№ 1 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1971

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ МНОГОФАЗНЫХ СМЕСЕЙ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Р. Г. ИСАЕВ

(*Грозный*)

Как известно, ряд месторождений в трещиновато-пористых коллекторах разрабатываются при пластовых давлениях ниже давления насыщения, вследствие чего в таких пластах возникает течение неоднородной жидкости в пористых блоках и трещинах. Кроме того, сама фильтрующая смесь по своему составу не однородна, а является смесью углеводородов различного строения. Если к тому же учесть, что сам трещиновато-пористый пласт обычно моделируется как коллектор с двойной пористостью, т. е. состоит из двух пористых сред с порами разных масштабов [1], то неравновесный нестационарный процесс фильтрации углеводородных смесей в таких пластах будет иметь целый ряд существенных гидродинамических и термодинамических особенностей.

Заметим, что движение многокомпонентных смесей в коллекторах с одинарной пористостью исследуется в оригинальных и интересных работах М. Д. Розенберга, Ю. П. Желтова, А. К. Курбанова, В. Н. Николаевского, Г. Ю. Шовкринского и др. [2–5]. Термодинамическое и гидродинамическое исследование фильтрации углеводородных однородных (однофазных) жидкостей в трещиновато-пористых пластах имеется в работе [6].

1. Уравнение баланса массы компонента в фазах фильтрующейся смеси.

Будем полагать, что трещиновато-пористый пласт, пористые блоки, трещины которого насыщены неоднородной (многофазной) многокомпонентной смесью, рассматривается как термодинамическая система, состоящая из твердого материала самого пласта; смеси, насыщающей пористые блоки; смеси, насыщающей пространство трещин.

Каждая из указанных смесей является многофазной (фазы обозначаем $\alpha, \beta, \ldots, \Omega$), а компоненты смеси будем обозначать символом j (j изменяется от 1 до n). Условимся также трем укрупненным компонентам приписывать индекс i: твердый материал пласта ($i=1$), многофазная смесь в пористых блоках ($i=2$), многофазная смесь в трещинах ($i=3$). Заметим также, что в n-компонентной многофазной смеси (в блоках или в трещинах) каждый компонент может содержаться во всех фазах. Адсорбцией и капиллярными эффектами пренебрегаем.

Тогда на основании сказанного уравнения баланса массы j-го компонента в смеси ($i=2$, $i=3$) для фазы α, можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i\theta_{ij}{}^{\alpha}\rho_{ij}{}^{\alpha})-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}J_{ij}{}^{\alpha\nu}+\operatorname{div}(\mathbf{I}_{ij}{}^{\alpha}+m_i\theta_{ij}{}^{\alpha}\rho_{ij}{}^{\alpha}\mathbf{v}_i{}^{\alpha})-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}J_{i,\,i\pm1,\,j}^{\alpha\nu}=0 \quad (1.1)$$

Здесь θ_{ij}^{α} — насыщенность пористых блоков и трещин компонентом j, находящимся в фазе α; ρ_{ij} — плотность компонента j фазы α в смеси, заполняющей пористые блоки ($i=2$), или трещины ($i=3$); $\mathbf{J}_{ji}^{\alpha}$ — поток диффузии компонента j

в фазе α; v_i^α — скорость центра масс системы ($i=2$, или $i=3$) в фазе α; $J_{ij}^{\alpha\nu}$ — внутренний источник j-го компонента фазы α за счет фазовых переходов в смеси ($i=2$ или $i=3$); $J_{i,i\pm1,j}^{\alpha\nu}$ — внутренний источник j-го компонента фазы α за счет перетоков из пористых блоков в трещины (из фаз смеси $i\pm1$, причем $J_{i,i+1,j}$ берется при $i=2$, и $J_{i,i-1,j}$ берется при $i=3$).

2. Уравнения движения фаз смеси и уравнения баланса энергии. Располагая известными из гидромеханики уравнениями, уравнение движения для всей рассматриваемой термодинамической системы можно записать в виде

$$m_1\rho_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}+m_2\rho_2\theta_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}+m_3\rho_3\theta_3\frac{d\mathbf{v}_3}{dt}-\operatorname{div}\boldsymbol{\Gamma}-\sum_{k=1}\rho_k\mathbf{F}_k=0$$

$$\Gamma_{rs}=[m_1\sigma_{rs}-(m_2\theta_2P_2+m_3\theta_3P_3)g_{rs}]$$

Здесь Γ_{rs} — компонента тензора суммарных напряжений в трещиновато-пористой среде; g_{rs} — компонента метрического тензора; (II) σ_{rs} — компонента тензора истинного напряжения в твердом скелете.

Последний член левой части характеризует действие внешних массовых сил.

Для каждой фазы из смеси ($i=2$, $i=3$) уравнение движения можно представить в следующей форме:

$$\rho_i^\alpha\theta_i^\alpha\frac{d\mathbf{v}_i^\alpha}{dt}=-\operatorname{grad}P_i-\frac{\mathbf{R}_i^\alpha}{m_i}-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\mathbf{j}_{i,i\pm1}^{\alpha,\nu}+\rho_i^\alpha\mathbf{F}_i^\alpha \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{j}_{i,i\pm1}^{\alpha,\nu}$ — члены, характеризующие перенос импульса за счет перетоков в системе; $\mathbf{R}_i^\alpha$ — вектор силы вязкого трения (фиктивная сила трения по Н. Е. Жуковскому [7]).

Уравнение баланса для скорости изменения плотности кинетической энергии фазы α компонента ($i=2$ или $i=3$) записывается на основе известных общих рассуждений в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}m_i\theta_i^\alpha\rho_i^\alpha(\mathbf{v}_i^\alpha)^2\right]=-\operatorname{div}\left[\frac{1}{2}m_i\theta_i^\alpha\rho_i^\alpha(\mathbf{v}_i^\alpha)^2\cdot\mathbf{v}_i+m_iP_i\mathbf{v}_i^\alpha\right]+$$

$$+P_i\cdot\operatorname{div}(m_i\mathbf{v}_i^\alpha)-\mathbf{R}_i^\alpha\cdot\mathbf{v}_i^\alpha+\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}L_{i,i\pm1}^{\alpha,\nu} \tag{2.3}$$

Уравнение баланса внутренней энергии для фазы α смеси $i=2$ или смеси $i=3$ на основе тривиальных рассуждений можно представить в виде

$$m_i\theta_i^\alpha\frac{du_i^\alpha}{dt}=\frac{\delta Q_i^\alpha}{dt}-m_iP_i\theta_i^\alpha\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho_i^\alpha}+\frac{\mathbf{R}_i}{\rho_i^\alpha}\cdot(\mathbf{v}_i^\alpha-\mathbf{v}_1)+$$

$$+\frac{1}{\rho_i^\alpha}\mathbf{I}_i^\alpha\cdot\mathbf{F}_i^\alpha-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}L_{i,i\pm1}^{\alpha,\nu(u)}-\frac{q_i^\alpha}{\rho_i^\alpha} \tag{2.4}$$

$$\left(\rho_i^\alpha\frac{\delta Q_i^\alpha}{dt}=-div\,(\mathbf{I}_{qi}^\alpha m_i\theta_i^\alpha)\right)\text{— внешний поток тепла}$$

Члены $L_{i,i\pm1}^{\alpha,\nu}$ и $L_{i,i\pm1}^{\alpha,\nu(u)}$ в (2.3) и (2.4) учитывают перенос в системе за счет перетоков.

Заметим, что при составлении уравнений (2.3), (2.4) предполагалось, что можно пренебречь фиктивными силами Н. Е. Жуковского на границе раздела жидких фаз по сравнению с аналогичными силами на границах раздела фаз и твердого тела.

Балансовое уравнение плотности полной энергии фазы α можно на основании (2.3) и (2.4) записать как

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{m_i\rho_i{}^\alpha\theta_i{}^\alpha\left[\frac{1}{2}(\mathbf{v}_i{}^\alpha)^2+u_i{}^\alpha\right]\right\}+\operatorname{div}\left\{m_i\rho_i{}^\alpha\theta_i{}^\alpha\left[\frac{1}{2}(\mathbf{v}_i{}^\alpha)^2+u_i{}^\alpha\right]\mathbf{v}_i\right\}+$$
$$+\operatorname{div}(\mathbf{I}_{qi}{}^\alpha m_i\theta_i{}^\alpha)+\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}(L_{i,\,i\pm1}^{\alpha\nu}+L_{i,\,i\pm1}^{\alpha,\,\nu(u)})+\operatorname{div}(m_i\theta_i{}^\alpha P_i\mathbf{v}_i{}^\alpha)+\delta A_{i1}{}^\alpha+q_i{}^\alpha=0 \tag{2.5}$$

где $\delta A_{i1}{}^\alpha$ — работа сил на поверхностях раздела между твердым компонентом и фазой α смеси i.

Выражение для $\delta A_{i1}{}^\alpha$ может быть найдено, если уравнение баланса плотности внутренней энергии получить осреднением по объему:

$$m_i\rho_i{}^\alpha\theta_i{}^\alpha\frac{du_i{}^\alpha}{dt}+m_iP_i\theta_i{}^\alpha\operatorname{div}\mathbf{v}_i+\operatorname{div}(\mathbf{I}_{qi}{}^\alpha m_i\theta_i{}^\alpha)+q_i{}^\alpha-$$
$$-\mathbf{I}_i{}^\alpha\cdot\mathbf{F}_i{}^\alpha+\delta A_{i1}{}^\alpha+P_i\mathbf{v}_i\cdot\operatorname{grad}(m_i\theta_i{}^\alpha)-\mathbf{R}_i{}^\alpha\cdot\mathbf{v}_i{}^\alpha+\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}L_{i,\,i\pm1}^{\alpha,\,\nu(u)}=0 \tag{2.6}$$

Сопоставление (2.6) и (2.4) приводит к

$$\delta A_{i1}{}^\alpha=\mathbf{R}_i{}^\alpha\cdot\mathbf{v}_1+P_i\frac{\partial(m_i\theta_i{}^\alpha)}{\partial t} \tag{2.7}$$

3. Уравнение баланса энтропии фаз смеси, феноменологические уравнения. Полагая справедливость гипотезы локального равновесия в дальнейших рассуждениях, используем термодинамическое уравнение Гиббса

$$T\frac{ds}{dt}=\frac{du}{dt}+P\frac{dv}{dt}-\sum_i\varphi_i\frac{dc_i}{dt} \tag{3.1}$$

и уравнение баланса энтропии:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}=-\operatorname{div}\mathbf{I}_{s,\,a}+\eta \tag{3.2}$$

где s — энтропия; $I_{s,\,a}$ — полный поток энтропии; η — интенсивность источника энтропии за счет внутренних необратимых процессов в системе; φ_i — парциальная удельная функция Гиббса; c_i — массовая концентрация компонента i.

На основании уравнений (3.1) и (3.2) можно получить такое уравнение для фазы α компонента $i(i=2,\ i=3)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i\rho_i{}^\alpha\theta_i{}^\alpha s_i{}^\alpha)=-\operatorname{div}\left(m_i\rho_i{}^\alpha\theta_i{}^\alpha s_i{}^\alpha\mathbf{v}_i{}^\alpha+\frac{m_i\theta_i{}^\alpha\mathbf{I}_{qi}{}^\alpha-\varphi_i{}^\alpha\mathbf{I}_i{}^\alpha}{T}\right)-$$
$$-\frac{m_i\theta_i{}^\alpha}{T_i^2}\mathbf{I}_{qi}{}^\alpha\cdot\operatorname{grad}T_i-\frac{1}{T_i}\left[\mathbf{I}_i{}^\alpha\cdot\left(T_i\operatorname{grad}\frac{\varphi_i{}^\alpha}{T_i}-\mathbf{F}_i{}^\alpha\right)\right]+$$
$$+\frac{\mathbf{R}_i{}^\alpha\cdot(\mathbf{v}_i{}^\alpha-\mathbf{v}_1)}{T}-\frac{q_i{}^\alpha}{T_i}-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}J_{i,\,i\pm1}^{\alpha,\,\nu}\left(\frac{\Phi_i{}^\alpha}{T_i}-\frac{\Phi_{i\pm1}^{\nu}}{T_{i\pm1}}\right) \tag{3.3}$$

Для всей термодинамической системы уравнение баланса энтропии будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(m_1\rho_1 s_1)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=2}^{3} m_i\rho_i^{\nu}\theta_i^{\nu}s_i^{\nu}\right)=-\operatorname{div}\Biggl(m_1\rho_1 s_1\mathbf{v}_1+\\
&+\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=2}^{3} m_i\rho_i^{\nu}\theta_i^{\nu}s_i^{\nu}\mathbf{v}_i+\frac{m_1\mathbf{I}_{q1}-\varphi_1\mathbf{I}_1}{T_1}+\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=2}^{3}\frac{m_i\theta_i^{\nu}\mathbf{I}_{qi}^{\nu}-\varphi_i^{\nu}\mathbf{I}_i^{\nu}}{T_i}\Biggr)-\\
&-\frac{m_1}{T_1^2}\mathbf{I}_{q1}\operatorname{grad}T_1-\sum_{i=2}^{3}\frac{m_i\theta_i}{T_i}\mathbf{I}_{qi}\operatorname{grad}T_i-\frac{1}{T_1}\mathbf{I}_1\left(T_1\operatorname{grad}\frac{\varphi_1}{T_1}-\mathbf{F}_1\right)-\\
&-\sum_{\nu=\alpha}\sum\frac{1}{T}\left[\mathbf{I}_i^{\nu}\left(T_i\operatorname{grad}\frac{\varphi_i^{\nu}}{T}-\mathbf{F}_i^{\nu}\right)\right]+\sum\sum_{i=2}\frac{\mathbf{R}_i^{\nu}(\mathbf{v}_i^{\nu}-\mathbf{v}_1)}{T}+\frac{q_1}{T_1}+\\
&+\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=2}^{3}\frac{q_i^{\nu}}{T_i}-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=2}^{3}J_{i,\,i\pm1}^{\alpha,\,\nu}\left(\frac{\Phi_i^{\alpha}}{T_i}-\frac{\Phi_{i\pm1}}{T_{i\pm1}}\right)
\end{aligned}
\qquad (3.4)
$$

Здесь Φ_i^{ν} — фильтрационный потенциал фазы ν в смеси ($i=2$) или ($i=3$).

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (балансовых) и баланса энтропии, необходимо дополнить (3.4) набором феноменологических уравнений, связывающих потоки и силы. При составлении феноменологических уравнений (в линейной области) следует иметь в виду принцип Кюри относительно тождественности тензорных размерностей потоков и термодинамических сил.

Если выписать все феноменологические уравнения, то, как известно из [8], между кинетическими коэффициентами этих уравнений будут существовать согласно принципу Онсагера следующие соотношения:

$$
L_{12}=L_{21},\quad L_{13}=L_{31},\quad L_{23}=L_{32},\ldots \qquad (3.5)
$$

Феноменологические уравнения будут строиться по следующему типу (приводим только одно для пояснения, остальные получаются аналогично:

$$
\begin{aligned}
m_1\mathbf{I}_{q1}&=-L_{11}\frac{\operatorname{grad}T_1}{T_1^2}-L_{12}\frac{\operatorname{grad}T_2}{T_2^2}-L_{13}\frac{\operatorname{grad}T_3}{T_3^2}-\\
&-L_{14}\frac{(\operatorname{grad}\varphi_1^{+})_{T_1}}{T_1}-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=2}^{3}L_{1i}^{\nu}\frac{(\operatorname{grad}\varphi_i^{\nu+})_{Ti}}{T_i}-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=2}^{3}L_{1i}^{\nu}\frac{(\mathbf{v}_i^{\nu}-\mathbf{v}_1)}{T_i}
\end{aligned}
\qquad (3.6)
$$

В уравнении (3.6) предполагаем

$$
\mathbf{F}_i=-\operatorname{grad}\Psi_i,\qquad \varphi_i^{+}=\varphi_i+\Psi_i.
$$

Уравнение для $q=q_1$ имеет вид

$$
q=\frac{L}{T_1T_2T_3}\left[T_2T_3-\sum_{\nu=\beta}^{\Omega}(\varepsilon_2^{\nu}+\varepsilon_2^{\alpha})T_1T_3+\sum_{\nu=\beta}^{\Omega}(\varepsilon_3^{\nu}+\varepsilon_3^{\alpha})T_1T_2\right] \qquad (3.7)
$$

$$
\left(\varepsilon_i^{\nu}=\frac{q_i^{\nu}}{T_i}\right)
$$

Так как предпоследними членами правой части в (3.4) уже учтен обмен тепла между компонентами и фазами, то можно положить

$$L_{12} = L_{21} = L_{13} = \ldots = 0 \tag{3.8}$$

Заметим также, что если пренебречь членами $L_{ij} = L_{ji}$ при $i \geqslant 4$, $j > 4$ (но $i \neq j$) по той же причине, что и в [9], то тогда получаем следующий набор феноменологических уравнений:

$$m_1 \mathbf{I}_{q1} = -\frac{L_{11}}{T_1^2} \operatorname{grad} T_1, \qquad m_2 \theta_2 \mathbf{I}_{q2} = -\frac{L_{22}}{T_2^2} \operatorname{grad} T_2,$$

$$m_3 \theta_3 \mathbf{I}_{q3} = -\frac{L_{33}}{T_3^2} \operatorname{grad} T_3$$

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{L_{44}}{T_1} (\operatorname{grad} \varphi_1^{+})_{T_1}, \qquad \mathbf{I}_2^{\nu} = -\frac{L_{55}^{\nu}}{T_2} (\operatorname{grad} \varphi_2^{\nu +})_{T_2},$$

$$\mathbf{I}_3^{\nu} = -\frac{L_{66}^{\nu}}{T_3} (\operatorname{grad} \varphi_3^{\nu +})_{T_3} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{R}_2^{\nu} = \frac{L_{77}^{\nu}}{T_2} (\mathbf{v}_2^{\nu} - \mathbf{v}_1), \qquad \mathbf{R}_3^{\nu} = \frac{L_{88}^{\nu}}{T_3} (\mathbf{v}_3^{\nu} - \mathbf{v}_1)$$

$$J_{i,\, i\pm 1}^{\alpha,\, \nu} = -L_{i,\, i\pm 1}^{\alpha \nu} \left(\frac{\Phi_i^{\alpha}}{T_i} - \frac{\overset{\nu}{\Phi}_{i\pm 1}}{T_{i\pm 1}} \right)$$

Полагая, что

$$L_{11}/T_1^2 = m_1 \lambda_1, \qquad L_{22}/T_2^2 = m_2 \lambda_2 \theta_2, \qquad L_{33}/T_3^2 = m_3 \lambda_3 \theta_3$$

$$\frac{L_{77}^{\nu}}{T_2} = \frac{m_2^2 \mu_2^{\nu}}{k_2^{\nu}}, \qquad \frac{L_{88}^{\nu}}{T_3} = \frac{m_3^2 \mu_3^{\nu}}{k_3^{\nu}} \tag{3.10}$$

где k_i^{ν} — фазовые проницаемости $(i = 2,\ 3)$; μ_i^{ν} — вязкости фаз систем $(i = 2)$, $(i = 3)$; λ_i — коэффициент теплопроводности. Из уравнений (3.9) следует:

$$\mathbf{I}_{q1} = -\lambda_1 \operatorname{grad} T_1, \qquad \mathbf{I}_{q2} = -\lambda_2 \operatorname{grad} T_2, \qquad \mathbf{I}_{q3} = -\lambda_3 \operatorname{grad} T_3$$

$$\mathbf{R}_2^{\nu} = \frac{m_2^2 \mu_2^{\nu}}{k_2^{\nu}} (\mathbf{v}_2^{\nu} - \mathbf{v}_1), \qquad \mathbf{R}_3^{\nu} = \frac{m_3^2 \mu_3^{\nu}}{k_3^{\nu}} (\mathbf{v}_3^{\nu} - \mathbf{v}_1) \tag{3.11}$$

Градиенты химических потенциалов можно выразить через градиенты концентраций

$$(\operatorname{grad} \varphi_k^{\nu +})_{T_k} = \varphi_k^{(p)\nu +} \operatorname{grad} P_k + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{ki}^{(c)\nu +} \operatorname{grad} c_i^{\nu} \tag{3.12}$$

где

$$\varphi_k^{(p)\nu +} = \left(\frac{\partial \varphi_k^{\nu +}}{\partial P_k} \right)_{T_k,\, c^{\nu}_k}; \qquad \varphi_{ki}^{(c)\nu +} = \left(\frac{\partial \varphi_k^{\nu +}}{\partial c_i^{\nu}} \right)_{T_k,\, P_k}$$

Соотношения (3.12) обычно упрощают, полагая отсутствие эффекта бародиффузии (что возможно только в первом приближении), и тогда уравнения для диффузионного потока компонентов $(i = 2)$, $(i = 3)$ в фазе ν имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2^{\nu} &= -(D_{21}^{\nu} \operatorname{grad} c_1 + D_{22}^{\nu} \operatorname{grad} c_2^{\nu}) \\ \mathbf{I}_3^{\nu} &= -(D_{31}^{\nu} \operatorname{grad} c_1 + D_{32}^{\nu} \operatorname{grad} c_2^{\nu}) \end{aligned} \qquad \left(D_{ij}^{\nu} = \frac{L_{kk}}{} \varphi_{ij}^{(c)\nu +} \right) \tag{3.13}$$

где D_{ij}^{ν} — коэффициенты диффузии.

Перенос j-го компонента из одной фазы в другую в пределах одной и той же системы ($i=2$) или ($i=3$) определяется разностью парциальных удельных функций Гиббса в этих фазах, т. е.

$$J_{ij}^{\alpha\nu} = -\eta_{ij}^{\alpha\nu}(\varphi_{ij}^{\alpha} - \varphi_{ij}^{\nu}) \tag{3.14}$$

где $\eta_{ij}^{\alpha\nu}$ — коэффициент переноса j-го компонента.

4. **Дифференциальные уравнения баланса массы, движения и полной энергии компонентов смеси с учетом уравнения баланса энтропии и конститутативных феноменологических уравнений.** *а) уравнение баланса массы.* Для получения итогового уравнения баланса массы j компонента в α фазе смеси ($i=2$) или ($i=3$) надо, используя феноменологические уравнения, раскрыть значения членов $J_{ij}^{\alpha\nu}$, J_{ij}^{α} и $J_{i,i\pm1,j}^{\alpha\nu}$ в уравнении (1.1). После простых преобразований имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i\rho_{ij}^{\alpha}\theta_{ij}^{\alpha}) + \sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\eta_{ij}^{\alpha\nu}(\varphi_{ij}^{\alpha} - \varphi_{ij}^{\nu}) + \operatorname{div}[m_i\rho_{ij}^{\alpha}\theta_{ij}^{\alpha}\mathbf{v}_i^{\alpha} - \\ - D_{ij}^{\alpha}\operatorname{grad}(\varphi_{ij}^{\alpha+})_{T_i}] + \sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\eta_{i,i\pm1,j}^{\alpha\nu}\left(\frac{\varphi_{ij}^{\alpha}}{T_i} - \frac{\varphi_{i\pm1,j}^{\nu}}{T_{i\pm1}}\right) = 0 \tag{4.1}$$

Если рассмотреть движение фазы α в целом с фазовой скоростью, отвечающей закону Дарси, то, используя феноменологические уравнения, уравнение баланса массы для фазы α можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i\rho_i^{\alpha}\theta_i^{\alpha}) + \sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\eta_{i,i\pm1}^{\alpha\nu}\left(\frac{\Phi_i^{\alpha}}{T_i} - \frac{\Phi_{i\pm1}^{\nu}}{T_{i\pm1}}\right) + \operatorname{div}\Big[-D_i^{\alpha}\operatorname{grad}(\varphi_i^{\alpha+})_{T_i} - \\ - \frac{k_i^{\alpha}}{\mu_i^{\alpha}}\zeta_i^{\alpha}\operatorname{grad}P_i\Big] - \operatorname{div}\Big[\sum_{\nu=\beta}^{\Omega}\frac{k_i^{\nu}}{\mu_i^{\nu}}\zeta_i^{\nu}\operatorname{grad}P_i\Big] = 0 \tag{4.2}$$

где Φ_i^{ν} — фильтрационный потенциал фазы ν в смеси ($i=2$) или ($i=3$)

$$\zeta_i^{\nu} = \frac{m_i\theta_i^{\nu}\rho_i^{\nu}}{\sum_{\nu} m_i\theta_i^{\nu}\rho_i^{\nu}}$$

б) *Уравнения движения фаз смеси* ($i=2$) *или* ($i=3$). Уравнение движения для каждой из фаз смеси ($i=2$) или ($i=3$) несложно получить из (2.2) с учетом значения $\mathbf{R}_i^{\alpha}$ и $\mathbf{j}_{i,i\pm1}^{\alpha\nu}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i\rho_i^{\alpha}\theta_i^{\alpha}\mathbf{v}_i^{\alpha}) = -\operatorname{div}(m_i\rho_i^{\alpha}\theta_i^{\alpha}\mathbf{v}_i^{\alpha}\cdot\mathbf{v}_i + P_i) - \frac{m_i^2\mu_i^{\alpha}}{k^{\alpha}}(\mathbf{v}_i^{\alpha} - \mathbf{v}_i) + \\ + \rho_i^{\alpha}\mathbf{F}_i^{\alpha} - \sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}J_{i,i\pm1}^{\alpha\nu}(\mathbf{v}_i^{\alpha} - \mathbf{v}_{i\pm1}^{\nu}) \tag{4.3}$$

В случае фильтрации по нелинейному закону (двучленная зависимость) феноменологическое уравнение для $\mathbf{R}_i^{\alpha}$ строится с учетом экстремальных принципов термодинамики необратимых процессов, и тогда уравнение движения каждой из фаз принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i\rho_i^\alpha\theta_i^\alpha\mathbf{v}_i^\alpha) = -\operatorname{div}(m_i\rho_i^\alpha\theta_i^\alpha\mathbf{v}_i^\alpha\cdot\mathbf{v}_i + P_i) - \frac{m_i^2\mu_i^\alpha}{k_i^\alpha}(\mathbf{v}_i^\alpha - \mathbf{v}_1) +$$

$$+ b_i^\alpha(\mathbf{v}_i^\alpha - \mathbf{v}_1)\cdot|\mathbf{v}_i^\alpha - \mathbf{v}_1| + \rho_i^\alpha\mathbf{F}_i^\alpha - \sum_{\nu=\alpha}^{\Omega} J_{i,\,i\pm1}^{\alpha\nu}(\mathbf{v}_i^\alpha - \mathbf{v}_{i\pm1}^{\nu}) \qquad (4.4)$$

в) *Уравнения баланса полной и внутренней энергии.* Использование для этой цели уравнений (2.5) и (2.4), а также феноменологических уравнений (3.11) — (3.13) приводит к следующей зависимости, выражающей баланс плотности полной энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i\rho_i^\alpha\theta_i^\alpha e_i^\alpha) = -\operatorname{div}(m_i\rho_i^\alpha\theta_i^\alpha e_i^\alpha\mathbf{v}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{I}_{qi}^\alpha m_i\theta_i^\alpha) -$$

$$-\operatorname{div}(m_i\theta_i^\alpha P_i\mathbf{v}_i^\alpha) - \mathbf{R}_i^\alpha\cdot\mathbf{v}_1 - P_i\frac{\partial(m_i\theta_i^\alpha)}{\partial t} - q_i^\alpha - \sum_{\nu=\alpha}^{\Omega} L_{i,\,i\pm1}^{\alpha\nu(e)} \qquad (4.5)$$

где e_i^α — полная удельная энергия фазы α смеси i.

Используя термодинамическое тождество второго начала термодинамики, согласно которому субстанциональные производные по времени от энтропии фазы α в смеси ($i=2$) или ($i=3$) имеют вид

$$m_i\rho_i^\alpha\theta_i^\alpha T_i\frac{ds_i^\alpha}{dt} = c_{pi}^\alpha m_i\frac{dT_i}{dt} + A\alpha_i^\alpha T_0 m_i\theta_i^\alpha\frac{dP_i}{dt} \qquad (4.6)$$

Здесь α_i^α — коэффициент объемного расширения при нагревании с постоянным давлением, A — термический эквивалент работы, c_{pi}^α — теплоемкость фазы α при постоянном давлении.

С другой стороны, изменение энтропии фазы α на основании (3.3) можно записать как

$$m_i\rho_i^\alpha\theta_i^\alpha\frac{ds_i^\alpha}{dt} = -\operatorname{div}\left(\frac{m_i\theta_i^\alpha\mathbf{I}_{qi}^\alpha - \varphi_i^\alpha\mathbf{I}_i^\alpha}{T_i}\right) - \frac{m_i\theta_i^\alpha}{T_i}\mathbf{I}_{qi}^\alpha\cdot\operatorname{grad}T_i -$$

$$-\frac{1}{T_i}\left[\mathbf{I}_i^\alpha\cdot\left(T_i\operatorname{grad}\frac{\varphi_i^\alpha}{T_i} - \mathbf{F}_i^\alpha\right)\right] + \frac{\mathbf{R}_i^\alpha\cdot(\mathbf{v}_i^\alpha - \mathbf{v}_1)}{T_i} -$$

$$-\frac{q_i^\alpha}{T_i} - \sum_{\nu=\alpha}^{\Omega} J_{i,\,i\pm1}^{\alpha\nu}\left(\frac{\Phi_i^\alpha}{T_i} - \frac{\Phi_{i\pm1}^{\nu}}{T_{i\pm1}}\right) \qquad (4.7)$$

Сопоставляя теперь уравнения (4.6), (4.7) и учитывая феноменологические уравнения (3.11) — (3.13), получаем следующее уравнение баланса тепла (в пренебрежении квадратами скоростей фильтрации):

$$m_i\theta_i^\alpha c_{pi}^\alpha\frac{dT_i}{dt} = m_i\lambda_i^\alpha\theta_i^\alpha\Delta T_i - \mathbf{F}_i^\alpha\cdot D_{i1}^\alpha\nabla c_1 - \mathbf{F}_i^\alpha\cdot D_{i2}^\alpha\nabla c_2^\alpha -$$

$$-\varphi_i^\alpha D_{i1}^\alpha\Delta c_1 - \varphi_i^\alpha D_{i2}^\alpha\Delta c_2^\alpha - \frac{\varepsilon_i^\alpha}{T_i}\varkappa(T_3T_2 - \varepsilon_2T_3T_1 - \varepsilon_3T_1T_2) +$$

$$+A\alpha_i^\alpha T_0 m_i\theta_i^\alpha\frac{dP_i}{dt} + \sum_{\nu=\alpha} L_{i,\,i\pm1}^{\alpha\nu}\left(\frac{\Phi_i^\alpha}{T_i} - \frac{\Phi_{i\pm1}}{T_{i\pm1}}\right) \quad \left(\varkappa = \frac{L}{T_1T_2T_3}\right) \qquad (4.8)$$

Складывая уравнение (4.8) с аналогичными уравнениями для остальных фаз и суммируя по всем компонентам системы (по всем i; $i=1, 2, 3$), получаем в итоге следующее тепловое уравнение:

$$m_1 c_{p1}\frac{dT_1}{dt}+\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=2}^{3} m_i\theta_i^{\nu}c_{pi}^{\nu}\frac{dT_i}{dt}=m_1\lambda_1\Delta T_1+$$

$$+\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=2}^{3} m_i\lambda_i^{\nu}\theta_i^{\nu}\Delta T_i-\varphi_1\sum_{j=1}^{2}D_{1j}\Delta c_j-\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{3}\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\varphi_i^{\nu}D_{ij}^{\nu}\Delta c_j^{\nu}+$$

$$+\sum_{i=2}^{3}\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}A\alpha_i^{\nu}T_0 m_i\theta_i^{\nu}\frac{dP_i}{dt}-\mathbf{F}_1\cdot\sum_{j=1}^{2}D_{1j}\nabla c_j-\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{3}\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\mathbf{F}_i^{\nu}D_{ij}^{\nu}\nabla c_j^{\nu}+$$

$$+A\alpha_1 T_0 m_1\frac{d\sigma_{kl}}{dt}g_{kl}+\sum_{i=2}^{3}\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}A\alpha_i^{\nu}T_0 m_i\theta_i^{\nu}\mathbf{v}_i^{\nu}\cdot\nabla P_i-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=1}^{3}q_i^{\nu} \tag{4.9}$$

Полагая в приближении, что температуры фаз смесей одинаковы, из (4.9) имеем более простое уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\Delta T+\frac{1}{Б}\sum_{i=2}^{3}\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\left(m_i\theta_i^{\nu}c_{pi}^{\nu}\mathbf{v}_i^{\nu}\cdot\nabla T_i+A\alpha_i^{\nu}T_0 m_i\theta_i^{\nu}\mathbf{v}_i^{\nu}\nabla P_i\right)-$$

$$-\frac{1}{Б}\sum_{j=1}^{2}D_{1j}\Delta c_j-\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\sum_{i=1}^{3}q_i^{\nu}-\frac{1}{Б}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{3}\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}\varphi_i^{\nu}D_{ij}^{\nu}\Delta c_j^{\nu}+$$

$$+\frac{1}{Б}\sum_{i=2}^{3}\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}A\alpha_i^{\nu}T_0 m_i\theta_i^{\nu}\frac{\partial P_i}{\partial t} \tag{4.10}$$

$$a=\frac{1}{Б}\sum_{i,\nu}m_i\lambda_i\theta_i^{\nu},\qquad Б=\sum_{i=2}^{3}\sum_{\nu=\alpha}^{\Omega}c_{pi}^{\nu}m_i\theta_i^{\nu}+c_{p1}m_1\theta_1$$

Таким образом, если использовать феноменологические уравнения данной термодинамической системы для раскрытия членов, входящих в уравнения баланса массы фаз компонентов смеси, в уравнения движения и в уравнение энергии для фаз смесей ($i=2$), ($i=3$), а также раскрывая аналогичные члены в соответствующих уравнениях для первого компонента ($i=1$), то можно получить замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно Ω ($c-1$) массовых концентраций, плотности смеси, давлений компонентов смеси и температур. Понятно, что эти уравнения должны обязательно дополняться системой конститутативных зависимостей для m_1, m_i^{ν} в функции давления, для насыщенностей θ_i^{ν} в функции давления, а также зависимостями для фазовых проницаемостей в функции давления и насыщенности и зависимостями фазовых вязкостей от концентраций и давлений, и наконец, уравнением для потенциалов в функции перетока. Некоторые из этих зависимостей принимаются в качестве рабочих гипотез, другие определяются на основе экспериментов.

Из приведенных выше уравнений весьма просто следует система уравнений для неустановившейся фильтрации газированной жидкости в пластах с двойной пористостью, а также естественные обобщения в случаях трехфазной фильтрации (нефть, вода, газ) и четырехфазной (нефть, газ, вода, тяжелые углеводороды нефти).

Поступило 27 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
2. Желтов Ю. П., Розенберг М. Д., Шовкринский Г. Ю. Исследование фильтрации многокомпонентных смесей. В сб. «Добыча нефти. Теория и практика», Ежегодник, 1963, М., «Недра», 1964.
3. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанов Г. С., Терзи В. П. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М., «Недра», 1968.
4. Курбанов А. К., Розенберг М. Д. Желтов Ю. П., Шовкринский Г. Ю. Исследование движения многокомпонентных смесей в пористой среде. В сб.: «Добыча нефти. Теория и практика», Ежегодник, 1963, М., «Недра», 1964.
5. Розенберг М. Д., Кундин С. А., Курбанов А. К., Суворов Н. И., Шовкринский Г. Ю. Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах. М., «Недра», 1969.
6. Исаев Р. Г. Термодинамическое исследование процессов фильтрации в трещиновато-пористых деформируемых средах. Rev. Roumaine Sci. Tech., Ser. Mec. Appl., 1969, vol. 14, No. 3.
7. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
8. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
9. Мокадам Р. Г. Термодинамическое исследование закона Дарси. Прикл. механ., 1961, № 2.