

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ СМЕСИ ГАЗА И ЧАСТИЦ

Р. А. ТКАЛЕНКО

(Москва)

Сверхзвуковое течение двухфазной среды, как правило, сопровождается релаксационными процессами, связанными с температурным отставанием и динамическим скольжением инородных частиц относительно газа. Первый из них по своему воздействию на поток качественно похож на процессы, обусловленные нарушением термодинамического равновесия в газах (колебательная релаксация, диссоциации и т. д.). Второй (динамическое скольжение) имеет свои специфические особенности, так как сопровождается обменом между газом и частицами не только энергией, но и количеством движения.

В рамках линейной теории, предложенной в работе [1], на основе модификации выводится уравнение в частных производных относительно потенциала возмущения, описывающее слабо возмущенные двухфазные сверхзвуковые плоские и осесимметричные течения. Применение преобразования Лапласа позволяет получить общее решение этого уравнения. Переход в плоскость оригиналов осуществляется во всей области течения около тонких плоских и осесимметричных тел, причем в рамках данной теории вблизи точек излома контура получаются или волны разрежения, или слабые ударные волны, форма которых находится.

1. Рассмотрим стационарное плоское или осесимметричное установившееся течение двухскоростной сплошной среды. Пусть x и y — прямоугольные координаты (в осесимметричном случае они лежат в меридиональной плоскости и ось x направлена вдоль оси симметрии), u и v — проекции вектора скорости на эти оси, p — давление, T — температура, ρ — плотность. Частицам будем приписывать верхний индекс градуса, занимаемым ими объемом пренебрежем.

Система уравнений, описывающая такое течение [2], при сверхзвуковых скоростях $w^2 = u^2 + v^2 > c^2$, где c — скорость звука в чистом газе, имеет три семейства действительных характеристик (два семейства линий Маха и линии тока газа).

Примем за независимые переменные одну из характеристических переменных ξ и величину ζ

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{uv \pm c \sqrt{w^2 - c^2}}{u^2 - c^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{\pm} = y^{\circ} \rho. \quad (1.1)$$

Здесь верхний (нижний) знак соответствует характеристикам первого (второго) семейства, на которых $\xi = \text{const}$, а ψ — функция тока газа, определяемая уравнением

$$d\psi = y^{\circ} \rho (u dy - v dx)$$

$v = 0$ или 1 в плоском и осесимметричном случаях соответственно.

Зависимыми переменными будем считать следующие:

$$W = w^2 / 2, \quad V = v / u, \quad P = \ln p, \quad R = \ln \rho$$

Уравнения сохранения для газа в принятых переменных запишутся

$$W_i + \frac{p}{\rho} P_i + \left(W_i + \frac{p}{\rho} P_i \right) C = - \frac{\rho^0 a}{\rho u} [2W - uu^0(1 + VV^0)] X$$

$$V_i \mp \frac{Bp}{\rho u^2} \left(P_i \mp 2 \frac{W}{Bu} X P_i \right) + \left(V_i \mp \frac{Bp}{\rho u^2} P_i \right) C = \frac{\rho^0 u^0}{\rho u^2} a (V^0 - V) X \quad (1.2)$$

$$u^2 V_i \pm \frac{Bp}{\rho} P_i + u \left(v \frac{V}{y} + Q \right) = 0$$

$$H_i + CH_i = - \frac{\rho^0 q}{\rho u} X (T - T^0) - \frac{\rho^0 a}{\rho u} [uu^0(1 + VV^0) - 2W^0]$$

$$p = R_0 \rho T$$

$$\Omega_i = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right)_i, \quad \Omega_i = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right)_i, \quad C = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right)_i, \quad B^2 = 2 \frac{W}{c^2} - 1$$

$$H = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_0 T + W, \quad X = x_i + C x_i$$

Здесь Ω — произвольный параметр, R_0 — газовая постоянная, κ — показатель адиабаты газа.

Уравнения сохранения для «газа частиц» имеют следующий вид:

$$D[u^0] = a(u - u^0)X, \quad D[v^0] = a(uV - u^0V^0)X$$

$$D[e^0] = q(T - T^0)X, \quad e^0 = \delta T^0 \quad (1.3)$$

$$D[\rho^0] = -\rho^0 u X V_i^0 - v y^{-1} \rho^0 u^0 X V^0 + \rho^0 u X V u_i^0 +$$

$$+ \frac{\rho^0 u^2 - c^2}{c^2 V \pm B} (V_i^0 + C V_i^0) - \rho^0 \left(1 + \frac{1}{c^2} \frac{u^2 - c^2}{V \pm B} \right) (u_i^0 + C u_i^0)$$

Оператор $D[\Omega]$ и функция Q , входящая в третье уравнение системы (1.2), определяются так:

$$D[\Omega] = u^0 \left(1 - \frac{V^0 - V u^2 - c^2}{V \pm B} \frac{X}{c^2} \right) (\Omega_i + C \Omega_i) + uu^0 (V^0 - V) X \Omega_i$$

$$Q = B \frac{\rho^0 B \mp V}{\rho} \frac{a(u - u^0)}{2W} \pm B \frac{\rho^0 B V \pm 1}{\rho} \frac{a(v - v^0)}{2W} -$$

$$- \frac{\rho^0}{\rho u^2} \left\{ \frac{au}{c^2} (u - u^0) + \frac{av}{c^2} (v - v^0) - \right.$$

$$\left. - \frac{\kappa - 1}{\kappa R_0 T} [q(T - T^0) - a(u - u^0)^2 - a(v - v^0)^2] \right\}$$

Запишем уравнения для определения функции тока частиц и координат

$$\psi_i^0 = y^0 \rho^0 \frac{uu^0}{2W} [1 + VV^0 \pm B(V - V^0)] \quad (1.4)$$

$$x_i = \frac{u^2 - c^2}{c^2 u (V \pm B)}, \quad y_i = \frac{u^2 V \pm c^2 B}{c^2 u^2 (V \pm B)} \quad (1.5)$$

Все величины в уравнениях (1.1) — (1.5) удобно считать безразмерными. Припишем индекс ∞ параметрам набегающего потока. Приведение к безразмерному виду достигается отнесением координат к характерному размеру l , скоростей — к w_∞ , плотностей — к ρ_∞ , давления — к $\rho_\infty w_\infty^2$, температуры — к $w_\infty^2 R_0^{-1}$ и т. д.

Уравнения (1.1) — (1.5) следует дополнить соотношениями на поверхностях разрыва. Пусть λ — угол наклона поверхности разрыва к оси x , тогда они имеют вид

$$\begin{aligned} [\rho w \sin(\lambda - \Theta)] &= 0, & [w \cos(\lambda - \Theta)] &= 0 \\ [p + \rho w^2 \sin^2(\lambda - \Theta)] &= 0, & [\kappa(\kappa - 1)^{-1} R_0 T + W] &= 0 \\ [\Omega^\circ] &= 0, & \Theta &= \arctg V \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $[\Omega^\circ]$ — разность произвольного параметра частиц на разрыве.

В дальнейшем по аналогии с релаксационными процессами, связанными с нарушением статистического равновесия в газах, удобно называть течения, в которых нет запаздывания частиц по скоростям и температурам, равновесными, а при отсутствии взаимодействия между частицами и газом — замороженными. Естественно, возможна ситуация, когда только один релаксационный процесс заморожен или протекает равновесно.

2. Рассмотрим слабозмущенное сверхзвуковое течение вдоль оси x слева направо, причем при $x < 0$ источники возмущения отсутствуют и поток находится в равновесном состоянии. Представим параметры газа и частиц в виде суммы их невозмущенных значений и малых добавок, сохранив для последних те же обозначения. Подставим эти разложения в уравнения (1.2), (1.3) и, пренебрегая квадратами и более высокими степенями добавок, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} W_i + \beta_1 P_i + \beta_2 (W - W^\circ) &= 0 \\ V_i \mp B_\infty \beta_1 P_i + \beta_1 x_i P_i + \beta_2 (V - V^\circ) x_i &= 0 \\ V_i \pm B_\infty \beta_1 P_i + v \zeta^{-1} V \pm B_\infty \beta_2 (V - V^\circ) - \beta_2 (W - W^\circ) + \beta_3 (T - T^\circ) &= 0 \\ \beta_1 T_i + W_i + \beta_2 (W - W^\circ) x_i + \beta_3 (T - T^\circ) x_i &= 0 \\ W_i^\circ = a(W - W^\circ) x_i, & V_i^\circ = a(V - V^\circ) x_i \\ T_i^\circ = \beta_3 (T - T^\circ) x_i, & P = R + \beta_1^{-1} T \\ R_i^\circ + W_i^\circ + x_i V_i^\circ \mp B_\infty V_i^\circ + v \zeta^{-1} V^\circ x_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Коэффициенты β_k вычисляются по параметрам невозмущенного потока

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{\kappa M_\infty^2}, & \beta_2 &= \frac{1-m}{m} a, & \beta_3 &= (\kappa - 1) M_\infty^2 \frac{1-m}{m} q \\ \beta_4 &= \frac{\kappa}{\kappa - 1}, & \beta_5 &= \frac{1-m}{m} q, & \beta_6 &= \frac{q}{\delta}, & m &= \frac{1}{1 + \rho_\infty^\circ} \end{aligned}$$

(М — число Маха)

Линеаризация соотношений для координат (1.5) дает

$$\begin{aligned} x_i &= \pm B_\infty - V \pm B_\infty^{-1} W \mp \frac{1}{2} M_\infty^2 B_\infty^{-1} (P - R) \\ y_i &= 1 - W \pm B_\infty V \end{aligned} \quad (2.2)$$

При малых возмущениях в потоке возможны слабые скачки уплотнения, поэтому подвергнем линеаризации соотношения на поверхностях раз-

рыва (1.6). При уменьшении интенсивности возмущения до нуля наклон ударной волны стремится к наклону характеристик в набегающем потоке, $\operatorname{tg} \lambda_{\infty} = \pm B_{\infty}^{-1}$. Имеем с точностью до членов второго порядка

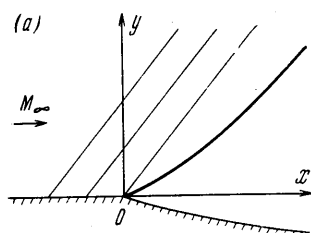
$$\begin{aligned} [V] \pm B_{\infty}[W] &= 0, & \beta_1[P] + [W] &= 0 \\ [R] + M_{\infty}^2[W] &= 0, & \beta_1[T] + [W] &= 0 \\ [W^{\circ}] &= [V^{\circ}] = [R^{\circ}] = [T^{\circ}] = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из первых четырех уравнений можно определить все параметры газа за ударной волной, если известен один из них. Зависимость давления (или какой-либо другой величины) от наклона ударной волны получается из (1.6). Результат следующий:

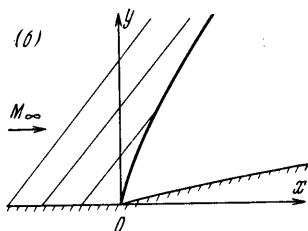
$$[P] = \frac{4\kappa}{\kappa + 1} B_{\infty} \lambda \quad (2.4)$$

где λ — угол отклонения ударной волны от направления характеристик невозмущенного потока.

Рассмотрим неравновесное течение в волне разрежения, образующейся при наличии на обтекаемом контуре точки излома. Выберем в качестве ξ тангенс угла наклона вектора скорости к оси x в точке излома, тогда все производные по ξ от параметров потока будут иметь порядок $O(1)$, в то время как производные по ζ будут малыми первого порядка $[^1]$. Система (2.1) сводится к следующей:



$$\begin{aligned} \beta_1 P + W &= 0, & \beta_1 T + W &= 0 \\ V \pm B_{\infty} W &= 0, & R + M_{\infty}^2 W &= 0 \\ W^{\circ} &= V^{\circ} = R^{\circ} = T^{\circ} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$



Фиг. 1

Для определения возмущения давления служит уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta} \left(\frac{\nu}{2\zeta} \pm k \right) \frac{\partial P}{\partial \xi} &= 0, \\ k &= \frac{1-m}{2m} \frac{M_{\infty}^2}{B_{\infty}} \left[a_1 + \frac{(\kappa-1)^2}{\kappa} q \right] \end{aligned}$$

которое легко интегрируется. Например, при обтекании плоской стенки ($\nu=0$) с изломом в начале координат (фиг. 1, а) можно записать

$$\begin{aligned} P &= \kappa M_{\infty}^2 B_{\infty}^{-1} \xi e^{-k\xi} \\ x &= \gamma \xi k^{-1} (1 - e^{-k\xi}), \quad \gamma = M_{\infty}^2 B_{\infty}^{-2} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{\infty}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Второе соотношение является уравнением пучка характеристик.

Интересно отметить, что условия (2.3) на поверхностях разрыва и по обеим сторонам волн разрежения (2.5) для слабо возмущенных потоков совпадают.

В области течения вне пучков характеристик в качестве ξ удобно принять расстояние от некоторой точки (излома или начала координат) вдоль

оси x . Тогда в уравнениях (2.1), (2.2) можно положить $x_i \equiv 1$. Из (2.1) сразу получаются два интеграла

$$\begin{aligned} W + \beta_i P + \frac{1-m}{m} W^\circ &= 0 \\ \beta_i T + W + \frac{1-m}{m} (W^\circ + \delta T^\circ) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Константы, которые должны стоять в правых частях этих уравнений, равны нулю в силу (2.3) или (2.5).

Из второго и шестого уравнения (2.1) и (2.7) следует условие существования потенциала скоростей для газа Φ и частиц Φ°

$$\begin{aligned} W &= \Phi_i, & V &= \Phi_i \mp B_\infty \Phi_i \\ W^\circ &= \Phi_i^\circ, & V^\circ &= \Phi_i^\circ \mp B_\infty \Phi_i^\circ \end{aligned} \quad (2.8)$$

Систему (2.1) можно свести к одному уравнению для определения потенциала возмущения. Пусть τ_1 и τ_2 — характерные времена релаксации рассматриваемых процессов, M_∞ — равновесное число Маха

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{a}, \quad \tau_2 = \frac{1}{b} = \frac{\kappa}{\kappa_0} \frac{\kappa_0 - 1}{\kappa - 1} \frac{\delta}{q}, \quad M_\infty = M_1 M_2 M_\infty^{-1} \\ M_1^2 &= \frac{1}{m} M_\infty^2, \quad M_2^2 = \frac{\kappa}{\kappa_0} M_\infty^2, \quad \frac{\kappa_0}{\kappa_0 - 1} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{1-m}{m} \delta \end{aligned}$$

Тогда уравнение для потенциала возмущения запишется

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi^2} + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} + \frac{\Delta}{\tau_1 \tau_2} + E_1 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + E_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta &= \pm 2B_\infty \Phi_{it} - \Phi_{it} - v_\xi^{-1} (\Phi_i \mp B_\infty \Phi_i) \\ E_1 &= \frac{B_1^2 - B_\infty^2}{\tau_1} + \frac{B_2^2 - B_\infty^2}{\tau_2}, \quad E_2 = \frac{B_e^2 - B_\infty^2}{\tau_1 \tau_2} \end{aligned}$$

Легко видеть, что производные по ξ входят в уравнение (2.9) только через параметр Δ . Это позволяет при помощи преобразования Лапласа

$$\Phi(s, \xi) = L[\Phi(\xi, \zeta)] = \int_0^\infty e^{-s\xi} \Phi(\xi, \zeta) d\xi$$

свести его к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (штрихом отмечены производные по ξ)

$$\Phi'' + (v_\xi^{-1} \mp 2sB_\infty) \Phi' - sB_\infty [\pm v_\xi^{-1} + sB_\infty (\sigma^2 - 1)] \Phi = 0 \quad (2.10)$$

Здесь $\sigma^2(s)$ — отношение полиномов второй степени относительно s с коэффициентами, зависящими от τ_1, τ_2, M_1, M_2 и M_∞ .

Следует отметить, что при применении преобразования Лапласа к (2.9) в силу его специфики появляются выражения, содержащие значения производных первого, второго и третьего порядков от Φ при $\xi = 0$. Однако в силу условий (2.3) и (2.5) они взаимно сокращаются.

Общее решение уравнения (2.10) имеет вид

$$\Phi(s, \zeta) = \zeta^{(1-\nu)/2} e^{\pm s B_\infty \zeta} [A(s) K_{(1-\nu)/2}(s \sigma B_\infty \zeta) + A_1(s) I_{(1-\nu)/2}(s \sigma B_\infty \zeta)] \quad (2.11)$$

где $A(s)$ и $A_1(s)$ — произвольные функции, $K_\nu(z)$ — функция Макдональда, а $I_\nu(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента порядка ν .

После того как решение для Φ найдено, остальные параметры потока определяются по формулам

$$\begin{aligned} \Phi^\circ &= \frac{a\Phi}{s+a} & L[P] &= -\kappa M_\infty^2 \frac{s+a/m}{s+a} s\Phi \\ L[R] &= -M_\infty^2 \frac{s+a/m}{s+a} \frac{s+\kappa b/\kappa_0}{s+b} s\Phi \end{aligned} \quad (2.12)$$

3. В качестве примера рассмотрим обтекание плоской стенки ($\nu=0$) при наличии только динамического скольжения ($\tau_2 \rightarrow \infty$)¹. Будем считать, что плотность газа частиц в набегающем потоке мала, тогда

$$\sigma \approx 1 + \frac{\alpha a}{s+a} + O(a^2), \quad \alpha = \frac{1-m}{2m} M_\infty^2 B_\infty^{-2} \quad (3.1)$$

При течении около стенки (фиг. 1) должно быть выполнено два граничных условия

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \zeta) &\text{ ограничено при } \zeta \rightarrow \infty \\ V(\xi, 0) &= Y(\xi) = df/d\xi \end{aligned}$$

где $y=f(\xi)$ — уравнение контура тела. При помощи этих условий из (2.11) получаем

$$A(s) = -B_\infty^{-1} L[Y(\xi)], \quad A_1(s) = 0$$

причем само решение (2.11) запишется

$$\Phi = \frac{A(s)}{s} \frac{s+a(1-\alpha)}{s+a} \exp\left(-B_\infty \zeta \frac{s\alpha a}{s+a}\right) \quad (3.2)$$

Если ввести обозначение

$$F(\xi) = -B_\infty^{-1} Y(\xi) - \alpha B_\infty^{-1} (1-\alpha) f(\xi)$$

то результат применения обратного преобразования Лапласа к (3.2) дает

$$\varphi(\xi, \zeta) = e^{-\alpha a B_\infty \zeta} \int_0^\xi F(\xi-t) e^{-at} I_0(2a \sqrt{\alpha B_\infty \zeta t}) dt \quad (3.3)$$

Формула (3.3) представляет собой решение поставленной задачи для потенциала скорости во всей области течения. Для потенциала частиц $\Phi^\circ(\xi, \zeta)$ получается такое же выражение, только вместо F стоит функция

$$F^\circ(\xi) = -\alpha B_\infty^{-1} Y(\xi) + a^2 \alpha B_\infty^{-1} \int_0^\xi Y(\xi-t) e^{-at} dt$$

¹ Подобная задача при прямолинейной линии раздела рассматривалась в работе [3].

Рассмотрим течение около выпуклой стенки (фиг. 1, а). Если точка O — точка излома, то вблизи нее образуется волна разрежения, решение в которой дается формулами (2.5) и (2.6). В этом случае все параметры потока на замыкающей характеристике пучка совпадают с их значениями на характеристике $\xi = 0$ для течения справа от точки излома. Если излом контура отсутствует, $Y(0) = 0$, то $\xi = 0$ совпадает с характеристикой невозмущенного потока, выходящей из точки O .

При обтекании выпуклой стенки двухфазным потоком вблизи нее образуется слой чистого газа [4]. Линия тока частиц $\psi^0 = 0$, выходящая из точки O , будет лежать выше линии тока газа $\psi = 0$, выходящей из той же точки. Уравнение линий тока газа можно получить, линеаризуя (1.4). После соответствующих выкладок с учетом (3.3) найдем

$$\psi^0 = \psi + e^{-a\alpha B_\infty} \int_0^\xi Y(\xi - t) e^{-at} I_0(2a \sqrt{aB_\infty \psi t}) dt \quad (3.4)$$

Линия раздела определяется условием $\psi^0 = 0$. Предположим, что стенка плоская $Y(\xi) = Y_0 < 0$, тогда при $\xi \rightarrow \infty$ из (3.4) получим $\psi^0 \sim \psi + a^{-1}Y_0$. Таким образом, на больших расстояниях от точки излома вниз по потоку линия раздела совпадает с линией тока газа

$$\psi = a^{-1}Y_0$$

В области между линией раздела и стенкой течение подчиняется уравнениям (2.1), если положить $m = 1$. Граничными условиями служат условие непротекания на стенке и непрерывность всех параметров газа при переходе через линию раздела.

Оценивая интеграл (3.3) методом Лапласа [5], можно получить решение между начальной характеристикой $\xi = 0$ (замыкающей характеристикой пучка в случае наличия точки излома) и начальной равновесной линией Маха. При условиях

$$a\zeta \gg 1, \quad a\eta \ll 1, \quad \eta = \xi - aB_\infty \zeta$$

это решение получается в таком виде:

$$W \sim a^{-1}F'(\eta) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{a}{aB_\infty \zeta}} \right) \right] \quad (3.5)$$

где $\operatorname{erf}(z)$ — интеграл ошибок. Подобный результат для идеального диссоциирующего газа был получен Кларком [6], однако в силу правильного выбора переменных (3.5) является более точным.

Рассмотрим течение около вогнутой стенки (фиг. 1, б). Общее решение поставленной задачи дается формулой (3.3). В обычной линейной теории линией раздела между невозмущенным и возмущенным течениями служит характеристика набегающего потока, выходящая из точки O . В действительности такой линией является слабая ударная волна, которая делит пополам угол между двумя пересекающимися характеристиками одного семейства. Запишем уравнение ударной волны в виде

$$x = B_\infty \zeta - G(\zeta) \quad (3.6)$$

тогда наклон ее равен

$$G'(\xi) = -1/4 B_{\infty}^{-1} (2W - 2B_{\infty}V - M_{\infty}^2 P + M_{\infty}^2 R)$$

Используя равенства (2.8) и (2.12), после несложных выкладок получаем

$$G'(\xi) = \Psi(\xi), \quad G(\xi) = -\xi + 2\xi\Psi(\xi)$$

$$\Psi(\xi) = \frac{\gamma}{2} \left[Y(\xi) - \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \int_0^{\xi} Y(\xi - t) e^{-at} dt \right] \quad (3.7)$$

Здесь ξ рассматривается как параметр, γ та же, что и в (2.6), а

$$\gamma_1 = 1 + B_{\infty}^{-1} B_1^{-1} + 1/2 (\kappa - 1) M_{\infty}^2 M_1^2 B_{\infty}^{-1} B_1^{-1}$$

Вместе с (3.6) эти соотношения определяют ударную волну.

Если продифференцировать второе уравнение (3.7) и подставить его в первое, то получим дифференциальное уравнение для определения $\zeta(\xi)$ вдоль ударной волны, которое имеет решение

$$\zeta(\xi) = -\Psi^{-2} \int_0^{\xi} \Psi(t) dt$$

Следует отметить, что (3.6) и (3.7) дают уравнение ударной волны и в том случае, когда обтекается вогнутая стенка без точек излома.

При течении около клина $G'(0) = \gamma Y_0 / 2$, т. е. вблизи вершины наклон ударной волны совпадает с замороженным. На больших расстояниях от клина он стремится к равновесному, $G'(\infty) = \gamma_1 Y_0 / 2$. Так как наклон поверхности разрыва в каждой точке известен, то параметры потока непосредственно за ним определяются по формулам (2.3), (2.4), причем $\lambda = M_{\infty}^{-2} G'(\xi)$.

4. Рассмотрим сверхзвуковое течение двухфазной среды около тонких тел вращения ($\nu = 1$) при наличии только динамического скольжения (фиг. 2). Должны быть выполнены следующие граничные условия:

$$\varphi(\xi, \zeta) \text{ ограничено при } \zeta \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta V(\xi, \zeta) = f(\xi)$$

При помощи этих условий из (2.13) находим

$$A(s) = -L[f(\xi)], \quad A_1(s) = 0 \quad (4.1)$$

Используя (3.4) и (4.1), получаем решение поставленной задачи

$$\Phi = A(s) e^{sB_{\infty}\zeta} K_0 \left(sB_{\infty}\zeta \frac{s+a+a\alpha}{s+a} \right) \quad (4.2)$$

Для перевода (4.2) в физическую плоскость используем тот факт, что α мало, тогда

$$\Phi_1 \approx A(s) e^{sB_{\infty}\zeta} \left[K_0(sB_{\infty}\zeta) - sB_{\infty}\zeta \frac{a\alpha}{s+a} K_1(sB_{\infty}\zeta) \right] \quad (4.3)$$

Это разложение правильно только вблизи стенки, где второй член в квадратных скобках мал. При $\alpha\zeta = O(1)$ он будет иметь тот же порядок,

что и первый. Для получения решения во всей области течения применим метод сращиваемых асимптотических разложений [7]. С точки зрения этого метода (4.3) является двучленным внутренним разложением. Введем новую переменную $\xi_1 = \alpha \xi$ и снова разложим (4.2) в ряд по степеням α . Результат запишется так:

$$\Phi_2 = A(s) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \frac{a}{s+a} - \frac{1}{8sB_\infty \xi} \right) \exp \left(-sB_\infty \xi \frac{a\alpha}{s+a} \right) \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) представляет собой двучленное внешнее разложение, записанное в старых (внутренних) переменных. Общая часть этих разложений имеет вид

$$\Phi_3 = \frac{A(s)}{(2sB_\infty \xi)^{1/2}} \left[1 - \frac{1}{8sB_\infty \xi} - \frac{\alpha a}{s+a} \left(sB_\infty \xi + \frac{3}{8} \right) \right] \quad (4.5)$$

Соотношения (4.3) — (4.5) при помощи граничного условия (4.1) могут быть в общем случае легко преобразованы в физическую плоскость. Рассмотрим течение около тонкого конуса с полууглом при вершине Θ , тогда [8]

$$f(\xi) = \Theta^2 \xi, \quad f'(\xi) = \Theta^2, \quad A(s) = -\Theta^2 s^{-2}$$

Результат приводится для скорости

$$W_1 = -\Theta^2 \text{Arch} \left(1 + \frac{\xi}{B_\infty \xi} \right) + \alpha \Theta^2 \int_0^\xi \frac{(1 - e^{-\alpha t + at})(t + B_\infty \xi)}{\sqrt{t^2 + 2tB_\infty \xi}} dt$$

$$W_2 = e^{-\alpha B_\infty \xi} \int_0^\xi F_1(\xi - t) e^{-at} I_0(2a \sqrt{aB_\infty \xi t}) dt$$

$$F_1(z) = \frac{\Theta^2}{(2B_\infty \xi z)^{1/2}} \left[1 + 2 \left(a - \frac{\alpha a}{2} - \frac{1}{8B_\infty \xi} \right) z - \frac{a}{6B_\infty \xi} z^2 \right]$$

$$W_3 = \frac{\Theta^2 \xi^{1/2}}{(2B_\infty \xi)^{1/2}} \left[2 \left(1 - \frac{3\alpha}{8} \right) - \frac{\xi}{6B_\infty \xi} - \right. \\ \left. - \alpha \left(aB_\infty \xi - \frac{3}{8} \right) \pi^{1/2} \frac{e^{-at} \text{erf}(i \sqrt{a \xi})}{i \sqrt{a \xi}} \right]$$

где $i^2 = -1$.

Для получения равномерно пригодного решения во всей области течения можно применить аддитивное составление

$$W(\xi, \zeta) = W_1(\xi, \zeta) + W_2(\xi, \zeta) - W_3(\xi, \zeta)$$

Уравнение характеристик в возмущенной области можно упростить, если разложить все члены, входящие в (2.2), при больших $B_\infty \xi \xi^{-1}$. Используя (4.2), после несложных выкладок приходим к результату

$$x = B_\infty \xi + \xi - \Psi_1(\xi) \xi^{1/2}$$

где

$$\Psi_1(\xi) = \gamma (2B_\infty)^{1/2} \int_0^\xi \frac{f'(\xi - t)}{\sqrt{t}} \times \\ \times \left[1 - i \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} \sqrt{\frac{B_1}{B_\infty}} - 1 \right) (at)^{1/2} e^{-at} \text{erf}(i \sqrt{at}) \right] dt$$

При $a=0$ функция $\Psi_1(\xi)$ совпадает с точностью до постоянного множителя с результатом, полученным в работе [9] для обтекания сверхзвуковым потоком совершенного газа тонких тел вращения.

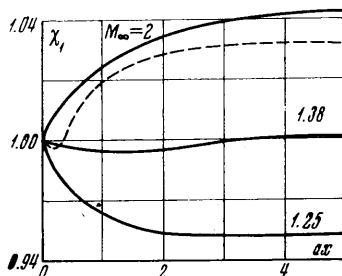
Представим уравнение ударной волны в форме (3.6), тогда зависимость $G(\xi)$ запишется в параметрическом виде

$$G'(\xi) = \frac{1}{4} \xi^{-1/2} \Psi_1(\xi), \quad G(\xi) = -\xi + \xi^{1/2} \Psi_1(\xi)$$

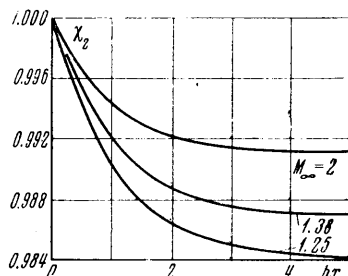
Как и в плоском случае, находим $\zeta(\xi)$ вдоль ударной волны

$$\zeta^{1/2} = \frac{2}{\Psi_1^2} \int_0^{\xi} \Psi_1(t) dt$$

При рассмотрении течения около конуса или выпуклой стенки предполагалось, что частицы свободно проходят через поверхность. В действительности они осаждаются на обтекаемых телах, образуя тонкий слой, который движется, увлекаемый газом. Если его учесть, то граничные условия для газа следует задавать не на стенке, а на верхней границе этого слоя. Однако не все частицы попадут на стенку. Существует предельная линия тока частиц, выше которой этого не произойдет. Для клина ее можно определить из уравнения (3.4).



Фиг. 3



Фиг. 4

5. Рассмотрим изменение возмущенной скорости и давления вдоль поверхности тонкого клина. Из уравнений (2.12) и (3.2) имеем

$$L[W] = -\frac{Y_0}{sB_\infty} \left(\frac{s+a}{s+a'} \frac{s+b}{s+b'} \right)^{1/2}, \quad a' \approx aB_1^2 B_\infty^{-1}, \quad b' \approx bB_2^2 B_\infty^{-1} \quad (5.1)$$

$$L[P] = \frac{\kappa M_\infty^2}{B_\infty} \frac{Y_0}{s} \frac{s+a/m}{s+a} \left(\frac{s+a}{s+a'} \frac{s+b}{s+b'} \right)^{1/2} \quad (5.2)$$

Формула (5.1) показывает, что поток вдоль стенки будет монотонно ускоряться независимо от того, протекают ли оба релаксационных процесса по-отдельности или одновременно. Этого нельзя сказать о давлении. Согласно (5.2) давление возмущения меняется от значения на передней кромке непосредственно за ударной волной $P_0 = \kappa M_\infty^2 Y_0 / B_\infty$ до значения $P_\infty = \kappa M_1^2 Y_0 / B_1$ далеко вниз по потоку. Имеют место условия

$$P_0 \geq P_\infty \quad \text{при} \quad M_\infty^2 \geq \kappa_0 \frac{1-m^2}{\kappa_0 - m\kappa}$$

Таким образом, равновесное значение давления возмущения может быть больше, меньше или равно замороженному.

На фиг. 3 сплошными линиями приводится зависимость отношения коэффициента давления на клине в случае только динамического скольжения ($b=0$) к коэффициенту давления при замороженном течении

$$\chi_1 = \frac{c_p}{c_{p0}}, \quad c_p = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty w_\infty^2} = \frac{2}{\kappa M_\infty^2} (e^p - 1)$$

от ax при различных числах Маха набегающего потока для воздуха ($\kappa = 1.4$, $m = 0.9$, $Y_0 = 0.1$). Как видно из графика, в зоне релаксации возможно прохождение кривых через минимум.

На фиг. 4 приводится такая же зависимость $\chi_2 = \chi_2(bx)$ для температурного отставания. Выравнивание температур приводит к монотонному изменению давления независимо от скорости набегающего потока. Взаимное влияние обоих релаксационных процессов иллюстрируется пунктирной линией на фиг. 3 при условии $b = 100a$ и $M_\infty = 2$.

Поступило 26 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Ткаленко Р. А. К построению линейной теории неравновесных и равновесных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6, стр. 26—33.
2. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми и жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 418—429.
3. Рахматуллин Х. А., Мамадалиев Н. А. Двухскоростная теория обтекания тонкого профиля. ПМТФ, 1969, № 4, стр. 32—35.
4. Клигель Д., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле. Сб. статей «Детонация и двухфазное течение», М., «Мир», 1966.
5. Де Брейн Н. Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. Кларк Д., Макчесни М. Динамика реальных газов. М., «Мир», 1967.
7. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
8. Ткаленко Р. А. Сверхзвуковое неравновесное течение газа около тонких тел вращения. ПМТФ, 1964, № 2, стр. 132—138.
9. Whitam G. The flow pattern of a supersonic projectile. Commun Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 3.