

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.
2. Silveston P. L. Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten. Forsch. Geb. Ingenieurwesens, Ser. 8, 1958, Bd. 24, Nr. 1, S. 29—32.
3. Леонтьев А. И., Кирдяшкин А. Г. Теплообмен при свободной конвекции в горизонтальных щелях и большом объеме над горизонтальной поверхностью. Инж.-физ. ж., 1965, т. 9, № 1.
4. Somerscales E., Dropkin D. Experimental investigation of the temperature distribution in a horizontal layer of fluid heated from below. Internat. J. Heat and Mass Trans., 1966, vol. 9, No. 11.
5. Fromm J. E. Numerical solutions of the nonlinear equations for a fluid layer. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 10, pp. 1757—1769.
6. Aziz K., Hellums J. D. Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 2, pp. 314—324.
7. Jakob M. Free heat convection through enclosed plane gas layers. Trans. ASME, 1946, vol. 68, No. 3, pp. 189—194.
8. Batchelor G. K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. Quart. J. Appl. Math., 1954, vol. 12, No. 3, pp. 209—233.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О теплопередаче через вертикальную щель прямоугольного сечения при сильной конвекции. Инж.-физ. ж., 1960, т. 3, № 12, стр. 63—67.
10. Eckert E. R. G., Carlson W. O. Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures. Internat. J. Heat and Mass Trans., 1961, vol. 2, No. 1/2, pp. 106—120.
11. Mordchelles-Regneer G., Kaplan C. Visualisation des conditions de transition a la turbulence en convection naturelle «Compt. rend. 8. J. hydraul. soc. hydrotechn. France, Lille, 1964, т. 1». Grenoble, 1965, pp. 91—97.
12. Elder J. W. Laminar free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt. 1, pp. 77—99.
13. Elder J. W. Numerical experiments will free convection in vertical slot. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, pt 4, pp. 823—843.
14. Masaru H., Niichi N., Masaaki I., Hidemi M. Heat transfer across an enclosed vertical layer of relatively blow high/ratio. Semi-internat. sympos. Tokyo, 4—8-th Sept. 1967, vol. 1, pt 1, pp. 13—18.
15. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. К теории Рэлеевской неустойчивости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, стр. 812—819.
16. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2, стр. 256—263.
17. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, стр. 855—860.
18. Mal S. Forms of stratified clouds. Beitrage zur Physik der freien Atmosphere, 1931, Bd. 17, H. 1, S. 40—68.
19. Graham A. Shear patterns in an unstable layer of air. Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1933, vol. 232, pp. 285—296.
20. Ostrach B. Convective phenomena in fluids heated from below. Trans. ASME, 1957, vol. 79, No. 2, pp. 299—305.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СМЕШАННОМ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМ
ТЕЧЕНИИ ГАЗА В НЕКОТОРЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОБЛАСТЯХ
МЕТОДОМ УСТАНОВЛЕНИЯ**

И. М. ВАСЕНИН, А. Д. РЫЧКОВ

(Томск)

Применяется метод установления для расчета изэнтальпического и неизэнтальпического течения газа в криволинейной области с непрерывной верхней границей, а также для расчета изэнтальпического течения в области со скачком площади поперечного сечения. В этом методе стационарное течение газа рассматривается как предельное во времени нестационарного течения.

Криволинейная часть области спрямляется введением новых независимых переменных. Выяснено условие, при котором такое преобразование не изменяет формы

законов сохранения. Результаты расчетов свидетельствуют о существенной неоднородности течения газа в рассматриваемых областях.

Метод установления при решении подобных задач применялся М. Я. Ивановым и А. Н. Крайко [1], а также авторами данной работы [2]. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности этого метода даже при использовании разностных схем первого порядка точности.

В данной работе для решения нестационарной системы уравнений газодинамики используется конечно-разностный метод [3], имеющий второй порядок точности на гладких решениях.

1. Система уравнений газовой динамики, описывающая нестационарное осесимметрическое течение газа, записывается в виде законов сохранения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y\rho + \nabla_y \rho U &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} yN + \nabla_y NU + \frac{\partial}{\partial y} yp &= p \\ \frac{\partial}{\partial t} yM + \nabla_y MU + \frac{\partial}{\partial x} yp &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} y\varepsilon + \nabla_y \varepsilon U + p \nabla_y U &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$p = p(\rho, \varepsilon), \quad U = ui + vj, \quad M = \rho u, \quad N = \rho v$$

Здесь U — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление; ε — внутренняя энергия на единицу объема, i, j — орты осей X, Y .

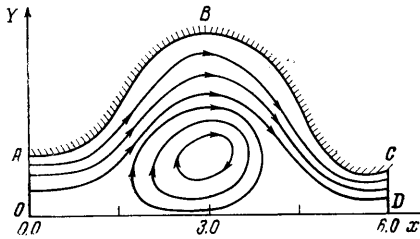
При интегрировании этой системы конечно-разностным методом в криволинейной области $F \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq \delta(x), t \geq 0\}$ (где $y = \delta(x)$ — верхняя граница области, L — константа) возникает потребность в замене области F сеточной. Однако непосредственная замена нецелесообразна, поскольку ведет к появлению нерегулярных граничных узлов (или расчетных ячеек). Поэтому обычно вводят такие новые независимые переменные $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, в которых криволинейная область становится прямоугольной. Можно показать, что если при таком преобразовании якобиан $J = D(x, y) / D(a, b)$ существует и не обращается в нуль ни в одной точке области, то форма законов сохранения в (1.1) не теряется.

Пусть закон сохранения в переменных x, y записывается как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad g = g(f), \quad h = h(f)$$

Тогда в новых переменных он уже будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Jf + \frac{\partial}{\partial a} \left[J \left(g \frac{\partial a}{\partial x} + h \frac{\partial a}{\partial y} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial b} \left[J \left(g \frac{\partial b}{\partial x} + h \frac{\partial b}{\partial y} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Подобное преобразование независимых переменных будет использоваться в дальнейшем при решении конкретных задач.

2. Рассматривается осесимметрическое смешанное течение газа в области $OABCD$ (фиг. 1), представляющей собой криволинейный канал, переходящий в сопло Лавала. Газ поступает в область через границу OA с дозвуковой скоростью, причем его массовый приход задан таким образом, что на срезе сопла CD всегда поддерживается сверхзвуковой режим течения. Приход массы газа должен выбираться с учетом возможности выхода на стационарный режим течения [4], в частности, его можно полагать постоянным.

Верхняя граница ABC области задается в виде некоторой функции $y = \delta(x)$ и предполагается непроницаемой. Граничные условия для системы (1.1) в силу ее гиперболичности следует задавать из рассмотрения характеристических свойств. При этом, используя результаты работы [2], можно показать, что на проницаемой границе OA следует задавать три граничных условия, на непроницаемой границе ABC — одно. Граница CD (срез сопла) лежит в сверхзвуковой области течения, имеет пространственный тип [5, 6] и на ней граничных условий задавать не нужно.

В данной работе при расчете течения газа задавались следующие граничные условия:

$$1) \text{ при } x = 0, 0 \leq y \leq \delta(0)$$

$$M(0, y, t) = C_1, \quad N(0, y, t) = 0, \quad H_0(0, y, t) = C_2 [1 + C_2 y / \delta(0)] \quad (2.1)$$

(H_0 — энтальпия торможения, C_1, C_2, C_3 — константы)

2) при $y = 0$, $0 \leq x \leq L$ условия симметрии

$$N(x, 0, t) = 0, \quad \partial \rho / \partial y = \partial M / \partial y = \partial \varepsilon / \partial y = 0 \quad (2.2)$$

3) при $y = \delta(x)$, $0 \leq x \leq L$ условие непротекания

$$N(x, \delta(x), t) = M(x, \delta(x), t) \frac{d}{dx} \delta(x) \quad (2.3)$$

При помощи замены независимых переменных

$$x_2 = x, \quad \xi = y / \delta(x), \quad \tau = t$$

криволинейная область $F \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq \delta(x), t \geq 0\}$ переводится в прямоугольную $\Phi \{0 \leq x_2 \leq L, 0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0\}$.

При этом (J — якобиан)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_2} - \xi \frac{\delta_x}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad J = \delta(x) \quad \left(\delta_x = \frac{d}{dx} \delta(x) \right)$$

Удобно также перейти в системе (1.1) к безразмерным величинам

$$u_1 = \frac{u}{a_*}, \quad v_1 = \frac{v}{a_*}, \quad \rho_1 = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad x_1 = \frac{x_2}{r_0}, \quad \tau_1 = \frac{\tau a_*}{\tau_0}$$

Здесь a_* — критическая скорость звука; ρ_0, ε_0 — параметры торможения, $r_0 = \delta(0)$ — радиус входного участка криволинейного канала.

После некоторых преобразований, учитывая (1.2), система (1.1) записывается в новых переменных (индекс 1 опускается)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \xi \delta^2 \rho + \nabla \xi \delta \rho U_0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \xi \delta^2 M + \nabla \xi \delta M U_0 + \frac{\partial}{\partial x} \xi \delta^2 B p + \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \delta \delta_x B p = 0$$

$$- \xi \delta^2 \varepsilon + \nabla \xi \delta \varepsilon U_0 + p \nabla \xi \delta U_0 = 0, \quad p = p(\rho, \varepsilon)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \xi \delta^2 \varepsilon + \nabla \xi \delta \varepsilon U_0 + p \nabla \xi \delta U_0 = 0, \quad p = p(\rho, \varepsilon)$$

$$U_0 = \delta u_1 + (v - \xi \delta_x u) j, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial \xi} j, \quad B = \frac{k+1}{2k}$$

(k — показатель адиабаты).

Эта система имеет на оси области течения ($\xi = 0$) особенность типа 0/0, которая раскрывается по правилу Лопиталья.

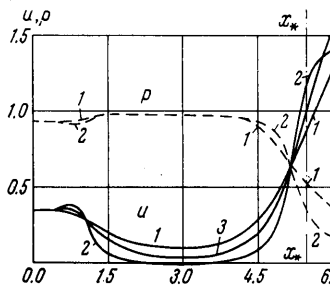
Для численного решения (2.5) применялся конечно-разностный метод второго порядка точности [3]. Второй порядок точности достигается благодаря введению двух типов сеток — основной, в которой аппроксимируются величины M, N, u, v , и сдвинутой, в которой аппроксимируются ρ, ε, p . Для возможности связного счета ударных волн вводится искусственная вязкость

$$q = \begin{cases} C_0 l^2 \nabla U, & \text{если } \nabla U < 0 \\ 0, & \text{если } \nabla U \geq 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} C_0 \approx 1 \\ f^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \end{array} \right)$$

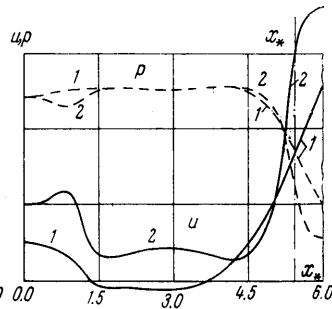
Здесь $\Delta x, \Delta y$ — шаги разностной сетки.

Начальные условия для системы (2.5) получались с помощью приближенного метода [7]. Его сущность заключается в том, что в стационарной системе уравнений Эйлера, описывающей осесимметрическое течение газа, все искомые величины аппроксимируются полиномами по степеням ξ через их значения на оси ($\xi = 0$) и на верхней границе ($\xi = 1$). Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается численными методами.

3. Рассчитывались изэнтальпическое и неизэнтальпическое течения газа с показателем адиабаты $k = 1.25$.



Фиг. 2



Фиг. 3

При этом верхняя граница области течения (фиг. 1) задавалась следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 0.5) \\ A_1(x - 0.5)^4 e^{c(x-0.5)} + 1 & (0.5 \leq x \leq 3.0) \\ B_1 + B_2 \sin^2 \frac{1}{2} \pi [(x - 3)/1.25 - 1] & (3.0 \leq x \leq 5.7) \\ E_1 + E_2(x - 5.7) & (5.7 \leq x \leq 6.0) \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь

$$C = 1.6, \quad A_1 = 4.193, \quad B_1 = 1.851, \quad B_2 = 1.152, \quad E_1 = 0.737, \quad E_2 = 0.295$$

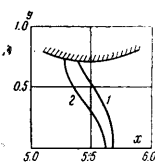
Значения констант в граничном условии (2.1) принимались в случае изэнтальпического течения

$$C_1 = 0.3199, \quad C_2 = 4.9936, \quad C_3 = 0 \quad (3.2)$$

в случае неизэнтальпического

$$C_1 = 0.3199, \quad C_2 = 4.9936, \quad C_3 = 1$$

Результаты расчетов изэнтальпического течения представлены на фиг. 2, где сплошные линии — изменение продольной составляющей скорости u и пунктирные линии — давления p вдоль оси области $y = 0$ (кривые 1) и вдоль стенки $y = \delta(x)$ (кривые 2). При $x \approx 0.8$ на кривой скорости имеется своеобразный «горб», происхождение которого объясняется влиянием кривизны стенки. После торможения в расширяющейся части области, газ начинает быстро разгоняться, причем его скорость на стенке в горловине сопла приблизительно на 40% выше, чем на оси. Приведенное здесь же распределение скорости, рассчитанное по одномерной теории течения газа (кривая 3), показывает, что неоднородность течения наиболее сильно выражена в области критического сечения. В расширяющейся части сопла, у его стенки, происходит поджатие потока, о чем можно судить по поведению кривых скорости и давления. Происхождение такого поджатия связано с разрывом кривизны контура (3.1) в точке сопряжения синусоиды с прямой; его существование отмечается также в работе [8].

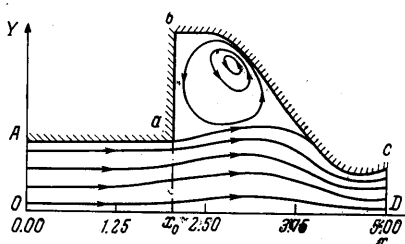


Фиг. 4

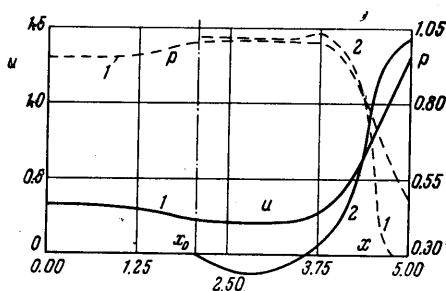
При расчете неизэнтальпического течения газа наблюдается возникновение обратного течения в предсопловом объеме, сопровождающееся образованием замкнутых линий тока (фиг. 1). Причиной этого эффекта служит сильная завихренность потока. Рассмотрение кривых изменения скорости и давления по длине области (фиг. 3; обозначения аналогичны фиг. 2) показывает, что давление в дозвуковой части сопла в этом случае оказывается выше, чем в предыдущем (фиг. 2). Это обстоятельство связано с уменьшением коэффициента расхода сопла в неизэнтальпическом течении, о чем можно судить и по расположению звуковых линий (фиг. 4). Следует отметить, что звуковые линии обладают точками перегиба, причем в неизэнтальпическом течении это выражено наиболее ярко. Такой факт согласуется с результатами работы [9], где показано, что точки возникают при $R_s / r_* < 1$, где R_s —

радиус кривизны стенки сопла в его критическом сечении, r_* — радиус критического сечения. Для данного (3.1) профиля сопла $R_s / r_* = 0.8$.

Проводились расчеты изэнгалпического течения газа в области со скачком площади поперечного сечения (фиг. 5) с граничными условиями (3.2). Контур сопла (при $x \geq 2.5$) оставался прежним (3.1), но радиус r_0 входного сечения канала был



Фиг. 5



Фиг. 6

несколько большим. Преобразование независимых переменных (2.4) применялось только к криволинейной части области ($x > x_0$), так что в плоскости $x\xi$ данная область представляла собой прямоугольник с вырезом, т. е. расположение границ A и B сохранялось. При расчете параметров течения на этих границах использовался принцип отражения.

Положение линий тока (фиг. 5) свидетельствует о том, что при выходе из узкой части канала образуется струя, ударяющая в стенку сопла. Выше границы струи имеется застойная зона с замкнутым возвратным движением газа. Из кривых изменения скорости и давления вдоль области течения (фиг. 6; см. обозначения к фиг. 2) видно, что газ на оси области испытывает лишь небольшое торможение. Кривая изменения давления вдоль стенки имеет горб, возникающий в месте выхода на стенку линии растекания.

4. При расчетах разностная сетка в плоскости $x\xi$ была равномерной и имела размер 60×10 . Установление течения наступало в среднем через 2000 шагов по времени, для чего требовалось ≈ 12 мин машинного времени на ЭВМ БЭСМ-6.

Наиболее медленно течение устанавливалось в предсопловом объеме, имеющем определенные свойства резонатора. Контроль за точностью осуществлялся вычислением интегральных законов сохранения массы, полного импульса, полной энергии аналогично работе [1]. Сохранение указанных величин имело место с точностью до 1, 0.7 и 0.9% соответственно. Расчет течения с измельченной вдвое разностной сеткой не приводил к заметному изменению параметров течения.

Следует отметить, что для достижения подобной точности при расчете аналогичного (фиг. 2) течения по методу Лакса [2] требовалась сетка размером 120×30 и время расчета одного варианта достигало 1.2 час на ЭВМ БЭСМ-6.

Поступило 26 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
2. Васенин И. М., Рычков А. Д. Применение метода установления к решению одной внутренней задачи газовой динамики. Аннот. докл. на I Сибирской конф. по аэрогазодинамике, Новосибирск, 1969.
3. Нох В. Ф. СЭЛ — совместный эйлерово-лангражев метод для расчета нестационарных двумерных задач. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М., «Мир», 1967.
4. Зельдович Я. Б. Об устойчивости режима горения пороха в полузамкнутом объеме. ПМТФ, 1963, № 1.
5. Русанов В. В. Характеристики общих уравнений газовой динамики. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
6. Курант Р. Уравнение с частными производными. М., «Мир», 1964.
7. Рычков А. Д. Численный расчет установившегося осесимметричного течения газа. Тр. НИИ ПММ, 1970, вып. 1.
8. Back L. H., Cuffel R. F. Detection of oblique shock in a conical nozzle with a circular-arc throat. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 12.
9. Hopkins D. F., Hill D. E. Effect of small radius of curvature on transonic flow in axisymmetric nozzles. AIAA Journal, 1966, vol. 3, No. 3.