

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ПРИ СИЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЯХ ОТ МАКСВЕЛЛОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

И. А. ЭНДЕР, А. Я. ЭНДЕР

(Ленинград)

Предлагается рассматривать функцию распределения как набор всевозможных максвелловских распределений с произвольными температурами и средними скоростями.

Основные результаты получены для случая, когда функция распределения зависит только от модуля скорости. В этом случае разложение ведется по максвелловским распределениям с разными температурами.

Одновременно с функцией распределения производится переразложение по выбранному базису и интеграла столкновений от двух максвелловских распределений. Эта часть задачи решается аналитически. В результате значительно упрощается вычисление интеграла столкновений и оказывается возможным подробное изучение температурной релаксации в газах.

Надежных методов решения кинетического уравнения Больцмана при сильных отклонениях от равновесия пока не существует. Основные методы решения — метод Энского — Чепмена [1] и моментный метод Греда [2] — практически применимы только при достаточно малых отклонениях от максвелловского распределения.

В то же время исследование сильных отклонений становится все более важным, так как такие задачи, как структура ударной волны, изучение сильно неравновесных процессов вблизи границы и другие, не могут быть рассчитаны с помощью указанных выше методов.

В работе предлагается представлять функцию распределения  $f(v, r, t)$  в виде интеграла от максвелловских распределений со всевозможными температурами и средними скоростями, причем каждое распределение берется с определенным весом, т. е.

$$f(v, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\alpha, v, u) \varphi(\alpha, u, r, t) da du \quad (0.1)$$

$$M(\alpha, v, u) = (\alpha / \pi)^{3/2} e^{-\alpha(v-u)^2}, \quad \alpha = m / 2kT$$

Следует отметить, что такое представление требует обращения к обобщенным функциям, так как даже в случае, когда  $f(v, r, t)$  — максвелловское распределение,  $\varphi(\alpha, u)$  —  $\delta$ -функция.

Метод состоит в том, что выводится уравнение для  $\varphi$ , предлагается способ решения полученного уравнения, по найденному  $\varphi$  при помощи (0.1) строится  $f$ .

Ниже этот метод детально рассмотрен на примере простой кинетической задачи. Упрощения приняты в двух направлениях: задача предполагается пространственно однородной, а функция распределения в начальный момент — зависящей только от модуля скорости (будем называть такую функцию сферически симметричной).

Эти упрощения позволяют разлагать функцию распределения по максвелловским распределениям с произвольными температурами и с нулевыми средними скоростями.

1. Пусть газ пространственно однороден и функция распределения в начальный момент  $t = t_0$  зависит только от модуля скорости. Представим ее при  $t = t_0$  в следующем виде:

$$f(v, t_0) = \int_0^\infty M(\alpha, v) \varphi(\alpha, t_0) d\alpha \quad M(\alpha, v) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} \quad \alpha = \frac{m}{2km} \quad (1.1)$$

Здесь  $M(\alpha, v)$  — максвелловское распределение с нулевой средней скоростью,  $\varphi(\alpha, t_0)$  — вес распределения с температурой  $m/2k\alpha$  при  $t = t_0$ . Введем обозначения  $s = v^2$ ,  $(\alpha/\pi)^{3/2}\varphi(\alpha, t_0) = \psi(\alpha, t_0)$ , тогда

$$f(s, t_0) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} \psi(\alpha, t_0) d\alpha \quad (1.2)$$

Это соотношение представляет собой преобразование Лапласа. Таким образом, множество сферически симметричных функций, для которых представление (1.1) имеет место, оказывается достаточно широким.

В рассматриваемом случае уравнение Больцмана имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = nJ(f, f') \quad (1.3)$$

Здесь  $J(f, f')$  — интегральный оператор столкновений. Пусть в какой-то момент времени  $t$  имеет место разложение

$$f(v, t) = \int_0^{\infty} M(\alpha, v) \varphi(\alpha, t) d\alpha \quad (1.4)$$

Подставим (1.4) в правую часть (1.3)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = nJ\left(\int_0^{\infty} M(\alpha_1, v) \varphi(\alpha_1, t) d\alpha_1, \int_0^{\infty} M(\alpha_2, v') \varphi(\alpha_2, t) d\alpha_2\right) \quad (1.5)$$

Меня местами порядок интегрирования в (1.5), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha_1, t) \varphi(\alpha_2, t) J^M(\alpha_1, \alpha_2, v) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.6)$$

Здесь  $J^M(\alpha_1, \alpha_2, v)$  интеграл столкновений, определяющий изменение числа частиц с функцией распределения  $M(\alpha_1, v)$  за счет их столкновений с частицами с функцией распределения  $M(\alpha_2, v)$ .

Пусть существует отображение  $J^M(\alpha_1, \alpha_2, v)$  в  $\alpha$ -пространство, т. е. имеет место равенство

$$J^M(\alpha_1, \alpha_2, v) = \int_0^{\infty} M(\alpha, v) A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) d\alpha \quad (1.7)$$

Здесь  $A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$  — образ  $J^M(\alpha_1, \alpha_2, v)$  в  $\alpha$ -пространстве<sup>1</sup>

Тогда интегральный оператор столкновений  $J(f, f')$  обладает тем же свойством, т. е. разлагается по максвелловским распределениям.

Действительно, подставляя (1.7) в правую часть (1.6) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$J(f, f') = \int_0^{\infty} M(\alpha, v) B(\alpha) d\alpha, \quad (1.8)$$

$$B(\alpha) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha_1, t) \varphi(\alpha_2, t) A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2$$

<sup>1</sup> Ниже будет конкретно вычислено ядро  $A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$  для модели упругих сфер. Аналогичные результаты можно получить и для ряда других типов межмолекулярных взаимодействий.

Отсюда следует, что и дифференциальный оператор в левой части уравнения Больцмана (1.3) можно представить в виде (1.8). Поэтому, двигаясь от рассматриваемого момента времени  $t$  бесконечно малыми шагами, будем иметь, что и в любой последующий момент времени функцию распределения можно представить в виде (1.1).

Используя (1.4) и (1.8), из уравнения (1.3) получаем

$$\int_0^{\infty} M(\alpha, v) \left( \frac{\partial \varphi(\alpha, t)}{\partial t} - nB(\alpha) \right) d\alpha = 0 \quad (1.9)$$

По свойству преобразования Лапласа [3] из (1.9) следует, что

$$\partial \varphi(\alpha, t) / \partial t - nB(\alpha) = 0 \quad (1.10)$$

Окончательно уравнение Больцмана в  $\alpha$ -пространстве имеет вид

$$\frac{\partial \varphi(\alpha, t)}{\partial t} = n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) \varphi(\alpha_1, t) \varphi(\alpha_2, t) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.11)$$

Проводя аналогичные рассуждения для смеси газов, получим следующее отображение системы уравнений Больцмана в  $\alpha$ -пространство:

$$\frac{\partial \varphi_i(\alpha, t)}{\partial t} = \sum_j n_j \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A_{ij}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) \varphi_i(\alpha_1, t) \varphi_j(\alpha_2, t) d\alpha_1 d\alpha_2$$

Таким образом, задача свелась к вычислению ядра и к разработке методов решения полученных уравнений.

Следует отметить, что если в смеси концентрация газа первого сорта мала по сравнению с концентрацией газа второго сорта и функция распределения газа второго сорта максвелловская (тепловая баня)  $f_2(v) = M(\alpha_2, v)$ , то система (1.11) линеаризуется

$$\frac{\partial \varphi_1(\alpha, t)}{\partial t} = n_2 \int_0^{\infty} A_{12}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) \varphi_1(\alpha_1) d\alpha_1, \quad \varphi_2(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_2)$$

2. Как отмечалось выше, ядро  $A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$  есть отображение интеграла столкновений от двух максвелловских распределений в  $\alpha$ -пространство, или есть обратное преобразование Лапласа от интеграла столкновений от двух максвелловских распределений, т. е.

$$J^M(\alpha_1, \alpha_2, v) = \int_0^{\infty} M(\alpha, v) A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) d\alpha$$

или

$$\left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{s\alpha} J^M(\alpha_1, \alpha_2, v) ds \quad (s = v^2)$$

Перейдем к вычислению ядра в случае, когда частицы сталкиваются как упругие шары. С этой целью вычислим интеграл столкновений от двух максвелловских распределений с разными температурами и с нулевыми средними скоростями.

В работе [4] было показано, что если функции распределения зависят от модуля скорости, то интеграл столкновений частиц разного сорта можно

записать так:

$$nJ(f_1, f_2) = 2\pi n \int_0^\infty \int_0^\pi (K_+ - K_-) \sigma(g) g^3 \sin \theta_1 d\theta_1 dg,$$

$$K_+ = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi(\theta_1) f_1(v'') f_2(v''') \sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi_2, \quad K_- = f_1(v) f_2(v')$$

Здесь  $\theta_1$  — угол между относительными скоростями частиц до и после столкновения. Если атомы представляют собой упругие сферы,

$$(\chi(\theta_1) = 1, \sigma = \text{const}) \quad K_+ = \frac{1}{2} \int_0^\pi f_1(v'') f_2(v''') \sin \theta_2 d\theta_2$$

и интеграл столкновений  $nJ(f_1, f_2)$  принимает вид (для простоты предполагается  $m_1 = m_2$ )

$$nJ(f_1, f_2) = \text{Re } l_+ - \text{Re } l_- \quad (2.4)$$

$$\text{Re } l_+ = \pi n \sigma \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi f_1(v'') f_2(v''') g^3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 dg \quad (2.2)$$

$$\text{Re } l_- = 2\pi n \sigma \int_0^\infty \int_0^\pi f_1(v) f_2(v') g^3 \sin \theta_1 d\theta_1 dg$$

$$v''^2 = v_0^2 + \frac{1}{4}g^2 + v_0 g \cos \theta_2, \quad v_0^2 = v^2 + \frac{1}{4}g^2 + v g \cos \theta_1$$

$$v'''^2 = v_0^2 + \frac{1}{4}g^2 - v_0 g \cos \theta_2, \quad v'^2 = v^2 + g^2 + 2v g \cos \theta_1$$

Здесь  $v_0$  — скорость центра масс сталкивающихся частиц, а  $g$  — их относительная скорость,  $\sigma$  — полное сечение рассеяния.

Если в уравнения (2.4) и (2.2) подставить в качестве функций распределения разнотемпературные максвелловские распределения, то  $\text{Re } l_-$  после ряда несложных преобразований запишется так:

$$\text{Re } l_- = \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\pi^2} \right)^{3/2} \sigma e^{-\alpha_1 v^2} \pi^{3/2} \frac{n}{\alpha_2^2} \left\{ \frac{e^{-\alpha_2 v^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\Phi(v\sqrt{\alpha_2})}{2v\sqrt{\alpha_2}} + v\sqrt{\alpha_2} \Phi(v\sqrt{\alpha_2}) \right\} \quad (2.3)$$

Здесь  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности. После интегрирования по  $\theta_2$  из (2.2) получаем

$$\text{Re } l_+ = \frac{4\pi c}{(\alpha_1 - \alpha_2)v} \int_0^\infty \int_{|1/2g-v|}^{1/2g+v} \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(\frac{1}{4}g^2 + v_0^2)] \times \\ \times \text{sh}[(\alpha_1 - \alpha_2)g v_0] g dg dv_0 \\ c = (\alpha_1 \alpha_2 \pi^{-2})^{3/2} n \sigma$$

Вместо переменной  $v_0$  введем переменную  $t = v_0 \pm g(\alpha_1 - \alpha_2) / 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ . Тогда

$$\text{Re } l_+ = [\psi(\alpha_1, \alpha_2) - \psi(\alpha_2, \alpha_1)] 4\pi c / (\alpha_1 - \alpha_2) v \\ \psi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-\alpha_1 \alpha_2 g^2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \left( \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)t^2] dt \right) g dg \\ \alpha_\pm = \alpha_2 g / (\alpha_1 + \alpha_2) \pm v$$

После интегрирования по частям получим

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \int_{-v}^v e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t^2} dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha_1} \int_0^\infty e^{-\alpha_1 v^2} (\exp[-\alpha_2(g+v)^2] - \exp[-\alpha_2(g-v)^2]) dg \right]$$

Заменяя соответственно  $\alpha_i(v \pm g)$  на  $x$ , где  $i = 1, 2$ , окончательно имеем

$$\operatorname{Re} l_+ = \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\pi^2} \right)^{3/2} \frac{n\sigma\pi^{3/2}}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) v} [e^{-\alpha_2 v^2} \sqrt{\alpha_1} \Phi(v\sqrt{\alpha_1}) - e^{-\alpha_1 v^2} \sqrt{\alpha_2} \Phi(v\sqrt{\alpha_2})] \quad (2.4)$$

Итак

$$nJ^M(\alpha_1, \alpha_2, v) = \operatorname{Re} l_+ - \operatorname{Re} l_-$$

где  $\operatorname{Re} l_+$  и  $\operatorname{Re} l_-$  определяются по формулам (2.3) и (2.4). Теперь перейдем к отысканию обратных преобразований Лапласа от  $\operatorname{Re} l_+$  и  $\operatorname{Re} l_-$ . Для их обозначения используем фигурные скобки. Будем полагать  $(\alpha/\pi)^{3/2} \{\operatorname{Re} l_+\}$  и  $(\alpha/\pi)^{3/2} \{\operatorname{Re} l_-\}$  соответственно. Введем новую функцию  $F_+(v, a)$

$$F_+(v, a) = \frac{D}{v} [e^{-\alpha_2 v^2} \sqrt{\alpha_1} \Phi(av\sqrt{\alpha_1}) - e^{-\alpha_1 v^2} \sqrt{\alpha_2} \Phi(av\sqrt{\alpha_2})], \quad D = \frac{c\pi^{3/2}}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (2.5)$$

Имеем  $F_+(v, 1) = \operatorname{Re} l_+$ , а  $F_+(v, 0) = 0$ . Очевидно, что

$$\operatorname{Re} l_+ = \int_0^1 \frac{dF_+(v, a)}{da} da \quad (2.6)$$

По формуле обращения преобразования Лапласа имеем

$$\left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \{\operatorname{Re} l_+\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\alpha s} \operatorname{Re} l_+ ds \quad (s = v^2)$$

или, используя (2.6) и дифференцируя по  $a$  (2.5)

$$\left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \{\operatorname{Re} l_+\} = \frac{D}{2\pi i} \int_0^1 \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\alpha s} \frac{2}{\sqrt{\pi}} [\alpha_1 \exp[-(\alpha_2 + a^2 \alpha_1) s] - \\ - \alpha_2 \exp[-(\alpha_1 + a^2 \alpha_2) s]] ds da$$

Воспользуемся следующим определением  $\delta$ -функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{xs} ds$$

Тогда

$$\left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \{\operatorname{Re} l_+\} = \frac{2D}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 [\alpha_1 \delta(\alpha - \alpha_2 - a^2 \alpha_1) - \alpha_2 \delta(\alpha - \alpha_1 - a^2 \alpha_2)] da \quad (2.7)$$

После замены переменной интегрирования формула (2.7) примет вид

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \{\text{Re } l_+\} = \\ = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \left[ \sqrt{\alpha_1} \int_0^{\alpha_1} \frac{\delta(\alpha - \alpha_2 - x)}{\sqrt{x}} dx - \sqrt{\alpha_2} \int_0^{\alpha_2} \frac{\delta(\alpha - \alpha_1 - x)}{\sqrt{x}} dx \right]$$

и окончательно

$$\{\text{Re } l_+\} = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\pi^2}\right)^{3/2} \frac{\sigma \pi^{5/2} n}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{U(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha)}{\alpha^{3/2}} \times \\ \times \left[ \sqrt{\alpha_1} \frac{U(\alpha - \alpha_2)}{\sqrt{\alpha - \alpha_2}} - \sqrt{\alpha_2} \frac{U(\alpha - \alpha_1)}{\sqrt{\alpha - \alpha_1}} \right] \quad (2.8)$$

Проведя аналогичные рассуждения для  $\{\text{Re } l_-\}$ , получаем

$$\{\text{Re } l_-\} = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\pi^2}\right)^{3/2} \frac{\sigma \pi^{5/2} n}{\alpha_2^2 \alpha^{3/2}} U(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha) \times \\ \times \left[ \frac{U(\alpha - \alpha_1)}{2\sqrt{\alpha_2} \sqrt{\alpha - \alpha_1}} + \sqrt{\alpha_2} \frac{d}{d\alpha} \frac{U(\alpha - \alpha_1)}{\sqrt{\alpha - \alpha_1}} \right] \quad (2.9)$$

Здесь  $U(x)$  — функция скачка<sup>1</sup>. Таким образом

$$nA(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) = \{\text{Re } l_+\} - \{\text{Re } l_-\}$$

Здесь  $\{\text{Re } l_+\}$  и  $\{\text{Re } l_-\}$  определяются по формулам (2.8), (2.9)

Отметим следующие четыре свойства ядра  $A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ :

$$1) \quad A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad \text{при } \alpha_1 = \alpha_2$$

Это отражение того факта, что интеграл столкновений для двух максвелловских распределений с одинаковой температурой обращается в нуль;

$$2) \quad \int_0^\infty A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) d\alpha = 0$$

Физически это эквивалентно сохранению числа частиц каждого сорта:

$$3) \quad \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} [A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) + A(\alpha, \alpha_2, \alpha_1)] d\alpha$$

это эквивалентно закону сохранения энергии;

$$4) \quad A(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad \text{при } \alpha < \min(\alpha_1, \alpha_2) \text{ и } \alpha > \alpha_1 + \alpha_2.$$

Последнее свойство ядра, т. е. ограниченность области его определения, позволяет делать некоторые выводы об эволюции системы. При анализе функции распределения иногда существенным оказывается знание поведения функции распределения в области скоростей очень больших по сравнению с тепловой.

<sup>1</sup> В справедливости формул (2.8), (2.9) можно убедиться и непосредственной проверкой соотношения

$$\text{Re } l_\pm = \int_0^\infty M(\alpha, v) \{\text{Re } l_\pm\} d\alpha$$

Еще раз отметим, что функции в  $\alpha$ -пространстве следует рассматривать как обобщенные.

Из четвертого свойства ядра (заметим, что это свойство сохраняется и для других видов межмолекулярных взаимодействий) вытекает, что в ходе релаксации в разложении вообще никогда не появится максвелловское распределение с температурой выше, чем наивысшая из первоначальных, а поэтому для достаточно больших  $v$  можно провести следующую оценку:

$$f(v, t) = \int_0^{\infty} M(\alpha, v) \varphi(\alpha, t) d\alpha \leq M(\alpha_0, v) \int_0^{\infty} \varphi(\alpha, t) d\alpha = M(\alpha_0, v),$$

$$\left( \alpha_0 = \frac{m}{2kT_0} \right)$$

Здесь  $T_0$  — максимальная из первоначальных температур. При проведении этой оценки использовано равенство

$$\int_0^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha = 1$$

3. Запишем уравнение Больцмана в  $\alpha$ -пространстве в безразмерном виде

$$\frac{\partial \varphi'(x_2, t)}{\partial t} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A'(x, x_1, x_2) \varphi'(x_1, t) \varphi'(x_2, t) dx_1 dx_2 \quad (3.1)$$

$$A'(x, x_1, x_2) = \{\text{Re } l_+' \} - \{\text{Re } l_-' \}$$

$$x = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad x_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \quad \varphi' = \alpha_0 \varphi, \quad t' = \frac{n\sigma t}{\alpha_0^{1/2}}, \quad \alpha_0 = \frac{m}{2kT_0}$$

Здесь  $T_0$  — максимальная из начальных температур.  
Для упругих шаров

$$\{\text{Re } l_+' \} = \left( \frac{x_1 x_2}{\pi^2} \right)^{3/2} \pi^{5/2} \frac{U(x_1 + x_2 - x)}{x_1 x_2 (x_1 - x_2) x^{3/2}} \left[ \frac{\sqrt{x_1} U(x - x_2)}{\sqrt{x - x_2}} - \frac{\sqrt{x_2} U(x - x_1)}{\sqrt{x - x_1}} \right] \quad (3.2)$$

$$\{\text{Re } l_-' \} = \left( \frac{x_1 x_2}{\pi^2} \right)^{3/2} \pi^{5/2} \frac{U(x_1 + x_2 - x)}{x_2^2 x^{3/2}} \times$$

$$\times \left[ \frac{U(x - x_1)}{2\sqrt{x_2} \sqrt{x - x_1}} + \sqrt{x_2} \frac{d}{dx} \frac{U(x - x_1)}{\sqrt{x - x_1}} \right] \quad (3.3)$$

В дальнейшем штрих у безразмерных величин будем опускать.

При численном решении задачи функцию распределения в  $\alpha$ -пространстве представим в виде

$$\varphi = \sum_k a_k \delta(x - x_k^*) \quad \left( x_k^* = \frac{\alpha_k^*}{\alpha_0}, \quad \alpha_k^* = \frac{m}{2kT_k^*} \right) \quad (3.4)$$

Здесь  $x_k, x_{k+1}$  — точки дробления оси  $x$  ( $x_k < x_k^* < x_{k+1}$ ).

При таком представлении непрерывная функция распределения в интервале  $(x_k, x_{k+1})$  заменяется  $\delta$ -функцией с некоторым средним значением температуры  $T_k^*$ . Точки деления  $x_k$  удобно выбирать так, чтобы  $T_{k+1} - T_{k+2} = T_k - T_{k+1} = \dots = \text{const}$ . Средняя температура

$$T_k^* = T_k - H, \quad T_k > T_k - H > T_{k+1}$$

Параметр  $H$  так же, как и число точек дробления, подбирается в процессе счета. Коэффициенты  $a_k$  определяются как следующие интегралы:

$$a_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx$$

Проинтегрируем уравнение (3.1) по интервалу  $(x_k, x_{k+1})$

$$\frac{da_k}{dt} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A(x, x_1, x_2) \varphi(x_1, t) \varphi(x_2, t) dx_1 dx_2 dx \quad (3.5)$$

В правую часть (3.5) подставим  $\varphi(x)$  в виде (3.4). Тогда вместо одного интегро-дифференциального уравнения (3.1) получим конечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для  $a_k(t)$

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{l,p} A_{k,l,p} a_l(t) a_p(t) \quad (3.6)$$

где

$$A_{k,l,p} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\{\operatorname{Re} L_+(x, x_l^*, x_p^*)\} - \{\operatorname{Re} L_-(x, x_l^*, x_p^*)\}] dx$$

Для модели «упругих шариков» ядро (3.2), (3.3) заменяется следующей матрицей:

$$A_{k,l,p} = A_{k,l,p}^+ - A_{k,l,p}^-$$

$$A_{k,l,p}^+ = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \{\operatorname{Re} L_+(x, x_l^*, x_p^*)\} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi} (x_p^* x_l^*)^{1/2}} \left[ \frac{U(x_p^* + x_l^* - x)}{x_l^* - x_p^*} \times \right.$$

$$\times (U(x - x_p^*) x_l^{*3/2} \sqrt{1 - x_p^*/x} - U(x - x_l^*) x_p^{*3/2} \sqrt{1 - x_l^*/x}) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \\ \left. + \sqrt{x_p^* + x_l^*} U(x_{k+1} - x_p^* - x_l^*) U(x_p^* + x_l^* - x_k) \right]$$

$$A_{k,l,p}^- = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \{\operatorname{Re} L_-(x, x_l^*, x_p^*)\} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi} x_p^* x_l^*} \left[ U(x^* + x_l^* - x) \times \right.$$

$$\times U(x - x_l^*) \left( \frac{x_l^*}{\sqrt{x_p^*}} \sqrt{1 - x_l^*/x} + \sqrt{x_p^*} \frac{2x - x_l^*}{x \sqrt{1 - x_l^*/x}} \right) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \\ \left. + 2\sqrt{x_p^* + x_l^*} U(x_{k+1} - x_p^* - x_l^*) U(x_p^* + x_l^* - x_k) \right]$$

Значения  $x_p^*$  и  $x_l^*$  выбираются несовпадающими с точками деления  $x_k$ . То обстоятельство, что функция распределения  $\varphi(a)$  благодаря представлению (3.4) оказалась сосредоточенной в некоторых точках выбранных температурных интервалов, позволяет перейти в представлении  $f(v)$  от интеграла к конечной сумме

$$f(v) = \sum_k a_k M(a_k, v)$$



Такая замена не приводит к существенным погрешностям, поскольку физические процессы обладают следующими очевидными свойствами:

1) релаксация внутри температурного интервала ( $T_{k+1}$ ,  $T_k$ ) мала по сравнению с релаксацией между интервалами. Математически это выражается в том, что  $\lim A(x, x_1, x_1 + \Delta x) = 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ;

2) интеграл столкновений от двух максвелловских распределений с температурами  $T_k$  и  $T_i$  мало отличается от интеграла столкновений от двух максвелловских распределений с температурами  $T_{k+1}$  и  $T_i$ , если  $|T_{k+1} - T_k| / |T_k - T_i| \ll 1$

Теперь перейдем к решению следующей задачи<sup>1</sup>. Пусть в начальный момент функция распределения имеет вид

$$\varphi(x, 0) = c_1 \delta(x - x_1) + c_2 \delta(x - x_2) \quad (c_1 + c_2 = 1)$$

Будем следить за ее изменением во времени. Все значения температур отнесем к наибольшей из первоначальных. Тогда по свойству ядра функция распределения  $\varphi(T)$  не равна нулю только в промежутке  $0 < T \leq 1$ . Этот промежуток разделим на  $N$  равных частей так, что

$$T_k = 1 - \frac{k}{N}, \quad T_l = 1 - \frac{l + H_1}{N}, \quad T_p = 1 - \frac{p + H_1}{N} \quad (0 < H_1 < 1)$$

По методу Эйлера из (3.6) имеем

$$a_k(t + \Delta t) = a_k(t) + \sum_{l,p} A_{k,l,p} a_l(t) a_p(t) \Delta t$$

В начальный момент

$$a_k(0) = c_1 \delta_{k,0} + c_2 \delta_{k,b} \quad (T_0 = 1, T_b = 1 - b/N)$$

Здесь  $T_0$  и  $T_b$  — начальные температуры. При  $t \rightarrow \infty$  в газе должна установиться температура  $\langle T \rangle = c_1 T_0 + c_2 T_b$ . Из закона сохранения энергии следует, что в любой момент времени

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle T \rangle$$

Величина  $H_1$  подбирается таким образом, чтобы на каждом шаге по времени приближенное равенство

$$\sum_k a_k(t) T_k \approx \langle T \rangle$$

было выполнено с достаточной степенью точности. Кроме того, введем дисперсию  $D$  по формуле

$$D = \left( \sum_k (T_k - \langle T \rangle)^2 a_k \right)^{1/2}$$

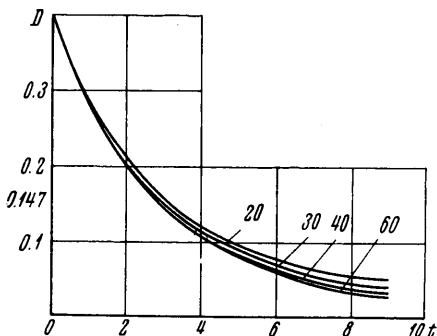
Убывание дисперсии должно показывать скорость эволюции системы к равновесию. За время релаксации  $\tau$  примем время, в течение которого величина дисперсии  $D$  уменьшилась в  $e$  раз.

Счет проводился на БЭСМ-4. Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  выбирались равными, т. е.  $c_1 = c_2 = 0.5$ . Начальное отношение температур  $T_0 / T_b = 5$ . Для данного конкретного случая  $\langle T \rangle = 0.6$ , начальная дисперсия  $D_0 = 0.4$ ,  $H_1$

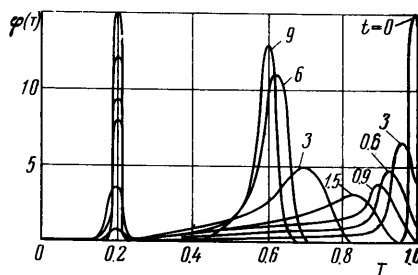
<sup>1</sup> Аналогичная задача при прямом интегрировании уравнения Больцмана решалась численно в работе [5].

изменялась от 0.695 до 0.7. При этом на каждом шаге по времени  $\langle T \rangle$  с точностью до четвертого знака совпадала с 0.6. Число точек дробления по температуре варьировалось от  $N=10$  до  $N=60$ . Шаг по времени  $h$  варьировался от 0.1 до 0.5.

На фиг. 1 приведена зависимость дисперсии  $D$  от времени при  $N=20, 40$  и  $60$ . Время релаксации оказалось равным  $\tau=3.2$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

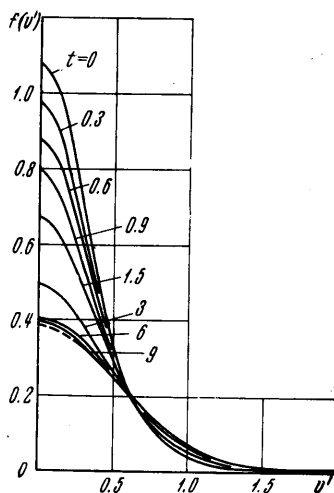
На фиг. 2 изображена функция распределения  $\varphi(T)$  при  $N=30$ . Разные кривые соответствуют разным моментам времени. В начальный момент вся функция распределения была сосредоточена в двух точках  $T=0.2$  и  $T=1$ . Затем наблюдается на каждом последующем шаге уменьшение пика в точке  $T=0.2$  и отход максимума от единицы. Примерно за три столкновения максимум в точке  $T=0.2$  исчезает, а экстремальная точка справа подходит к точке  $\langle T \rangle$ .

Таким образом, можно представить себе следующую картину релаксации: холодные частицы либо еще не успели столкнуться, либо сразу приобретают самую горячую для данного момента времени температуру, а горячие частицы релаксируют с максвелловской функцией распределения, температура которой уменьшается до  $\langle T \rangle$ . Это представление носит приближенный характер.

Начиная примерно с 15-го шага по времени, кривая  $\varphi(T)$  имеет уже настолько узкий максимум, что для изучения дальнейшей релаксации нужно промежуток, где  $\varphi(T)$  отлична от нуля, дробить значительно мельче.

На фиг. 3 изображена функция распределения  $f'(v')$  в разные моменты времени

$$v' = \sqrt{\alpha_0} v, \quad f'(v') = f(v) / \alpha_0^{3/2}$$



Фиг. 3

Пунктирная кривая — равновесная функция распределения.

Здесь следует отметить, что  $f(v)$  становится практически нечувствительной к дальнейшему дроблению уже при  $N=20$ . Говоря точнее, значения  $f(v)$  в соответствующих точках при  $N=20$  и  $N=30$  отличаются одно от другого только в третьей — четвертой значащих цифрах. После численного исследования можно сказать, что для построения  $f(v, t)$  на одном

шаге по времени с точностью до третьей — четвертой значащих цифр требуется примерно 20 сек на БЭСМ-4, и для изучения полной эволюции системы — 10 мин. Указанная точность при минимальных затратах времени выгодно отличает предлагаемый метод от других численных методов решения уравнения Больцмана. Это связано с тем, что значительная часть расчета (вычисление ядра) проводится аналитически, и поэтому счет столкновительного члена значительно упрощается.

В заключение отметим, что то или иное представление функции распределения как набора максвелловских распределений известно в литературе [6, 7]. Однако в наиболее общем виде [7] такое разложение осуществлялось по конечному числу максвелловских распределений с неопределенными весами, температурами и средними скоростями. Для определения этих параметров выписывалось соответствующее число моментных уравнений. При этом задача оказывается не унифицированной, и подключение новых моментных уравнений связано с дополнительными достаточно громоздкими вычислениями. В рамках такого метода довольно трудным является вопрос об исследовании точности полученного решения. В данной работе рассматривается существенно иной подход: наряду с функцией распределения по максвелловским распределениям разлагается интеграл столкновений.

Аналогичное переразложение интеграла столкновений принципиально можно осуществить и в более общей задаче, когда функция распределения разлагается по максвелловским распределениям с произвольными не только температурами, но и средними скоростями.

Авторы благодарят С. В. Валландера и А. З. Долгинова за обсуждение работы.

Поступило 20 X 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Г. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Grad H. Note on N-dimensional hermite polynomials. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1949, vol. 2, No. 4.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
4. Эндер А. Я. Свойства симметрии и больцмановское распределение. *Вестн. ЛГУ*, 1966, вып. 4, № 19.
5. Рыков В. А. Релаксация газа, описываемого кинетическим уравнением Больцмана. *ПММ*, 1967, т. 31, вып. 4.
6. Mott-Smith H. The solution of the Boltzmann equation for a shock wave. *Phys. Rev.*, 1951, vol. 82, No. 6.
7. Weitzsch F. A new method for the treatment of gas dynamics problems for cases of large deviation from the thermodynamical equilibrium (in German). *Ann. Physik*, 1961, Bd 7, Nr 7/8, S. 403—417.