№ 1 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1971

О ТЕПЛОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

В. Д. ХАИТ

(*Москва*)

Рассматривается устойчивость твердого вращения жидкости, помещенной в пространство между двумя коаксиальными, вращающимися с одинаковой угловой скоростью вокруг общей оси цилиндрами, при наличии радиального градиента температуры. Исследование проводится по стандартной для задач устойчивости схеме методом элементарных волновых решений. Возмущения предполагаются зависящими от всех трех координат.

Показано, что принцип изменения устойчивости, вообще говоря, не применим к рассматриваемой задаче. «Нейтральному» (промежуточному между устойчивым и неустойчивым) состоянию соответствуют два типа движений: стационарное движение и движение с периодической зависимостью во времени. Для каждого из этих типов движения получено при некоторых упрощениях минимальное значение числа Рэлея, при котором впервые наступает неустойчивость.

Известно, что в горизонтальном слое жидкости, помещенном в поле сил тяжести и подогреваемом снизу, возникают конвективные движения, если разность температур на границах слоя достаточно велика (классическая задача Рэлея).

Если жидкость помещена между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися с одинаковой угловой скоростью вокруг общей оси, она может вращаться вместе с цилиндрами, как твердое тело. Во вращающейся системе координат центробежные силы играют, очевидно, роль сил тяжести. Можно поэтому ожидать по аналогии с жидкостью в поле сил тяжести возникновения конвективных движений, если между цилиндрами создать достаточную разность температур. Однако на эти движения будут оказывать влияние силы инерции Кориолиса, что может существенно повлиять на критерий устойчивости твердого вращения жидкости.

Исследование задачи о конвекции в поле центробежных сил проводилось в работах [1–3]. В работе [2] рассматривались только двумерные возмущающие движения, происходящие в плоскости, перпендикулярной оси вращения. В связи с этим из уравнения, определяющего конвекцию, выпали силы Кориолиса (они в этом случае потенциальны) и задача стала аналогична рэлеевской.

В работе [3] рассматривались только осесимметричные возмущения. Совершенно очевидно, что для выяснения вопроса об устойчивости твердого вращения жидкости необходимо рассмотрение возмущения общего вида.

1. Пусть жидкость помещена между двумя коаксиальными вращающимися с одинаковой угловой скоростью цилиндрами. В системе координат, связанной с вращающимися цилиндрами, невозмущенным состоянием будет состояние покоя, поэтому возмущающим движением будет относительное движение. Уравнение Навье — Стокса во вращающейся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ системе координат имеет вид [4]

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V} + (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega} + \nu\nabla^2\mathbf{V}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — скорость жидкости во вращающейся системе координат, p — давление в жидкости, ρ — ее плотность, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат, помещенного на оси вращения, ν — коэффициент вязкости.

К уравнению движения необходимо добавить уравнения теплопроводности и непрерывности. Преобразованные в соответствии с обычным для задач конвекции приближением Буссинеска [4, 5], они составляют систему необходимых уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{\pi}{\rho_0}\right) + \nu\nabla^2\mathbf{V} - 2\Omega\times\mathbf{V} - (\Omega\times\mathbf{r})\times\Omega\beta\tau$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\theta = \chi\nabla^2\tau, \qquad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь π и τ — отклонения давления и температуры от своих невозмущенных значений, ρ_0 — средняя плотность жидкости, β — коэффициент теплового расширения, χ — коэффициент температуропроводности, θ — невозмущенная температура, которая определяется из уравнения Лапласа $\nabla^2\theta = 0$ с граничными условиями $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ на поверхностях внутреннего (радиуса r_1) и внешнего (радиуса r_2) цилиндров соответственно.

Теоретический анализ существенно упрощается, если считать зазор между цилиндрами малым по сравнению с их радиусами. Введем вместо цилиндрических координат r, φ и z, а также времени новые безразмерные переменные

$$\xi = \frac{r-r_1}{r_2-r_1}, \qquad \eta = \frac{\varphi r_1}{r_2-r_1}, \qquad \zeta = \frac{z}{r_2-r_1}, \qquad t' = \frac{\nu t}{(r_2-r_1)^2}$$

Пренебрегая высшими степенями малого параметра $(r_2-r_1)/r_1$, можно свести систему (1.1) к трем уравнениям для функций u (радиальная компонента вектора скорости), Y (радиальная компонента ротора скорости) и τ', а именно

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)u - T^{1/2}\frac{\partial}{\partial\zeta}Y -$$
$$-R\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\tau' = 0$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)Y = -T^{1/2}\frac{\partial u}{\partial\zeta}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}-P\frac{\partial}{\partial t'}\right)\tau' = u \tag{1.2}$$
$$\tau' = \frac{\chi r_1\tau}{\alpha(r_2-r_1)^2}, \qquad \alpha = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{\theta_2-\theta_1}{\ln(r_2/r_1)}$$
$$T = \frac{4\Omega^2(r_2-r_1)^4}{\nu^2}, \qquad R = \frac{\Omega^2\alpha\beta(r_2-r_1)^4}{\nu\chi}, \qquad P = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь T — число Тейлора, R — число Рэлея, P — число Прандтля.

Решение уравнений системы (1.2) будем искать в виде элементарных волн

$$\frac{u}{u(\xi)} = \frac{Y}{Y(\xi)} = \frac{\tau'}{\tau'(\xi)} = \exp[i(a_\eta\eta + a_\zeta\zeta) + \sigma t'] \tag{1.3}$$

Система уравнений (1.2) сводится тогда к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2 - \sigma\right)Y = -ikT^{1/2}u$$

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2 - \sigma\right)\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2\right)u = ikT^{1/2}Y - Ra^2\tau'$$

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2 - P\sigma\right)\tau' = u$$

$$a^2 = a_\eta{}^2 + a_\zeta{}^2, \qquad k = a_\zeta \tag{1.4}$$

На ограничивающих жидкость твердых цилиндрических поверхностях необходимо удовлетворить следующим граничным условиям:

$$\mathrm{V} = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } \xi = 0,\ \xi = 1$$

Соответствующие граничные условия для функций $u(\xi)$, $Y(\xi)$ и $\tau'(\xi)$ имеют вид

$$u = \frac{du}{d\xi} = Y = \tau' = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad \xi = 1 \tag{1.5}$$

Если цилиндры ограничены по длине, то необходимо удовлетворить условиям на ограничивающих поверхностях. Легко убедиться, однако, что решениями (1.3) можно удовлетворить только специальным граничным условиям (свободные границы). Для удовлетворения граничным условиям, имеющим физический смысл, необходимо решать систему уравнений (1.2) в частных производных непосредственно. Тем не менее будем пользоваться решениями (1.3), соответствующими неограниченным по длине цилиндрам. Ниже это обстоятельство будет разъяснено.

Система уравнений (1.4) с граничными условиями (1.5) составляет задачу о собственных значениях R_i при фиксированных остальных параметрах

$$R_i = R_i(T, P, a^2, k, \sigma)$$

Эти соотношения определяют σ как функцию остальных параметров. Граница между устойчивой и неустойчивой областями этих параметров задается уравнением

$$\operatorname{Re}\sigma = 0$$

Иногда в задачах об устойчивости (в частности, в [1-3]) предполагают при этом, что и $\operatorname{Im}\sigma = 0$ (принцип изменения устойчивости). Тем самым считается, что «нейтральное возмущение» (соответствующее граничным значениям параметров) приводит ко вторичному стационарному движению. Однако к рассматриваемой задаче, как будет показано ниже, принцип изменения устойчивости, вообще говоря, не применим. Таким образом нейтральное состояние может быть как стационарным ($\sigma = 0$), так и колебательным (σ — чисто мнимая величина).

2. Рассмотрим сначала случай стационарной конвекции. Как показано в работе [1], данная задача сводится к задаче Рэлея [6], если в уравнении для последней заменить R на $R - (k/a)^2T$.

Собственными значениями этой задачи являются функции

$$a^{-2}[(n+1)^2\pi^2 + a^2]^3 f_n(a) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

где $f_n(a)$ — ограниченные функции a. Для рассматриваемой задачи, таким образом, имеем

$$R = a^{-2}[(n+1)^2\pi^2 + a^2]^3 f_n(a) + (k/a)^2 T$$

Наименьший минимум, как известно [4], R имеет при $n=0$; функцию $f_0(a)$ с достаточной степенью точности можно приблизить функцией, полученной вариационным методом [4]

$$f_0(a)=\left[1-\frac{16\pi^2 a}{(\pi^2+a^2)^2(\operatorname{sh} a+a)}\operatorname{ch}^2\frac{a}{2}\right]^{-1} \tag{2.1}$$

Как функция k число Рэлея R, очевидно, минимально при $k=0$. Тем не менее, как указано в работе [1], нельзя считать самыми «опасными» возмущения, не зависящие от Z, поскольку такие течения не могут существовать, очевидно, в ограниченных твердыми торцами цилиндрах. Таким образом, хотя решениями (1.3) и не сможем удовлетворить условиям на твердых торцах цилиндров, но самим фактом зависимости от Z учтем в первом приближении наличие таких торцов.

Ясно теперь, что k необходимо положить равным k_0 — его минимальному значению. Приближенно можно считать, очевидно, $k_0\approx\pi\ (r_2-r_1)\,/\,l$ (l — длина цилиндров).

Таким образом, отмечая индексом (1) принадлежность к стационарной конвекции, имеем для числа Рэлея

$$R^{(1)}=\frac{(\pi^2+a^2)^3}{a^2}f_0(a)+\frac{T_1}{a^2},\qquad T_1\equiv k_0^2T \tag{2.2}$$

Число Рэлея как функция a достигает своего минимума при $a=a_k^{(1)}$, определяемом уравнением

$$(\pi^2+a^2)^2\left[(2a^2-\pi^2)f_0(a)+a\frac{\pi^2+a^2}{2}\frac{df_0}{da}\right]=T_1 \tag{2.3}$$

При этом минимальное значение $R^{(1)}$ равно

$$R_k^{(1)}=\frac{(\pi^2+a_k^{(1)2})^3}{a_k^{(1)2}}f_0(a_k^{(1)})+\frac{T_1}{a_k^{(1)2}} \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) легко получим асимптотические выражения при больших T

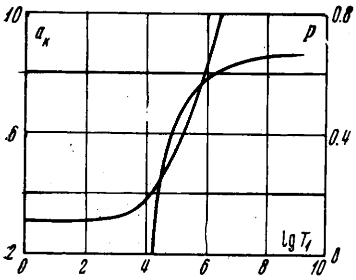
$$a_k^{(1)}\to(\tfrac{1}{2}T_1)^{1/6},\qquad R_k^{(1)}\to3(\tfrac{1}{2}T_1)^{2/3}$$

Отметим теперь следующий факт. Если $T_1=0$, то $a_k^{(1)}=3{,}117$ (значение, соответствующее обычному рэлеевскому случаю). Если окажется, что $k_0>3{,}117$ (длина цилиндров меньше зазора между ними), то при достаточно малом T_1 величина $a_k^{(1)}$ будет меньше k_0. Но так как $a_k^{(1)}=(a_\eta^2+k_0^2)^{1/2}$, то это означает, что минимальное значение $R^{(1)}$ достигается при $a_\eta=0$ и, следовательно, конвективное движение будет при этом осесимметричным. В уравнении (2.4) необходимо положить $a_k^{(1)}=k_0$

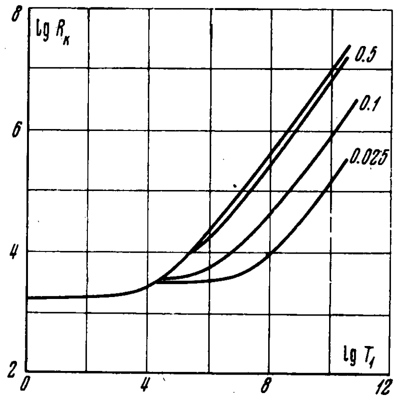
$$R_k^{(1)}=k_0^{-2}(\pi^2+k_0^2)^3f_0(k_0)+T$$

Заметим, что указанный факт имеет место при малой длине цилиндров, когда существенную роль могут начать играть граничные условия на торцах цилиндров, поэтому вывод о возможности осесимметричной неустойчивости подлежит проверке.

Зависимость $a_k^{(1)}$ от величины T_1 для асимметричной конвекции приводится на фиг. 1, а зависимость $R_k^{(1)}$ от T_1 — на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Вернемся к уравнениям системы (1.4), где σ теперь будем считать в общем случае комплексным. Если сдвинуть начало отсчета ξ так, чтобы границам соответствовали значения $\xi = \pm {}^1/_2$, то в силу четности дифференциальных операторов рассматриваемой задачи, ее собственные функции будут либо четными, либо нечетными. Как обычно, наименьшему собственному значению будет соответствовать четная собственная функция. Обозначим

$$G = \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2 - \sigma\right)\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2\right)u, \qquad G = 0 \text{ при } \xi = \pm\frac{1}{2} \tag{3.1}$$

Четную функцию, обращающуюся в нуль на границах, можно представить в виде ряда

$$G = \sum_m A_m G_m = \sum_m A_m \cos[(2m+1)\pi\xi] \tag{3.2}$$

Для данного G уравнение (3.1) дает возможность определить функцию

$$u(\xi) = \sum_m A_m u_m(\xi)$$

Здесь $u_m(\xi)$ есть решение уравнений

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2 - \sigma\right)\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2\right)u_m = G_m \qquad \left(u_m = \frac{du_m}{d\xi} = 0 \text{ при } \xi = \pm\frac{1}{2}\right)$$

Точно так же, воспользовавшись найденным $u(\xi)$, можно найти $Y(\xi)$ и $\tau'(\xi)$ как решения соответствующих уравнений системы (1.4) с требуемыми граничными условиями. Коэффициенты построенных таким образом рядов остаются пока произвольными. Подставив указанные ряды в уравнение

$$G - ikT^{1/2}Y + Ra^2\tau' = 0 \tag{3.3}$$

получим в левой части его функцию, вообще говоря, отличную от нуля. Однако, потребовав, чтобы эта функция была ортогональна всем функциям G_m, удовлетворим, очевидно, уравнению (3.3). Эти требования ортогональности приведут к однородной системе бесконечного числа уравнений относительно коэффициентов A_m. Эта система будет иметь решение, если ее определитель равен нулю. Опуская несложные, но громоздкие выкладки по указанной схеме, имеем

$$\left|\left\{\frac{1}{c_n(c_n+\sigma)}-\frac{(c_n+\sigma)(c_n+P\sigma)}{Ra^2(c_n+\sigma)-k^2T(c_n+P\sigma)}\right\}\delta_{mn}+2\langle m/n\rangle\right|=0$$

$$c_n=\pi^2(2n+1)^2+a^2$$

$$\langle m/n\rangle=-2\pi^2(2m+1)(2n+1)(-1)^{m+n}\frac{\sigma\operatorname{ch}{}^1/_2a\operatorname{ch}{}^1/_2\sqrt{a^2+\sigma}}{\gamma c_nc_m(c_n+\sigma)(c_m+\sigma)}$$

$$\gamma=\sqrt{a^2+\sigma}\operatorname{ch}{}^1/_2\,a\operatorname{sh}{}^1/_2\sqrt{a^2+\sigma}-a\operatorname{ch}{}^1/_2a\operatorname{ch}{}^1/_2\sqrt{a^2+\sigma} \tag{3.4}$$

Ограничиваясь в ряде (3.2) первым членом, имеем из (3.4) следующее уравнение:

$$(\pi^2+a^2+\sigma)Ra^2+(\pi^2+a^2+P\sigma)k^2T=$$
$$=(\pi^2+a^2)(\pi^2+a^2+\sigma)^2(\pi^2+a^2+P\sigma)f \tag{3.5}$$

где

$$f=\left[1-\frac{4\pi^2\sigma}{(\pi^2+a^2)(\pi^2+a^2+\sigma)\gamma}\operatorname{ch}\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{a^2+\sigma}}{2}\right]^{-1} \tag{3.6}$$

Функция $f(a,\sigma)$, будучи ограниченной, сравнительно слабо зависит от σ. Поэтому будем считать ее равной функции $f(a,0)=f_0(a)$ согласно (2.1).

Полагая теперь $\sigma=i\omega$, где ω — действительная величина, и отделяя действительную и мнимую части равенства (3.5), получаем уравнение для границы колебательной неустойчивости, которое отмечаем индексом (2)

$$R^{(2)}=2(P+1)f_0a^{-2}(\pi^2+a^2)^3+\frac{2P^2}{P+1}(k/a)^2T \tag{3.7}$$

а также частоту колебаний как функцию T

$$\omega^2=\frac{1}{f_0(\pi^2+a^2)}\left[\frac{1-P}{1+P}k^2T-f_0(\pi^2+a^2)^3\right] \tag{3.8}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным для случая $\sigma=0$, приводят к необходимости положить в этих уравнениях k равным его минимальному значению k_0.

Исследование вопроса о том, какого типа неустойчивость (монотонная или колебательная) появляется раньше для подобной задачи, проведено Чандрасекаром [4] в работе о конвекции в горизонтальном слое жидкости, вращающемся вокруг вертикальной оси. Поэтому изложим только результаты.

Колебательные решения отсутствуют и, следовательно, принцип изменения устойчивости выполняется при $P>1$ для всех значений $T_1\equiv k_0{}^2T$ и a_2, а также при $P<1$ для $T_1<5057.5\,(1+P)/(1-P)$ и всех a^2. В этих случаях, таким образом, граничное течение будет стационарной конвекцией. В случае $T_1>5057.5\,(1+P)\,/\,(1-P)$ при $P<1$ существуют колебательные моды и критическое число Рэлея, при котором впервые наступает колебательная неустойчивость, есть

$$R_k^{(2)}(T_1) = 2(P+1) R_k^{(1)}(T_1')$$

где

$$T_1' = [P/(P-1)]^2 T_1$$

Оказывается, что $R_k^{(1)} < R_k^{(2)}$, если T_1 меньше значения некоторой функции $T_1(P)$, и наоборот. Таким образом, кривая зависимости $T_1 = T_1(P)$ отделяет на плоскости PT_1 область монотонной неустойчивости от области колебательной. Обратная функция $P = P(T_1)$ имеет асимптоту при $T_1 \to \infty$, $P \to 0.67659$.

График зависимости $T_1(P)$ приводится на фиг. 1, а зависимости $R_k^{(2)}(T_1)$ для различных P — на фиг. 2.

В заключение автор благодарит М. А. Леонтовича за постоянное внимание к работе, а также С. И. Брагинского, сделавшего ряд замечаний и предложений.

Поступило 12 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Шайдуров Г. Ф., Шлиомис М. И., Ястребов Г. В. Конвективная неустойчивость вращающейся жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6, стр. 88.
2. Chandrasekhar S. The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of radial temperature gradient. J. Rat. Mech. and Analys., 1954, vol. 3, p. 181.
3. Сорокин М. П. Тепловая неустойчивость жидкости в центробежном поле. Уч. зап. Пермск. гос. ун-та 1968, № 163.
4. Chandrasekhar S. Hydrodinamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
6. Pellew A., Southwell R. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc. A., 1940, vol. 176, No. 3, p. 312.