

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ ПРИ МАЛОМ ПАРАМЕТРЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

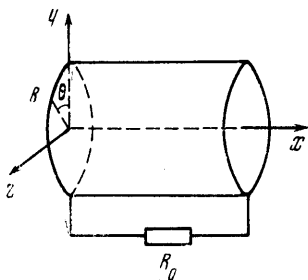
И. П. СЕМЕНОВА, А. Е. ЯКУБЕНКО

(Москва)

Выводятся уравнения квазиодномерного приближения в электрогидродинамике, учитывающие двумерные эффекты, связанные с наличием поперечного электрического поля и утечками тока через стенки канала. Проводится сравнение экспериментальных данных [1] с результатами численных расчетов течений в каналах при малом параметре взаимодействия по одномерной теории и по квазиодномерной теории, учитывающей двумерные эффекты. Обсуждается вопрос о получении универсальной вольт-амперной характеристики для каналов с различным отношением ширины к длине.

При изучении электрогидродинамических течений в каналах многими авторами [2-5] использовалась система уравнений одномерного приближения, в которой принято, что все величины зависят только от продольной координаты, а электрическое поле имеет одну компоненту, направленную вдоль оси канала. Однако действительная картина распределения электрических полей и токов в канале носит более сложный характер.

Собственное электрическое поле, связанное с наличием в канале объемного электрического заряда, имеет как продольную, так и поперечные компоненты, кроме того, внешнее электрическое поле между электродами может быть существенно неоднородным из-за геометрии и конечной протяженности электродов, расположенных на торцах канала. Отклонение от одномерности электрогидродинамических потоков в каналах может быть обусловлено также наличием поперечных электрических токов, приводящих к утечкам через стенки. Учет указанных пространственных эффектов можно провести в рамках квазиодномерного приближения. Для вывода системы уравнений квазиодномерного приближения воспользуемся методикой, применявшейся ранее в работах [6-8].



Фиг. 1

1. Рассмотрим течение в канале круглого сечения радиуса R . Направление осей координат и размеры канала указаны на фиг. 1. Будем считать, что все величины не зависят от координаты θ , а электрическое поле имеет составляющие вдоль осей x и r . Выпишем уравнения электрогидродинамики [9] в интегральной форме в проекции на ось x

$$\frac{d}{dx} \int_F \rho u \, dF = 0, \quad \frac{d}{dx} \int_F (\rho u^2 + p) \, dF = \int_F q E_x \, dF \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_F \rho u (i + 0.5u^2) \, dF &= \int_F \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dF \\ \frac{d}{dx} \int_F E_x \, dF + \frac{2E_{r_w}(x)}{R} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_F q \, dF \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$I = \int_F q (u + bE_x) \, dF, \quad \frac{dI}{dx} = -2\pi R j_{r_w}, \quad dF = r \, dr \, d\theta$$

Здесь $E_{r_0}(x)$ — значение поперечного электрического поля на стенке канала, $j_{r_0}(x)$ — значение поперечного тока на стенке канала, I — полный ток, текущий в канале, i — энталпия.

Уравнения (1.1) и (1.2) записаны в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью.

Введем в рассмотрение некоторый неоднородный канонический поток, гидродинамические параметры которого (скорость, давление, энталпия) задаются соотношениями

$$u(x, r) = u_0(x)\psi_1(r), \quad i(x, r) = i_0(x)\psi_2(r), \quad p(x, r) = p_0(x)$$

При этом уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} (\delta_1 u_0)' &= 0, & (\delta_2 u_0^2 + p_0)' &= \int_F q E_x dF \\ \left(\delta_3 \frac{u_0^3}{2} + \delta_* u_0 i_0 \right)' &= \int_F j E dF \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь

$$\delta_n = \int_F \rho \psi_1^n dF \quad (n=1,2,3), \quad \delta_* = \int_F \rho \psi_1 \psi_2 dF$$

Функции ψ_1 и ψ_2 характеризуют степень отклонения канонического потока от одномерного. Эти функции задаются на основе анализа двумерных решений или экспериментальных данных из условия наилучшего описания распределения параметров истинного потока.

В дальнейшем рассмотрим простейшее течение, распределение гидродинамических параметров в котором близко к одномерному. При этом

$$\psi_1(r) = \psi_2(r) = 1, \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_* = \rho_0(x)F$$

Для того чтобы замкнуть систему уравнений квазиодномерного приближения, необходимо определить правые части второго и третьего уравнений (1.3). Они должны выражаться через u_0 , i_0 , p_0 и некоторые средние электрогидродинамические величины, которые в свою очередь должны удовлетворять уравнениям (1.2).

Рассмотрим течение в длинных узких каналах, когда отношение ширины канала к длине есть малая величина

$$\xi = R/L \ll 1$$

Из уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ получим в безразмерной форме

$$\frac{E_x(x, r)}{E_{x0}} = \frac{E_x(x, 0)}{E_{x0}} + \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{r_1} \frac{E_r(x, r_1)}{E_{x0}} dr_1 \sim \frac{E_x(x, 0)}{E_{x0}} + \xi \frac{E_{r0}}{E_{x0}} \quad (1.4)$$

$$x_1 = x/L, \quad r_1 = r/L$$

Здесь E_{x0} и E_{r0} — характерные значения продольного и поперечного полей. Так как $\xi \ll 1$, можно пренебречь последним членом в уравнении (1.4) по сравнению с E_x/E_{x0} . Таким образом, в этом случае имеем $E_x(x, r) = \bar{E}_x(x)$, т. е. вдали от концов канала распределение продольного электрического поля близко к однородному. Выберем в качестве плотности заряда для канонического потока среднее по сечению значение плотности заряда

$$\langle q(x) \rangle = \frac{1}{F} \int_F q dF$$

При этом правые части двух первых уравнений (1.2) и второго уравнения (1.3) выразятся через $\langle q \rangle$ и E_x . Правую часть третьего уравнения (1.3) можно записать в виде

$$\int_F \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dF = \int_F j_x E_x dF + \int_F j_r E_r dF \quad (1.5)$$

Проинтегрируем уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ в пределах от 0 до r . Вводя безразмерные координаты $x_1 = x/L$, $r_1 = r/L$, для случая $j_{rw} = 0$ получим

$$\frac{2j_r(x, r)}{i} \sim \frac{j_x^*}{i} \quad (1.6)$$

Здесь j_x^* — характерное значение плотности тока, j_0 — значение плотности тока на входе в канал, а $\xi = R/L$. Из (1.6) следует, что, если $\xi \ll 1$, поперечный ток j_r значительно меньше, чем продольный и при отсутствии утечек тока через стенки последним членом в (1.5) можно пренебречь. При учете утечек тока характерной величиной поперечного тока является j_{rw} , которая связана со свойствами стенок. В п.3 предложена конкретная модель, позволяющая учесть токи утечки и получить для величины j_{rw} зависимость (3.6). Пользуясь уравнением (3.6), можно сравнить члены в правой части соотношения (1.5) и получить дополнительное соотношение, при выполнении которого можно пренебречь последним членом в (1.5) при наличии утечек тока. Оно имеет вид

$$\frac{j_{rw}}{j_x} \sim \frac{\sigma_w \delta}{q_0 b R} \ll 1$$

Здесь σ_w и δ — электропроводность и толщина стенок канала.

Если принять, что давление и энтальпия связаны с плотностью и температурой обычным соотношением для идеального газа $p = \rho RT$ и $i = c_p T$, то для замыкания системы уравнений

$$\begin{aligned} \rho u = m = \text{const}, \quad mu' + p' &= qE_x, \quad m(i + 0.5u^2)' = j_x E_x \quad (1.7) \\ p = \rho RT, \quad E_x' &= q/\epsilon_0 - 2E_{rw}/R, \quad I = \pi R^2(u - bE_x), \quad q \\ I' &= -2\pi R j_{rw} \end{aligned}$$

необходимо еще задать две функции $E_{rw}(x)$ и $j_{rw}(x)$.

Таким образом, учет в одномерной теории двумерных эффектов, связанных с наличием поперечного электрического поля и утечек тока через стенки канала, вводит в одномерную теорию две дополнительных функции E_{rw} и j_{rw} , выражения для которых могут быть взяты, например, из анализа двумерных решений, или из экспериментальных данных, или получены на основании дополнительных предположений при построении модели течения, как это будет сделано в п.3 для течения с малым параметром взаимодействия.

2. Рассмотрим одномерное течение в цилиндрическом канале без учета двумерных эффектов. Система уравнений (1.7) в этом случае переходит в уравнения одномерного приближения, которые с учетом уравнения $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ могут быть записаны в виде [3]

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{IM^2[u - (\gamma - 1)bE_x]}{m\pi R^2(u + bE_x)(M^2 - 1)} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.1) \\ \frac{dE_x}{dx} &= \frac{I}{\epsilon_0 \pi R^2(u + bE_x)} \quad \frac{d\varphi}{dx} = -E_x \end{aligned}$$

Здесь

$$M^2 = \frac{mu}{\gamma(\Pi + E_x^2/2\epsilon_0 - mu)}, \quad \Pi = mu + p - \frac{E_x^2}{2\epsilon_0} = \text{const}$$

Введем безразмерные переменные

$$e = \frac{E_x}{E_0}, \quad \Phi = \frac{\varphi b}{u_0 L}, \quad x = \frac{x}{L}, \quad u = \frac{u}{u_0}$$

$$S = \frac{IL}{\pi R^2 \rho_0 u_0^2 b}, \quad \omega = \frac{\rho_0 b^2}{\epsilon_0}, \quad k = -\frac{E_0 b}{u_0}$$

Система (2.1) примет вид

$$\frac{du}{dx} = \frac{SkM^2 e [u + (\gamma - 1)ke]}{(u - ke)(1 - M^2)u}, \quad \frac{de}{dx} = -\frac{S\omega}{k(u - ke)}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = ke, \quad M^2 = \frac{M_0^2 u}{1 + \gamma M_0^2 (1 - u) + \gamma M_0^2 k^2 (e - 1)/2\omega} \quad (2.2)$$

Здесь M_0 — число Маха на входе в канал.

Экспериментальные измерения показывают, что скорость течения в каналах постоянного сечения практически постоянна по длине. Это является следствием малого параметра взаимодействия S . Например, вычисленный в соответствии с данными работы [1] параметр взаимодействия S составляет величину порядка 10^{-4} . Поэтому для расчета распределения параметров потока по длине канала и сравнения одномерных теоретических решений с результатами экспериментальных измерений можно воспользоваться системой уравнений (2.2), которая в случае малого параметра взаимодействия принимает вид

$$\frac{de}{dx} = -\frac{S\omega}{k(1 - ke)}, \quad \frac{d\Phi}{dx} = ke \quad (2.3)$$

Граничные условия для системы (2.3) могут быть сформулированы, например, следующим образом:

$$e = 1, \quad \Phi = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \Phi = \Phi_1 \quad \text{при } x = 1 \quad (2.14)$$

Значение параметра $S\omega$ определяется значением полного тока, протекающего в канале. Система уравнений (2.3) с граничными условиями (2.4) позволяет определить величины e , Φ и параметр k (безразмерное электрическое поле на входе в канал). Эта система была численно проинтегрирована на ЭВМ методом пристрелки. Значения параметра $S\omega$ и потенциала Φ_1 были вычислены по параметрам, при которых проводились эксперименты. Результаты расчетов (кривые 1) для каналов различных длин представлены на фиг. 2 ($\varphi_1 = 40$ кв, $R_0 = 3 \cdot 10^9$ ом, $L = 22.86$ см) и фиг. 3 ($\varphi_1 = 70$ кв, $R_0 = 10^{10}$ ом, $L = 15.24$ см). Результаты экспериментов, обработанные в безразмерном виде, представлены на тех же фигурах точками. Расчеты показали, что одномерная теория не дает достаточно хорошего численного совпадения теории и эксперимента, а в ряде случаев (фиг. 3) дает качественное отличие от экспериментальных измерений. Расхождение одномерных решений с экспериментальными данными может быть объяснено наличием двумерных эффектов, таких как поперечное электрическое поле и утечки тока через стенки, которые не были учтены в одномерной теории.

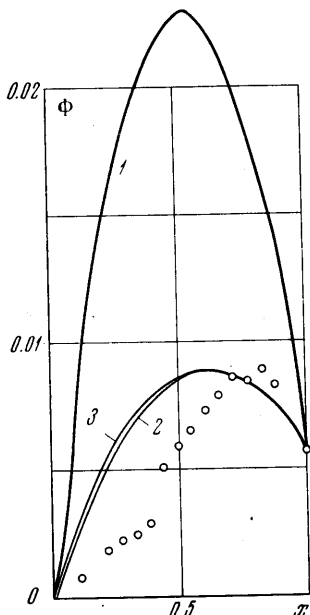
3. Система уравнений (1.7) в том случае, когда утечка тока через стенки не учитываются, а учтено только поперечное электрическое поле, сводится для случая малого параметра взаимодействия к двум уравнениям, которые имеют вид

$$E_x' = q/\epsilon_0 - 2E_{rv}(x)/R, \quad I = \pi R^2 q(u + bE_x) \quad (3.1)$$

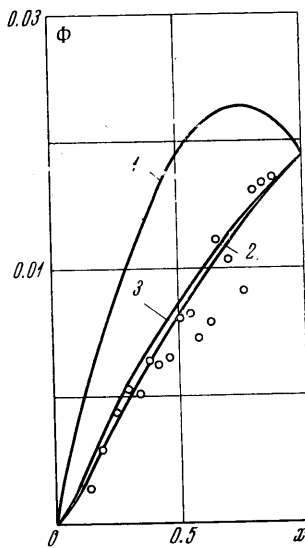
Вводя в рассмотрение электрический потенциал и исключая плотность электрического заряда q из первого уравнения (3.1), получаем

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{I}{\pi R^2 \epsilon_0 (u + bE_x)} - \frac{2E_{rw}(x)}{R}, \quad \frac{d\phi}{dx} = -E_x \quad (3.2)$$

Для качественной оценки влияния поперечного электрического поля на одномерное течение заменим функцию $E_{rw}(x)$ постоянным значением



Фиг. 2



Фиг. 3

[10], которое будет выбрано из условия согласования теоретического решения с экспериментальными данными. Для удобства расчетов примем, что

$$\frac{2E_{rw}}{R} = \alpha \frac{I}{\pi R^2 \epsilon_0 u_0} \quad (3.3)$$

В безразмерной форме с учетом соотношения (3.3) имеем

$$e' = -\frac{S\omega}{k} \left[\frac{1 - \alpha(1 - ke)}{1 - ke} \right], \quad \Phi' = ke \quad (3.4)$$

Система уравнений (3.4) численно интегрировалась с граничными условиями (2.4). Безразмерный параметр $S\omega$ и значение разности потенциалов Φ_1 соответствовали экспериментальным данным работы [1]. Значение параметра α выбиралось из условия совпадения значения максимума потенциала с экспериментально измеренным значением (фиг. 2) и совпадения одной из экспериментальных точек с точкой расчетной кривой (фиг. 3). Результаты расчетов, представленные на фиг. 2 и фиг. 3 (кривые 2), показывают, что квазиодномерная теория, учитывающая поперечное электрическое поле, лучше описывает полученные в эксперименте кривые распределения электрического потенциала по длине канала, чем чисто одномерная теория (кривые 1 на фиг. 2 и фиг. 3).

Отношение поперечного поля к продольному полю на входе в канал для расчетов, представленных, например, на фиг. 2 (кривая 2), равно 0.055, при этом $E_{x0} = 9 \cdot 10^5$ в/м, $E_{rw} = 4.9 \cdot 10^4$ в/м. Несмотря на малость поперечного поля по сравнению с продольным, оно существенно влияет на распределение электрического потенциала по длине канала.

Учет влияния поперечного поля в одномерной теории был проведен в предположении, что поперечный ток на стенках канала отсутствует. Ниже приводится приближенная теория, позволяющая учесть утечки электрического тока через стенки канала аналогично тому, как это делается в магнитной гидродинамике [8], и результаты расчетов по этой теории.

Рассмотрим элемент dx цилиндрического канала радиуса R , толщина стенок которого равна δ . Предположим, что стенки канала обладают электропроводностью σ_w . Для полного тока, текущего по стенкам канала, можно записать соотношение, вытекающее из закона Ома для проводника и из непрерывности касательной составляющей электрического поля на поверхности канала

$$I_w = 2\pi R \delta \sigma_w E_x \quad (3.5)$$

За счет радиальной составляющей электрического тока в канале на длине dx в стенки утекает ток, равный $2\pi R j_{rw} dx$. Из-за этого происходит изменение полного тока, протекающего по стенкам.

Используя уравнение (3.5), имеем

$$2\pi R j_{rw} dx = dI_w = 2\pi R \delta \sigma_w dE_x$$

Отсюда следует, что

$$j_{rw} = \sigma_w \delta E_x' \quad (3.6)$$

Закон Ома в проекции на радиальное направление имеет вид

$$j_{rw} = q_w b E_{rw} \quad (3.7)$$

Здесь q_w — значение плотности заряда на стенке. Для исследования качественного влияния j_{rw} на течение в дальнейшем будем считать, что $q_w = q$ — среднему по сечению значению плотности заряда. Из (3.2) и (3.3) имеем

$$E_{rw} = \frac{\sigma_w \delta}{qb} E_x' \quad (3.8)$$

Изложенная выше модель, учитывающая утечки тока, позволила получить выражения для функций $j_{rw}(x)$ и $E_{rw}(x)$, входящих в систему уравнений квазиодномерного приближения (1.7). Выражения (3.6) и (3.8) соответствуют заданию j_{rw} и E_{rw} в виде функций специального вида, вводящих в систему уравнений (1.7) новый параметр, учитывающий свойства стенок. Подставим выражение (3.6) в последнее уравнение (1.7) и проинтегрируем его по x . Учитывая, что $E_x = E(L)$, $I = I_1$ при $x = L$, получаем

$$I = I_1 + 2\pi R \delta \sigma_w [E(L) - E_x(x)] \quad (3.9)$$

Здесь I_1 — ток, снимаемый на правом конце канала.

Система уравнений (1.7) в случае малого параметра взаимодействия с учетом соотношения (3.8) сводится к уравнению (3.9) и уравнениям для определения электрического поля и электрического потенциала

$$E_x' = \frac{bI^2}{\pi R^2 \epsilon_0 (u + bE_x) [bI + 2\pi R \delta \sigma_w (u + bE_x)]} \quad (3.10)$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$e = \frac{E_x}{E(L)}, \quad k = \frac{E(L)b}{u_0}, \quad x = \frac{x}{L}, \quad \Phi = \frac{\varphi b}{u_0 L}, \quad \sigma = \frac{2\sigma_w \delta L}{Ru_0},$$

$$S = \frac{ILb}{\pi R^2 u_0^2 \epsilon_0}$$

Получим

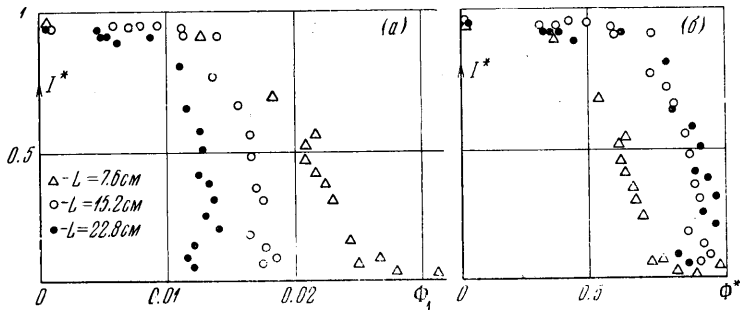
$$\frac{de}{dx} = \frac{(S\omega)^2}{k(1+ke)(S\omega + \sigma(1+ke))} \quad (3.11)$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = -ke, \quad S\omega = (S\omega)_1 + \sigma k(1-e)$$

Система уравнений (3.11) численно интегрировалась на ЭВМ при следующих граничных условиях:

$$S\omega = (S\omega)_1, \quad \Phi = \Phi_1, \quad e = 1 \quad \text{при } x = 1, \quad \Phi = 0 \quad \text{при } x = 0$$

Расчеты проводились при тех же значениях параметра $(S\omega)_1$ и безразмерной разности потенциалов, при которых ранее интегрировались системы (2.3) и (3.4) и которые соответствуют экспериментальным данным. Результаты расчетов представлены на фиг. 2 и фиг. 3 (кривые 3). Значение параметра δ , учитывающего тол-



Фиг. 4

щину и электропроводность стенок, было выбрано из условия совпадения максимального значения потенциала с экспериментальным значением, полученным в эксперименте, представленном на фиг. 2. При этом $\sigma = 0.45$. В расчетах, соответствующих другой длине канала, величина σ была изменена обратно пропорционально отношению R/L .

4. Величины полного тока I и разности потенциалов Φ_1 , необходимые для расчетов течения в каналах, не могут быть взяты произвольно. Между ними существует зависимость $\Phi_1 = \Phi_1(I)$, которая является вольт-амперной характеристикой устройства. Уравнения закона Ома во внешней цепи $\Phi_1 = IR_0$ (R_0 — характеризует внешнюю нагрузку) и соотношений (2.3) недостаточно для получения однозначной теоретической зависимости между Φ_1 и I при заданных свойствах жидкости, расходе и величине внешней нагрузки. В этом отношении положение в электрогидродинамике значительно сложнее, чем в магнитной гидродинамике, где при заданном объемном расходе, известной электропроводности и геометрии канала может быть найдена однозначная теоретическая зависимость между полным током и разностью потенциалов.

Отсутствие теоретической зависимости $\Phi_1 = \Phi_1(I)$ сильно затрудняет расчеты течений в каналах, так как неизвестны граничные условия для решения системы уравнений, описывающей течение. Поэтому была предпринята попытка получить универсальную вольт-амперную характеристику, основываясь на экспериментальных данных.

Рассмотрим систему уравнений (2.3) с граничными условиями (2.4), не учитывая двумерные эффекты. В эту систему входят безразмерные параметры $S\omega$, Φ_1 и k . Параметр k при этом не будет независимым. Его величина определяется из решения системы (2.3) с граничными условиями (2.4), если Φ_1 и $S\omega$ заданы. Таким образом, из теории размерности следует, что связь между безразмерными величинами Φ_1 и $S\omega$ должна носить универсальный характер для каналов различных длин, если для описания явлений в канале справедлива чисто одномерная теория.

Однако обработанные в безразмерных переменных Φ_1 и $I^* = S\omega / (S\omega)_0$ экспериментальные вольт-амперные зависимости, взятые из работы [1], отличаются одна от другой для каналов различной длины (фиг. 4, а). (Величина $(S\omega)_0$ подсчитывалась

по току короткого замыкания, который был одинаковым для каналов различной длины и равнялся в эксперименте $60 \mu A$). Это отличие можно объяснить влиянием двумерных эффектов и потерями, неизбежно возникающими при работе реальных устройств. Учет в одномерной теории потерь, связанных с утечками электрического тока через стенки канала и учет двумерных эффектов за счет поперечного электрического поля вводит в систему уравнений помимо указанных параметров $S\omega$ и Φ_1 дополнительный параметр $\xi = R/L$, характеризующий влияние длины. Это позволяет искать зависимость между Φ_1 и $S\omega$ в виде $\Phi_1 = \Phi_1(S\omega, \xi)$. Была сделана попытка получить вид этой зависимости на основе обработки экспериментальных данных, представленных на фиг. 4, а.

Экспериментальные данные были обработаны по формулам

$$I^* = S\omega / (S\omega)_0, \quad \Phi^* = \Phi_1(1 + \beta\xi^\alpha) \quad (4.1)$$

Значение параметров α и β выбирались из условия, чтобы $\Phi^* = 1$ в режимах разомкнутой цепи (при $I^* = 0$) для всех трех длин. Расчеты показали, что это требование выполняется при условии $\beta = 3.093$, $\alpha = -0.889$.

Результаты, представленные на фиг. 4, б, показывают, что точки, соответствующие длинным каналам ($\xi = 0.041$ и $\xi = 0.028$), расположены таким образом, что через них можно провести, например, по методу наименьших квадратов кривую, для которой можно подобрать аналитическую зависимость $\Phi^* = \Phi^*(I^*)$. Эта зависимость и будет вольт-амперной зависимостью для длинных каналов. Точки, соответствующие короткому каналу ($\xi = 0.083$), не ложатся на эту кривую. Это, по-видимому, можно объяснить влиянием краевых эффектов искажения электрического поля за счет геометрии электродов (учет конечной протяженности электродов вводит дополнительные безразмерные параметры), сильнее всего проявляющихся в коротком канале.

Авторы благодарят Г. А. Любимова за внимание к работе.

Институт механики МГУ

Поступило 14 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Shuie I. C., Kahn B., Brandmaier H. E. An experimental investigation of the performance characteristics of an electrogasdynamic power generator. Engineering Developments in Energy Conversion, N. Y., ASME, 1965.
2. Бортников Ю. С., Рубашов И. Б. Одномерные течения в электрогазодинамике. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
3. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Одномерные течения в электрогидродинамике. ПММ, 1969, т. 33, № 2.
4. Гурдин М., Баррето Э., Хан М. Характеристики электрогазодинамических генераторов. Сб. «Прикладная магнитная гидродинамика», М., «Мир», 1965.
5. Marks A., Barreto E., Cu C. K. Charged aerosol energy converter. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 1.
6. Седов Л. И., Черный Г. Г. Об осреднении неравномерных потоков газа в каналах. Сб. «Теоретическая гидромеханика», М., Оборонгиз, 1954, № 12.
7. Любимов Г. А. Об осреднении магнитогидродинамических потоков и применимости гидравлического приближения для расчета магнитогидродинамических течений в каналах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
8. Битюрин В. А., Любимов Г. А. Квазиодномерный анализ течений в канале МГД-генератора. Теплофизика высоких температур, 1969, № 5.
9. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
10. Семенова И. П. Исследование влияния поперечного электрического поля на одномерное электрогидродинамическое течение. ПММ, 1970, т. 34, № 2.