

## ФОРМА РАВНОВЕСИЯ ПОЛОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ УПРУГОЙ ПЛЕНКОЙ, В ОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

С. И. ПЕТРОВА

(Москва)

Рассматривается плоская задача об относительном равновесии полости, ограниченной упругой пленкой в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения, содержащего определяющий параметр задачи — отношение коэффициента поверхностного натяжения пленки к скоростному напору жидкости на бесконечности. В результате решения этого уравнения получаются различные формы равновесия полости: от круговой до сильно вытянутой поперек потока; при дальнейшем изменении определяющего параметра вблизи критических точек получается отрицательная кривизна, впоследствии приводящая к делению полости.

При движении газовых пузырьков в жидкости форма их существенно зависит от величины скорости. Если предположить давление внутри пузырька постоянным, иначе говоря пренебречь движением внутри него, то наличие сил поверхностного натяжения приведет к тому, что он должен быть сплюснут в направлении движения. Точно также будет вести себя капля жидкости при движении в другой жидкости, с которой она не смешивается. Экспериментально известно, что при увеличении скорости движения капля сначала принимает форму лепешки, затем перестает быть односвязной и преобразуется в тор, который затем быстро распадается.

Если жидкость, в которой движется капля, считать идеальной, то для получения формы пузырька можно рассмотреть обтекание его однородным на бесконечности потоком жидкости.

Пусть неподвижный плоский контур  $L$ , на котором действуют силы поверхностного натяжения (фиг. 1), ограничивает область  $T$  постоянного давления  $p_0$ . Эта полость (контур вместе с внутренней областью) обтекается потоком идеальной несжимаемой жидкости. На бесконечности — это поступательный поток со скоростью  $u$  и давлением  $p_\infty$ . Требуется определить форму полости, если известны  $\sigma$  (коэффициент поверхностного натяжения),  $R_0$  (радиус круга равной с полостью площади).

Параметры  $p_\infty$  и  $p_0$  связаны через кривизну в критической точке. Предположим, что полость  $T$  симметрична относительно двух взаимно перпендикулярных осей, которые обозначим через  $x$  и  $y$ .

Задача приводится известным образом к системе уравнений

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \quad \text{в } T \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= 0, \quad \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 = \frac{1}{\varepsilon}(K - p^*) \quad \text{на } L \\ (\varepsilon &= R_0 u^2 / \sigma, \quad p^* = \varepsilon(p_0 - p_\infty - \frac{1}{2}\rho u^2) / (\rho u^2)) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{на } \infty \end{aligned} \tag{11}$$

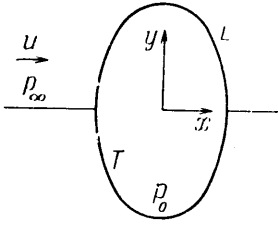
Здесь координаты  $x$  и  $y$  отнесены к  $R_0$ , потенциал скорости  $\varphi$  отнесен к  $uR_0$ ;  $K$  — отношение  $R_0$  к радиусу кривизны в рассматриваемой точке,  $\varepsilon$  — безразмерный параметр, характеризующий величину поверхностного натяжения жидкости,  $p^*$  представляет собой кривизну в критических точках.

Введем комплексную функцию  $W = \varphi + i\psi$ , где  $\psi$  — функция тока. Задача сведется к отысканию аналитической функции  $W$ , которая удовлетворяла бы условиям

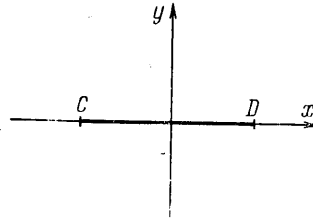
$$\frac{1}{2} \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 = \frac{1}{\varepsilon} (K - p^*), \quad \psi = 0 \quad \text{на } L \quad (1.2)$$

$$W = z \quad \text{на } \infty$$

Функция  $W$  определена однозначно на всей плоскости, за исключением разреза на действительной оси (фиг. 2).



Фиг. 1



Фиг. 2

Положим значения функции в точках  $C$  и  $D$  равными  $\mp \varphi_0$  соответственно.

Отобразим с помощью функции

$$\zeta(W) = W / \varphi_0 \pm [(W / \varphi_0)^2 - 1]^{1/2}$$

внешность отрезка  $CD$  во внутренность единичного круга.

Введем переменные  $\theta$  и  $\tau$  по формуле

$$d\zeta / dz = 2\zeta^2 e^{-i\omega(\zeta)} \quad (\omega = \theta + i\tau) \quad (1.3)$$

Таким образом, поиск  $W$  заменяется поиском функции  $\omega$  или поиском двух действительных функций  $\theta$  и  $\tau$ .

Пусть  $\zeta = \rho e^{i\phi}$  на границе области  $\zeta = e^{i\phi}$ . Следовательно, функции  $\theta$  и  $\tau$  на контуре зависят только от  $\phi$ . В переменных  $\theta$  и  $\tau$  динамическое условие на  $L$  выглядит следующим образом:

$$\partial\theta / \partial\phi = 1 - \varphi_0^2 \varepsilon \sin^2 \phi e^\tau - 1/2 p^* e^{-\tau} \quad (1.4)$$

Установим еще одно соотношение между  $\partial\theta / \partial\phi$  и  $\tau$  на  $L$ , используя формулу Грина для гармонических функций

$$(\tau)_{\rho=1} = \frac{1}{\pi} \int \left[ \ln \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\tau}{\partial n} \right)_{\rho=1} - (\tau)_{\rho=1} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] ds$$

Здесь интеграл взят по окружности единичного радиуса,  $r$  — расстояние между двумя точками на этой окружности  $\zeta^0 = e^{-i\phi}$  (фиксированной) и  $\zeta = e^{-i\psi}$  (текущей), оно равно  $2 \sin 1/2 (\psi - \phi)$ ,  $n$  — внешняя нормаль к контуру в точке  $\zeta$ , а  $ds$  — дуга окружности. Второй интеграл, поскольку

$$\partial \ln r / \partial n = 1/2$$

представляет собой на основании теоремы о среднем значении величину  $\tau$  в центре окружности —  $\tau(0)$ . Из условия при  $z = \infty$  ( $\zeta = 0$ ) найдем

$$\tau(0) = -\ln \varphi_0$$

Используя соотношение Даламбера — Эйлера

$$\partial\theta / \partial\vartheta = -\partial\tau / \partial\rho$$

получаем окончательно

$$(\tau)_{\rho=1} = -\ln \varphi_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial\theta}{\partial\psi} \right)_{\rho=1} \ln \left| 2 \sin \frac{1}{2}(\psi - \vartheta) \right| d\psi$$

Последнее соотношение совместно с динамическим условием (1.4) приводит к основному уравнению задачи

$$\Lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \varepsilon\varphi_0 \sin^2 \psi e^{\Lambda(\psi)} + \frac{p^* \varphi_0}{2} e^{-\Lambda(\psi)} \right] \ln \left| 2 \sin \frac{\psi - \vartheta}{2} \right| d\psi = 0 \quad (1.5)$$

$$\Lambda = \tau + \ln \varphi_0$$

Это уравнение типа Гаммерштейна с ядром Некрасова. Функционал  $1/2 p^* \varphi_0$  определится, если потребовать, чтобы скорость была горизонтальна при  $\vartheta = 1/2\pi$

$$\frac{p^* \varphi_0}{2} = \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon\varphi_0 \int_0^{1/2\pi} \sin^2 \psi e^{\Lambda(\psi)} d\psi \right) \left( \int_0^{1/2\pi} e^{-\Lambda(\psi)} d\psi \right)^{-1} \quad (1.6)$$

Получили, что интегральное уравнение зависит лишь от одного параметра  $\varepsilon\varphi_0$ . Решая это уравнение, получим  $\Lambda(\vartheta)$  для различных значений  $\varepsilon\varphi_0$ .

Для границы полости имеем уравнение

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= \frac{\varphi_0}{2} \int_0^{\vartheta} e^{-\Lambda(\vartheta_1)} \sin(\theta(\vartheta) - \vartheta_1) d\vartheta_1 + x_0 \\ y(\vartheta) &= \frac{\varphi_0}{2} \int_0^{\vartheta} e^{-\Lambda(\vartheta_1)} \cos(\theta(\vartheta) - \vartheta_1) d\vartheta_1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Параметр  $\varphi_0$  находится из условия, что площадь полости равна  $\pi R_0^2$

$$\pi = 4 \int_0^{x_0} y dx = \varphi_0^2 \int_0^{1/2\pi} \int_0^{\vartheta} (e^{-\Lambda(\vartheta_1)} \cos(\theta - \vartheta_1) d\vartheta_1) e^{-\Lambda(\vartheta)} \sin(\theta - \vartheta) d\vartheta$$

Интегральный множитель в правой части обозначим через  $A$ , тогда

$$\varphi_0 = \sqrt{\pi / A}$$

2. Для значений  $\varepsilon\varphi_0$  в интервале  $0 < \varepsilon\varphi_0 < 1/3$  интегральное уравнение решалось методом последовательных приближений на машине «Стрела»,  $\varepsilon\varphi_0 = 0$  соответствует бесконечно большому поверхностному натяжению и соответствующая форма полости — круг. При больших значениях параметра полость вытягивается и при  $\varepsilon\varphi_0 = 1/3$  кривизна в критических точках обращается в нуль, следовательно, давле-

ние внутри полости становится равно полному давлению на бесконечности. При дальнейшем увеличении параметра последовательные приближения перестают сходиться.

Результаты расчетов приведены на фиг. 3.

3. Для  $\varepsilon\varphi_0 = 4/3$  удалось найти точное решение интегрального уравнения. Форма полости находится в простом конечном виде<sup>1</sup>.

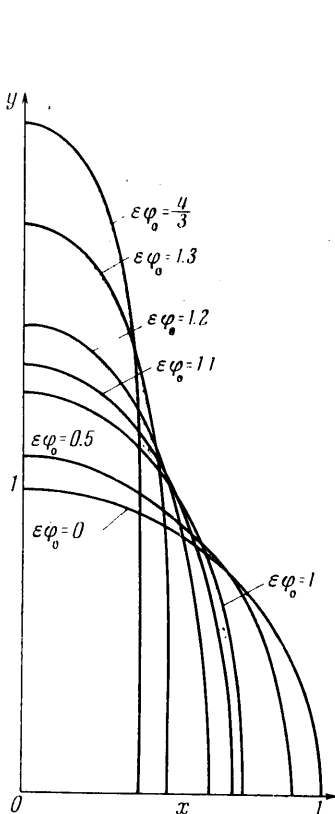
Основываясь на характере численного решения для  $\varepsilon\varphi_0$ , близкого к предельному значению, после которого последовательные приближения расходятся, можно предположить, что при

$$\varepsilon\varphi_0 = \varepsilon_0 = \frac{\pi}{2} \left( \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \psi e^{\Lambda} d\psi \right)^{-1}$$

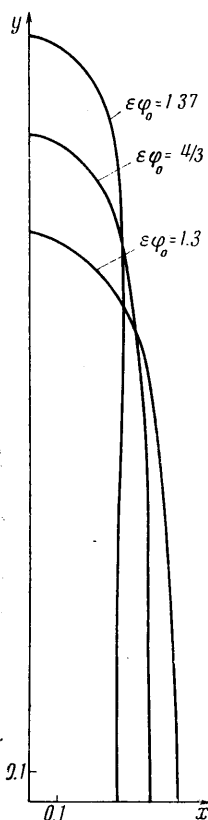
решение имеет вид

$$\Lambda = -\ln(A \cos 2\theta + B), \quad B > A$$

Если предположение верно, то такая функция  $\Lambda$  будет удовлетворять уравнениям и граничным условиям при некоторых значениях констант  $A$  и  $B$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Зная  $\Lambda(\theta)$ , можно найти  $\tau$  и  $\theta$  на границе, по этим функциям с помощью интеграла Шварца найдем  $\omega(\zeta)$ , затем  $d\omega/d\zeta$  на границе. Подставляя найденные функции в динамическое условие, найдем, что оно удовлетворится при

$$3B = 5A$$

<sup>1</sup> Указание на это решение имеется у Мак-Леода [3]. В статье не содержится аналитического выражения вида полости.

Второе соотношение между  $A$  и  $B$  дает условие на бесконечности

$$A^2 = 4(B - 1)$$

В результате получаем

$$A = 2/3, \quad B = 10/9, \quad \varepsilon_0 = 4/3$$

и точное решение в рассматриваемом случае имеет вид

$$\Lambda_0 = -\ln [2/9(3 \cos 2\theta + 5)] \quad (3.1)$$

Форма поверхности полости легко находится в параметрическом виде

$$x = \frac{2^2 \varphi_0}{3^3} \left( \frac{2(3t^2 + 1)}{(1 + t^2)^3} - 1 \right), \quad y = \frac{2^4 \varphi_0}{3^2} \frac{t}{1 + t^2} \left( 1 - \frac{t^2}{3(1 + t^2)} \right). \quad (3.2)$$

$$\varphi_0 \approx 3.6$$

4. Выражение (3.1) для точного решения позволяет исследовать его продолжительность в случае  $\varepsilon \varphi_0 > \varepsilon_0 = 4/3$ . Рассмотрим в окрестности  $\varepsilon_0$  линеаризованное уравнение. Пусть

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mu, \quad \varepsilon \varphi_0 = \varepsilon_0 + \nu$$

Предположим, что  $\mu$  представимо в виде ряда по целым степеням  $\nu$

$$\mu = \varphi_1(\theta)\nu + \varphi_2(\theta)\nu^2 + \dots$$

и будем искать первый член этого разложения. Обычным путем получим линейное уравнение

$$\Phi + \int_0^{2\pi} \left( \frac{4}{3\pi} K + \frac{1}{5\pi} \cos 2\theta \right) f\Phi \, d\psi = \frac{3}{4} \quad (4.1)$$

Здесь через  $\Phi$ ,  $K$  и  $f$  обозначены функции

$$\Phi = \varphi_1 + 3/4, \quad K(\psi, \theta) = \ln |2 \sin 1/2(\psi - \theta)|, \quad f = \sin^2 \psi e^{(\Lambda_0 \psi)}$$

Попробуем отыскать его решение в виде функции, разложенной в тригонометрический ряд

$$\Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + A_0 \quad (4.2)$$

Ядро линейного уравнения тоже разложим в ряд

$$\frac{4}{3\pi} K + \frac{1}{5\pi} \cos 2\theta = -\frac{4}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\psi \cos n\theta + \sin n\psi \sin n\theta}{n} + \frac{1}{5\pi} \cos 2\theta$$

Введем обозначения

$$J_0 = \int_0^{2\pi} f \, d\psi, \quad J_{ss}(n, k) = \int_0^{2\pi} \sin n\psi \sin k\psi f \, d\psi$$

$$J_s(n) = \int_0^{2\pi} \sin n\psi f \, d\psi, \quad J_{sc}(n, k) = \int_0^{2\pi} \sin n\psi \cos k\psi f \, d\psi$$

$$J_c(n) = \int_0^{2\pi} \cos n\psi f \, d\psi, \quad J_{cc}(n, k) = \int_0^{2\pi} \cos n\psi \cos k\psi f \, d\psi$$

Часть этих функций вследствие их периодичности обращается в нуль при некоторых значениях параметров  $n$  и  $k$ .

Так, функции  $J_{cc}(n, k)$  и  $J_{ss}(n, k)$  равны нулю при  $n + k$  нечетном,  $J_c(n)$  — при  $n$  нечетном, а  $J_s(n)$  и  $J_{sk}(n, k)$  — всегда.

Все остальные  $J$  могут быть посчитаны. Для этого разложим  $f$  в тригонометрический ряд

$$f = 3/4 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1/3)^n \cos 2n\psi \tag{4.3}$$

Производя интегрирование, найдем

$$\begin{aligned} J_c(2n) &= 3(-1/3)^n \pi, & n > 0 \\ J_{cc}(n, k) &= 3/2\pi(-3)^{-1/2n} [(-3)^{1/2k} + (-3)^{-1/2k}] & (n > k) \\ J_{cc}(k, k) &= 3/2\pi[1/2 + (-3)^{-k}] \\ J_{ss}(n, k) &= 3/2\pi(-3)^{-1/2n} [(-3)^{-1/2k} - (-3)^{1/2k}] & (n > k) \\ J_{ss}(k, k) &= 3/2\pi[1/2 - (-3)^{-k}] \end{aligned}$$

Подставляя вид решения в уравнение (4.1), получаем

$$\begin{aligned} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta + \frac{1}{5\pi} \cos 2\theta A_0 J_0 + \frac{1}{5\pi} \cos 2\theta \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_c(n) - \\ - \frac{4}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\psi}{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{cc}(n, k) - \frac{4}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\theta}{k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{ss}(k, n) - \\ - \frac{4}{3\pi} A_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{k} J_c(k) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Отсюда сразу имеем  $A_0 = 3/4$ .

Приравняв нулю коэффициенты при синусах и косинусах различных углов, получаем четыре независимых бесконечных системы для определения коэффициентов  $B$  с нечетными,  $B$  — с четными,  $A$  — с нечетными и  $A$  — с четными индексами. Первые три системы однородны, а последняя неоднородна. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cccc} 3^{-1} & -3^{-2} - 3^{-1} & 3^{-3} + 3^{-2} & \dots \\ -3^{-2} - 3^{-1} & 1/2 + 3^{-3} - 1/2 \cdot 3 & -3^{-4} - 3^{-1} & \dots \\ 3^{-3} + 3^{-2} & -3^{-4} - 3^{-1} & 1/2 + 3^{-5} - 1/2 \cdot 5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \\ \vdots \end{array} \right\| = 0 \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1/2 + 3^{-2} & 3^{-1} - 3^{-3} & -3^{-2} + 3^{-4} & \dots \\ 3^{-1} - 3^{-3} & 1/2 \cdot 3 + 3^{-4} & 3^{-1} - 3^{-5} & \dots \\ -3^{-2} + 3^{-4} & 3^{-1} - 3^{-5} & 1/2 \cdot 5 + 3^{-6} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} B_2 \\ B_4 \\ B_6 \\ \vdots \end{array} \right\| = 0 \\ \left\| \begin{array}{cccc} -3^{-1} & -3^{-1} + 3^{-2} & 3^{-2} - 3^{-3} & \dots \\ -3^{-1} + 3^{-2} & -1 - 3^{-3} & -3^{-1} + 3^{-4} & \dots \\ 3^{-2} - 3^{-3} & -3^{-1} + 3^{-4} & -2 - 3^{-5} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \vdots \end{array} \right\| = 0 \\ \left\| \begin{array}{cccc} -1/2 + 3^{-2} - 5^{-1} & -3^{-1} - 3^{-3} - 3^{-1} \cdot 5^{-1} & 3^{-2} + 3^{-4} - 3^{-2} \cdot 5^{-1} & \dots \\ -3^{-1} - 3^{-3} & -1/2 \cdot 3 + 3^{-4} & -3^{-1} - 3^{-5} & \dots \\ 3^{-2} + 3^{-4} & -3^{-1} - 3^{-5} & -1/2 \cdot 5 + 3^{-6} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A_2 \\ A_4 \\ A_6 \\ \vdots \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} -29/40 \\ 1/12 \\ 1/54 \\ \vdots \end{array} \right\| \end{aligned}$$

Выполним со всеми определителями следующие операции. Поделим каждую  $i$ -ю строку на  $(i+1)$ -й член этой строки со знаком минус, затем каждую  $i$ -ю строку умножим на 3, сложим с  $(i+1)$ -й строкой и поставим  $i$ -й строкой. Все рассматриваемые определители имеют такой вид, что в результате в каждой строке после члена  $a_{i, i+1}$  будут стоять нули.

Такие определители очень удобны для расчета коэффициентов через первые  $(A_1, A_2, B_1$  и  $B_2)$ .

Посмотрим, как ведут себя коэффициенты с достаточно большими индексами. Для этого достаточно далекую  $n$ -ю строку разделить на 3 и сложить с  $(n+1)$ -й. Получим, что в  $n$ -й строке все члены, кроме трех последних, малы. Действительно, достаточно пренебречь  $1/3^{2n-2}$  по сравнению с  $1/3$ , как получим в  $n$ -й строке и  $k$ -м столбце для первого и третьего определителей

$$(-1)^{n-k} \left\{ \left( 3 + \frac{1}{3} \right) \frac{\pm 3^{1-n-k} + 3^{k-n}}{3^{-1} \pm 3^{-2n}} - \frac{\pm 3^{2-n-k} + 3^{1-n+k}}{3^{-1} \pm 3^{-2n}} - \frac{\pm 3^{-n-k} + 3^{k-n-1}}{3^{-1} \pm 3^{-2n-2}} \right\} \approx 0$$

$$(1 \leq k \leq n-2) \quad (1.1)$$

Для второго и четвертого определителей

$$\left\{ \left( 3 + \frac{1}{3} \right) \frac{\pm 3^{k-n} - 3^{n-k}}{-3^{-1} \pm 3^{-2n-2}} - \frac{\pm 3^{k+1-n} - 3^{1-k-n}}{-3^{-1} \pm 3^{-2n}} - \frac{\pm 3^{1-n-k} - 3^{-n-k-1}}{-3^{-1} \pm 3^{-2n-3}} \right\} \approx 0$$

Значит в достаточно далеких строках будут в каждой строке существенны лишь три члена. Для всех определителей они равны.

Первые три системы однородны, поэтому для определения коэффициентов имеем уравнение

$$C_{n-1} + {}^{10}/_3 C_n + C_{n+1} = 0$$

Здесь  $C_n = B_{2n-1} = B_{2n} = A_{2n-1}$  для достаточно больших  $n$ . Будем считать, что

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{C_n}{C_{n-1}} = \alpha$$

тогда из квадратного уравнения для  $\alpha$  получим два значения  $\alpha$ :  $-3$  и  $-1/3$ . Это значит, что полученные из первой, второй и третьей систем коэффициенты могут с увеличением индекса либо возрастать неограниченно, либо убывать как геометрическая прогрессия со знаменателем  $-1/3$ .

Непосредственные расчеты показали, что коэффициенты возрастают ( $\alpha = -3$ ), т. е. исходное линейное уравнение, если положить его правую часть равной нулю, не имеет нетривиальных решений, т. е.  $e\varphi_0 = 4/3$  не является собственным числом ни линейного, ни соответствующего нелинейного уравнения. В этом случае должно существовать единственное решение неоднородного линейного уравнения.

Действительно, оно легко находится. Из первых трех систем получаем тривиальное решение

$$B_{2k+1} = 0, \quad B_{2k+2} = 0, \quad A_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим четвертую систему. В соответствии с приведением системы к удобному для решения виду вектор правой части преобразуется к виду

$$\frac{783}{236} - \frac{1}{4} \frac{1}{1+3^{-4}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+3^{-4}} + \frac{1}{18} \frac{1}{1+3^{-6}}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{1+3^{-2n}} \frac{1}{2n \cdot 3^{n-3}} + \frac{(-1)^n}{1+3^{-2n-2}} \frac{1}{2(n+1) \cdot 3^{n-1}}, \dots$$

Заметим, что  $n$ -я компонента вектора при больших  $n$  быстро уменьшается

$$b_n \approx (-1)^{n-1} \frac{4}{3^{n-1}n}$$

Таким образом, полученное поведение коэффициентов с большими индексами должно иметь место и при решении этой неоднородной системы.

Действительно, расчет этой системы показывает, что коэффициенты  $A_{2k}$  убывают с увеличением  $k$ , как члены геометрической прогрессии со знаменателем  $\alpha = -1/3$ . Получаем решение четвертой системы и решение линейного уравнения

$$\varphi_1 = \Phi - 3/4 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \cos 2n\theta = -29.4 \cos 2\theta + 8.9 \cos 4\theta - \\ - 3.8 \cos 6\theta + \cos 8\theta - 0.3 \cos 10\theta + 0.1 \cos 12\theta - 0.03 \cos 14\theta + \dots$$

Решение нелинейного интегрального уравнения вблизи  $\varepsilon\varphi_0 = 4/3$  будет

$$\Lambda = \Lambda_0 + \nu\varphi_1, \quad \nu = \varepsilon\varphi_0 - 4/3$$

Найдем  $1/2 p^* \varphi_0$  — кривизну в критических точках

$$\frac{p^* \varphi_0}{2} = -\frac{9}{5} \nu \left[ \frac{3}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right]$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой положительное число, примерно равное 11.5. Таким образом,  $1/2 p^* \varphi_0 \approx -20.75\nu$ , т. е. при  $\nu < 0$  кривизна положительна, а при  $\nu > 0$  — отрицательна. Форма полости определяется через

$$x(\theta) = x^*(\theta) + \nu a(\theta), \quad y(\theta) = y^*(\theta) + \nu b(\theta)$$

Здесь  $x^*$  и  $y^*$  — решение при  $\nu = 0$ , а  $a$  и  $b$  — функции, не равные тождественно нулю. Теперь, имея уже решения для  $\nu < 0$ , можно легко графически построить решение для  $\nu > 0$  (фиг. 4). Получена, таким образом, равновесная форма полости с областями отрицательной кривизны вблизи критических точек.

В заключение автор благодарит Н. Н. Мойсеева и А. А. Петрова за ценные советы при выполнении данной работы.

Поступило 3 III 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мойсеев Н. Н. О течении тяжелой жидкости над волнистым дном. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. Lichtenstein Vorlesungen uber nichtlinearen Integral und Integrodifferenzialgleichungen. Berlin, 1931.
3. McLeod E. B. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension. J. Rat. Mech. Analys., 1955, vol. 4, No. 4.