \frac{\sigma B^2}{\rho} \frac{1}{\partial U / \partial y} \quad (5.2)$$

Допустим, что при течении в магнитном поле форма профиля продольной составляющей скорости не претерпевает существенных изменений и близка к линейной, как и в отсутствие поля. Тогда локальное число Стюарта (5.2) можно приближенно считать независимым от поперечной координаты, т. е. постоянным поперек зоны смещения. При этом

$$S_i \approx S = \frac{\rho (U_1 - U_2)}{\sigma B^2 b} \quad (5.3)$$

Используя предположение о постоянстве S_i , а следовательно и $\psi = \psi(S_i)$, поперек зоны смещения и вводя новые переменные, предложенные В. М. Иевлевым [14]

$$x_1 = \int_0^x \psi dx', \quad V_1 = V / \psi \quad (5.4)$$

уравнение (1.1) с учетом соотношения (5.1) можно преобразовать к виду

$$U \frac{\partial U}{\partial x_1} + V_1 \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle uv \rangle_0 \quad (5.5)$$

Полученное уравнение в переменных (x_1, y) полностью совпадает с уравнением движения в свободном турбулентном пограничном слое в случае отсутствия магнитного поля (1.1), решение которого известно

(см. п. 1, 2, 4). Остается лишь осуществить переход из плоскости x_1, z в физическую плоскость x, z . Для этого необходимо найти выражение для коэффициента ψ в зависимости от x .

В работах [14, 16] получены формулы для $\psi = \psi(S_i)$ и построены графики при различных значениях эмпирической постоянной ξ_0 , учитывающей среднюю по сечению начальную (до наложения магнитного поля) анизотропию турбулентности потока. Однако эти выражения достаточно громоздки, поэтому для получения приближенного решения целесообразно пользоваться аппроксимирующими соотношениями. Так, зависимость, полученную в [16], можно описать выражением

$$\psi = (1 + \beta S)^{-3} \quad (5.6)$$

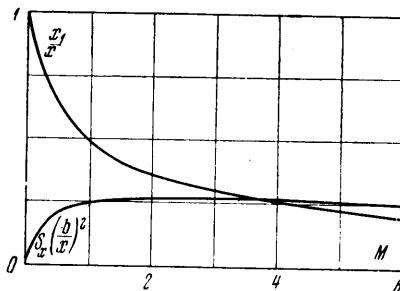
которое достаточно близко к точному решению для ψ во всем диапазоне чисел Стюарта. Здесь β — коэффициент аппроксимации, зависящий от ξ_0 (например, $\beta = 0.2$ для $\xi_0 = 2$).

Таким образом, связь между x_1 и x дается уравнением

$$dx_1 = \psi dx = (1 + \beta S)^{-3} dx \quad (5.7)$$

В выражении для числа Стюарта (5.3) зависимость ширины зоны смещения b от x_1 (в общем случае ненулевой начальной ширины b_0) имеет вид

$$b = b_0 + kx_1 \quad (5.8)$$



Фиг. 8

где $k = k(m)$ то же, что и в случае отсутствия магнитного поля (см. п. 4). Используя соотношения (5.3), (5.7) и (5.8), можно получить связь между переменными x_1 и x

$$(1 + \beta S_0)^4 + 4k\beta S_x = [(1 + \beta S_0) + k\beta S_x]^4 \quad (5.9)$$

$$S_0 = \frac{\sigma B^2 b_0}{\rho(U_1 - U_2)}, \quad S_{x_1} = \frac{\sigma B^2 x_1}{\rho(U_1 - U_2)}$$

В случае отсутствия начального пограничного слоя ($b_0 = 0$) связь между x_1 и x (5.9) примет довольно простой вид

$$\frac{x_1}{x} = \frac{(1 + 4M)^{1/4} - 1}{M}, \quad M = k\beta S_x \quad (5.10)$$

График зависимости x_1/x от M (5.10) представлен на фиг. 8. Там же для $k/\beta = 1$ изображена зависимость от M величины

$$S_x \left(\frac{b}{x} \right)^2 = \left[\frac{(1 + 4M)^{1/4} - 1}{M} \right]^2 M \frac{k}{\beta} \quad \left(\frac{k}{\beta} \leq 1 \right)$$

характеризующей порядок отношения градиента давления к инерционным членам в уравнении движения.

Авторы благодарят Г. Н. Абрамовича за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tollmien W. Berechnung der turbulenten Ausbreitungsvorgänge. ZAMM, 1926, Bd 4, Nr 6, Hft 6, S. 468—478.
2. Kuethe A. M. Investigations of the turbulent mixing regions formed by jets. J. Appl. Mech., 1935, vol. 22, No. 3, A87—95.
3. Görtler H. Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. ZAMM, 1942, Bd 22, Nr 5, S. 244—254.
4. Бай Ш и - и. Теория струй. М., Физматгиз, 1960.
5. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
6. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
7. Liepmann H. W. Free turbulent flows. Mecanique de la Turbulence. Marseille, 28 aout — 2 sept. 1961. Colloq. Ineternat. Centre Nat. Rech. Sci., 1962, No. 108, pp. 211—227.
8. Корявов П. П. Численный расчет турбулентного смещения двух однородных потоков газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 3.
9. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
10. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. М., Гостехиздат, 1949.
11. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
12. Навознов О. И., Павельев А. А. О смешении спутных газовых струй. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1968, № 2.
13. Miles J. B., Shih J. Similarity parameter for two-stream turbulent jet-mixing region. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 7, pp. 1429—1430. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, № 7, стр. 257—258.)
14. Иевлев В. М. Теоретическое исследование влияния магнитного поля на турбулентность потока электропроводной жидкости. Симпозиум по проблемам турбулентных течений, включая геофизические приложения. Тезисы докладов и сообщений. Киев, «Наукова думка», 1967.
15. Лущик В. Г. Турбулентная затопленная струя электропроводной жидкости в продольном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1968, № 2.
16. Ковнер Д. С., Лущик В. Г. О турбулентном течении проводящей жидкости в продольном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.