

О ВОЗМУЩЕНИЯХ ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

Г. Б. ИЛЬИНСКАЯ, Ю. Б. ЛИФШИЦ

(Москва)

Изучаются плоские вихревые течения газа в окрестности точек ортогональности звуковой линии к вектору скорости. Такие точки возникают при трансзвуковом обтекании профиля крыла во внешней области пограничного слоя, где имеется поперечный градиент скорости. В области, прилегающей к носу профиля, всегда существует точка рассматриваемого типа, при переходе через которую ускорение частиц положительно. Звуковая линия в ней обращена выпуклостью в сторону дозвуковых скоростей. Такая ситуация свойственна только для вихревых течений и не допускается уравнениями, описывающими потенциальное движение газа. Решение задачи о течении указанного вида следует из результатов работы [1]. Ниже исследуются потоки, в которых ускорение отрицательно перед звуковой точкой. Они могут возникать при обтекании профилей крыла с «пикообразным» распределением давления, когда интенсивные волны сжатия, исходящие из звуковой линии, затормаживают поток в местной сверхзвуковой зоне.

Как всегда при изучении локальной особенности течения возьмем за начало координат саму точку ортогональности звуковой линии к линии тока и направим ось x вдоль вектора скорости, а ось y по нормали к нему. Движение газа описывается уравнениями неразрывности, вихря и Бернулли. Будем считать, что вихрь является достаточно гладкой функцией в некоторой окрестности начала координат, так что справедливо представление

$$\Omega = \omega_0 + \omega y + o(y^2)$$

В трансзвуковом приближении компоненты возмущенной скорости u и $v' = v + \omega_0 x$ удовлетворяют уравнениям, получаемым обычным предельным переходом из исходных уравнений. В них вместо поперечной составляющей скорости v' удобнее брать величину v , удовлетворяющую приведенному выше равенству. Этот прием исключает из уравнений постоянную часть вихря ω_0 . В результате получаем систему

$$\frac{\partial v}{\partial u} - u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega y \quad (1)$$

От известных уравнений Кармана [2] система (1) отличается членом ωy в правой части второго уравнения. В пограничном слое, как правило, $\omega > 0$. Справедливость этого неравенства предполагается при дальнейшем исследовании.

Рассмотрим решения системы (1), принадлежащие к классу автомодельных решений, близкому к полученному в [3] и примененному затем для анализа течений в окрестности центра сошла Лавала

$$u = \omega y^2 f(\xi), \quad v = \omega^{3/2} y^3 g(\xi), \quad \xi = \omega^{-1/2} x y^{-2} \quad (2)$$

Равенства (2) отличаются от соответствующих формул работы [3] присутствующими в них степенями ω . Они дают явную зависимость искомых решений от указанного параметра. Действительно, подстановка формул (2) в систему (1) приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно $f(\xi)$ и $g(\xi)$, в которые ω не входит явно. После исключения из них $g(\xi)$ приходим к уравнению второго порядка

$$(f - 4\xi^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + 2\xi \frac{df}{d\xi} - 2f = 1 \quad (3)$$

Функция $g(\xi)$ дается равенством

$$g = 1/3 [4f\xi + 2\xi + (f - 4\xi^2) df / d\xi] \quad (4)$$

Уравнение (3) отличается от полученного С. В. Фальковичем [4] только единицей в правой части. Однако найти его общий интеграл, как это было сделано в [4] для однородного уравнения, не удастся. Поэтому поведение интегральных кривых уравнения (3) будем исследовать при помощи численного интегрирования. Но предварительно определим вид решения в окрестности особых точек уравнения. Ими будут бесконечно удаленные точки и точки параболы $f = 4\xi^2$. В окрестности точек $\xi = \pm \infty$ искомая функция представляется в виде ряда

$$f = -4\alpha\xi + 8\alpha^2 - \frac{1}{2} + \beta \sum_{i=-1}^{\infty} a_i |\xi|^{-i-1/2} \quad (5)$$

Здесь α и β — произвольные постоянные, а коэффициенты a_i определяются при помощи рекуррентной формулы

$$a_i = \frac{(2i-3)(2i-1)}{2(i+1)(2i+3)} \left[\alpha a_{i-1} \operatorname{sign} \xi + \frac{16\alpha^2 - 1}{8} a_{i-2} \right]$$

$$a_{-1} = 1, \quad a_0 = -1/2 \alpha \operatorname{sign} \xi, \quad i = 1, 2, \dots$$

Если $\beta = 0$, то решение, как следует из (5), будет линейной функцией. В работе [4] именно оно было использовано для описания вихревого трансзвукового течения в окрестности точки ортогональности звуковой линии к вектору скорости.

В точках ξ_0 параболы $f = 4\xi^2$ интегральная кривая может быть либо перпендикулярной оси ξ , либо иметь наклон, даваемый формулой

$$\frac{df}{d\xi} = k_{1,2} = -\xi_0 \mp \sqrt{9\xi_0^2 + 1}$$

При $\xi_0 < 0$ вдоль направления $k_2 > 0$ через точку ξ_0 проходит только одна интегральная кривая $f = 4\xi_0^2 + k_2(\xi - \xi_0)$. Отрицательного направления с $k_1 < 0$ касается бесконечное количество интегральных кривых. Их вид в окрестности точки ξ_0 определяется разложением

$$f = 4\xi_0^2 + k_1(\xi - \xi_0) + \gamma(\xi - \xi_0)^\nu + \dots \quad (6)$$

Здесь γ — произвольная постоянная, а

$$\nu = (9\xi_0 - \sqrt{9\xi_0^2 + 1}) / (9\xi_0 + \sqrt{9\xi_0^2 + 1}) \quad (7)$$

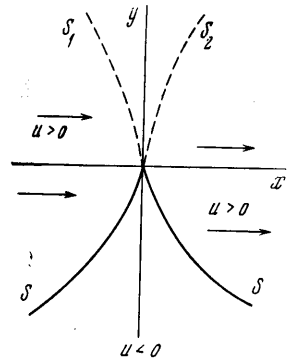
При положительных значениях ξ_0 формулы для общего и исключительного направления узла сохраняются. При целых ν все интегральные кривые общего направления узла голоморфны в точке ξ_0 . При дробных ν не существует ни одной голоморфной кривой, за исключением прямых, получаемых при $\gamma = 0$. Парабола $\omega^{-1/2}xy^{-2} = \xi_0 < 0$ является приходящей в начало координат предельной характеристикой. В произвольном трансзвуковом потоке вдоль нее, вообще говоря, не распространяются никакие особенности в производных скорости. Поэтому для описания течения следует брать только такие решения уравнения (3), которые остаются аналитическими в окрестности точек ξ_0 .

Теперь становится ясным метод построения нужных решений уравнения (3). Из точек ξ_0 параболы $f = 4\xi^2$ при $\xi < 0$, соответствующих целым значениям ν , следует выпустить интегральные кривые (6) и выбрать величину γ так, чтобы при движении вдоль интегральной кривой можно было обойти всю окрестность начала координат, не получая складок в плоскости течения. При этом вдоль уходящей предельной характеристики возможно распространение разрывов высших производных составляющих скорости и, кроме того, допускаются как уходящие, так и приходящие скачки уплотнения, на фронте которых должны быть удовлетворены условия Гюгонно.

Численный анализ поведения интегральных кривых, удовлетворяющих на характеристике $\xi_0 < 0$ упомянутым условиям, приводит к существованию только непрерывных решений. Последние возможны лишь при нечетных значениях ν , причем при каждом ν только одна интегральная кривая удовлетворяет всем необходимым требованиям. В полученных решениях на уходящей предельной характеристике имеется разрыв не менее чем третьих производных скорости. Соответствующее течение схематически показано на фигуре. Дозвуковая область расположена в нижней полуплоскости и представляет собой включение в сверхзвуковой поток, ограниченное двумя ветвями звуковой линии S , имеющей точку возврата; S_1 и S_2 — предельные характеристики.

Построенные течения возможны при фиксированных значениях первой производной по x продольной составляющей вектора скорости частиц, взятой при $y = 0$ и $x \rightarrow 0^-$. Эти значения образуют бесконечную последовательность, первые два члена которой равны $-0.59\omega^{-1}$ и $-0.53\omega^{-1}$. Соответствующие значения $\partial u / \partial x$ при $y = 0$ и $x \rightarrow 0^+$ будут $0.606\omega^{-1}$ и $0.66\omega^{-1}$. Вдоль характеристики S_2 вниз по потоку распространяются разрывы высших производных скорости. Обращение картины приводит к течениям, в которых особенность пропадает в звуковой точке исследуемого типа.

Полученные результаты указывают на возможность возникновения в трансзвуковых потоках нерегулярностей специального вида, вызванных завихренностью течения.



ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин Э. Г. Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖТ, 1966, № 6.
2. Von Karman Th. The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
3. Рыжов О. С. Некоторые вырожденные околосвуковые течения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
4. Фалькович С. В. К теории сопла Лавалья. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.

О ПРОФИЛИРОВАНИИ СОПЛ, РАБОТАЮЩИХ НА ГАЗЕ С ЧАСТИЦАМИ КОНДЕНСАТА

Г. В. ДРИТОВ, А. П. ТИШИН

(Москва)

Прямой метод решения вариационной задачи применяется при отыскании оптимального профиля сверхзвуковой части сопла для газа с частицами. Приводятся результаты такого решения, а также изложен подход к профилированию предварительного характера, направленный на уменьшение выноса частиц на концевой участок сопла и получение для некоторого семейства профилей импульса, близкого к максимально достижимому. Влияние от варьирования профилей в до- и трансзвуковой области сопла при этом не рассматривается.

Вариационная задача поиска оптимального профиля сопла в случае неравновесного течения газа с конденсированными частицами в одномерном приближении решена в работах [1-3]. Основной результат их состоит в том, что оптимальный профиль примерно на одну треть уменьшает потери, связанные с запаздыванием частиц, по сравнению с соплом, построенным для газа. При этом сопло имеет необычную конфигурацию с коротким входом и сильно вытянутой горловиной. Последнее связано с необходимостью уменьшения максимального градиента скорости и перемещения зоны наибольшего отставания частиц в дозвуковую часть. Неучет принципиальных особенностей двумерного течения (например, непараллельности потока) и неизбежное усиление роста частиц вследствие коагуляции в зоне высокого давления [4] приводит к увеличению потерь удельного импульса. Это снижает прикладное значение результатов работ [1-3].

Задача оптимизации сверхзвукового профиля для двумерного неравновесного двухфазного течения решалась Гоффманом и Томпсоном [5, 6] и была уточнена и дополнена А. Н. Крайко и А. А. Осиповым [7]. Последние, в частности, получили, что при удлинении сопла (это в принципе может оказаться целесообразным для неравновесных течений), таком что замыкающая характеристика начинается на оси вне начального пучка волн разрежения, оптимальное сопло должно иметь внутренние угловые точки. Угловые точки могут быть также на разгонном участке, если он является варьируемым элементом короткого сопла.

Расчеты по программе [8] для небольшой концентрации частиц (весовая доля $z < 40\%$) при учете трения и веса сопла указывают на отсутствие заметного выигрыша в эффективном удельном импульсе от увеличения длины в случае неравновесного течения по сравнению с равновесным. Разгонный участок, куда может в соплах сравнительно небольшой длины прийти характеристика первого семейства, пересекающаяся на оси с замыкающей характеристикой, как правило, очерчивается небольшим радиусом, допустимым по условиям теплопередачи. Таким образом, при исследовании практически интересных случаев можно рассматривать профили, не содержащие внутренних угловых точек.

Ввиду больших трудностей в реализации метода [7] в настоящее время отсутствуют публикации с результатами расчетов оптимальных сопел для неравновесных двухфазных течений. Применение для этой цели методов, разработанных для газа (см., например, обзор, сделанный А. Л. Гонором и А. Н. Крайко в «Приложении» к [9], или метод авторов [10], изложенный в [11]), с заменой реальным неравновесного двухфазного потока течением газа, по термодинамическим свойствам эквивалентного равновесной смеси с частицами, является лишь первым приближением. Расчеты неравновесных осесимметричных двухфазных течений [8, 12] указывают, в частности, на значительную разницу в величине неравномерности по сечению для неравновесных и равновесных течений.