

О ВИХРЕВОМ СЛОЕ НА КРУГОВОМ КОНУСЕ

Б. М. БУЛАХ

(Ленинград)

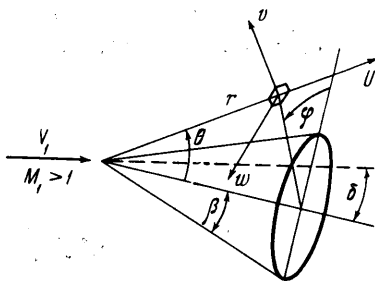
Задача о вихревом слое, возникающем вблизи поверхности кругового конуса при несимметричном стационарном обтекании его однородным сверхзвуковым потоком невязкого газа, рассматривалась во многих работах (см., например, [1]). Однако в этих работах угол атаки α считался «малым» (поскольку решение задачи искалось в виде того или иного разложения по степеням α).

В данной работе определяются главные члены газодинамических параметров вблизи поверхности конуса при любом значении угла атаки.

1. Рассмотрим стационарное обтекание кругового конуса с полураствором β однородным сверхзвуковым потоком газа под углом атаки α в сферической системе координат $r\theta\varphi$ с осью, совпадающей с осью симметрии конуса (фигура). Обозначим через u, v, w компоненты вектора скорости частиц газа в направлении увеличения соответственно r, θ, φ через p, ρ — давление, плотность. Выражение для удельной энтропии S имеет вид

$$S = c_v \ln(p / \rho^\gamma) + S_0$$

Здесь c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, γ — адиабатический индекс, S_0 — начальное значение S . Задачу рассматриваем в рамках теории конических течений, когда u, v, w, p, ρ не зависят от r . Уравнения неразрывности, количества движения, энергии запишутся в этом случае в виде



$$2\rho u \sin \theta + (\rho v \sin \theta)_\theta + (\rho w)_\varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$vu_\theta + wcsc\theta u_\varphi - v^2 - w^2 = 0 \quad (1.2)$$

$$vv_\theta + wcsc\theta v_\varphi + uv - w^2 \operatorname{ctg} \theta + \rho^{-1} p_\theta = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{V_m^2}{2} \quad (1.4)$$

$$v(p / \rho^\gamma)_\theta + wcsc\theta (p / \rho^\gamma)_\varphi = 0. \quad (1.5)$$

Индексы θ и φ означают производные; V_m — максимальная скорость однородного потока.

2. Будем теперь искать главный член решения системы уравнений (1.1) — (1.5) вблизи поверхности конуса, где $\theta = \beta$. Обозначим значения функции f при $\theta = \beta$ через f^\times , т. е.

$$f^\times = f(\theta, \varphi) |_{\theta=\beta}, \quad f_\theta^\times = f_\theta(\theta, \varphi) |_{\theta=\beta}$$

Из уравнения (1.1) следует, что

$$-v_{\theta}^{\times} = 2u^{\times} + \frac{1}{\rho^{\times} \sin \beta} (\rho^{\times} w^{\times})_{\theta} \quad (2.1)$$

($v^{\times} = 0$, что является условием безотрывного обтекания конуса). Из (1.2) и (1.3) следуют равенства:

$$w^{\times} = \frac{1}{\sin \beta} u_y^{\times}, \quad p_{\theta}^{\times} = \rho^{\times} w^{\times 2} \operatorname{ctg} \beta \quad (2.2)$$

Из формул (2.1), (2.2) вытекает, что u , v , w , p , ρ в окрестности $\theta = \beta$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} u &= u^{\times} + u', & w &= w^{\times} + w', & \rho &= \rho^{\times} + \rho', & v &= \vartheta v_{\theta}^{\times} + v', \\ p &= p^{\times} + p_{\theta}^{\times} \vartheta + p' & (\vartheta &= \theta - \beta) & & & & \\ u', w', \rho' &= o(1); & v', p' &= o(\vartheta) & \text{при } \vartheta \rightarrow 0 & & & \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. После подстановки выражений (2.3) в уравнения (1.1)–(1.4) и пренебрежении в них величинами, имеющими порядки $O(\vartheta)$ и $o(\vartheta)$, получим уравнения для главных членов u' , v' , w' , p' , ρ' в виде (3.1)

$$v_{\theta}^{\times} + 2u' + (2u^{\times} + v_{\theta}^{\times}) \frac{\rho'}{\rho^{\times}} + \frac{v_{\theta}^{\times}}{\rho^{\times}} \vartheta \rho_{\theta}^{\times} + \frac{1}{\sin \beta \rho^{\times}} (\rho^{\times} w' + w^{\times} \rho')_{\theta} = 0$$

$$v_{\theta}^{\times} \vartheta u_{\theta}^{\times} + \frac{w^{\times}}{\sin \beta} u_{\varphi}^{\times} - w^{\times} w' = 0 \quad (3.2)$$

$$w^{\times} (2\rho^{\times} w' + w^{\times} \rho') - \operatorname{tg} \beta p'_{\theta} = 0 \quad (3.3)$$

$$u^{\times} u' + w^{\times} w' - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^{\times}}{\rho^{\times 2}} \rho' = 0 \quad (3.4)$$

Уравнение (1.5) для дальнейшего представим в виде

$$\vartheta s_{\theta}^{\times} + \frac{w^{\times}}{\sin \beta v_{\theta}^{\times}} s_{\varphi}^{\times} = 0, \quad s = \frac{S}{\gamma(\gamma - 1)c_{\theta}} \quad (3.5)$$

$$s' = s - s^{\times} = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} \ln \left[\frac{p}{p^{\times}} \left(\frac{\rho^{\times}}{\rho} \right)^{\gamma} \right] = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} \left(\frac{p'}{p^{\times}} - \gamma \frac{\rho'}{\rho^{\times}} \right) + \dots \quad (3.6)$$

$(s^{\times} = \text{const})$

Здесь многоточием обозначены члены более высокого порядка по ϑ , чем p' и ρ' .

4. Ищем главный член s' в виде

$$s' = C(\varphi) \vartheta^{B(\varphi)} + \dots \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в (3.5), получаем, что $B = \text{const}$, а функция $C(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{w^{\times}}{\sin \beta v_{\theta}^{\times}} \frac{dC}{d\varphi} + BC = 0 \quad (4.2)$$

Неизвестная постоянная B определяется из условия, что $C(\varphi)$ является четной функцией $\varphi - \pi$ (симметрия обтекания), т. е. $C(\varphi)$ в окрестности

$\varphi = \pi$ представляет собой разложение

$$C(\varphi) = c(\varphi - \pi)^2 + \dots \quad (c = \text{const}) \quad (4.3)$$

Точка $\varphi = \pi$ будет особой для уравнения (4.2), так как в ее окрестности (см. формулы (2.2), (2.1))

$$w^x = \frac{1}{\sin \beta} \left(\frac{d^2 u^x}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\pi} (\varphi - \pi) + \dots = \frac{1}{\sin \beta} u_{\varphi\varphi}^x(\pi) (\varphi - \pi) + \dots \quad (4.4)$$

$$v_{\vartheta}^x = -2u^x(\pi) - \frac{1}{\sin^2 \beta} u_{\varphi\varphi}^x(\pi) + \dots$$

(Многоточием обозначены члены более высокого порядка малости, чем $\varphi - \pi$ при $\varphi \rightarrow \pi$.) Подставляя (4.3) в уравнение (4.2), получаем с учетом (4.4), что

$$B = \frac{2\tau}{2 + \tau}, \quad \tau = \frac{u_{\varphi\varphi}^x(\pi)}{u^x(\pi) \sin^2 \beta} \quad (4.5)$$

В дальнейшем предполагаем, что $B < 1$. При помощи формул (3.6), (2.3) получаем в окрестности $\vartheta = 0$

$$\rho' = -(\gamma - 1) \rho^x s' = -(\gamma - 1) \rho^x C \vartheta^B + \dots = A \vartheta^B + \dots \quad (4.6)$$

$$A = -(\gamma - 1) \rho^x C$$

Из (3.4) и (3.2) следует уравнение для u'

$$\vartheta v_{\vartheta}^x u_{\vartheta}^x + \frac{w^x}{\sin \beta} u_{\varphi}^x + u^x u' = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^x}{\rho^{x^2}} \rho' = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^x}{\rho^{x^2}} A \vartheta^B + \dots \quad (4.7)$$

Частное решение (4.7) находим в виде

$$u' = D(\varphi) \vartheta^B + \dots \quad (4.8)$$

где D удовлетворяет уравнению

$$\frac{w^x}{\sin \beta} \frac{dD}{d\varphi} + (u^x + B v_{\vartheta}^x) D = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^x}{\rho^{x^2}} A \quad (4.9)$$

Решение u_0' однородного уравнения

$$\vartheta v_{\vartheta}^x u_{\vartheta}^x + \frac{w^x}{\sin \beta} u_{\varphi}^x + u^x u' = 0$$

обращающееся в нуль при $\vartheta = 0$ имеет вид

$$u_0' = E(\varphi) \vartheta^{\delta}$$

где постоянная δ находится из условия четности u_0' по $\varphi - \pi$ и определяется по формуле

$$\delta = \frac{2\tau + 1}{2 + \tau} > B$$

Следовательно, формула (4.8) дает главный член u' при $\vartheta \rightarrow 0$. Из формул (3.3), (3.4) следует:

$$p' = \operatorname{ctg} \beta \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p^*}{\rho^*} + w^{*2} \right) A - 2\rho^* u^* D \right] \frac{1}{1+B} \vartheta^{1+B} + \dots \quad (4.10)$$

$$w' = \frac{1}{w^*} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p^*}{\rho^{*2}} A - u^* D \right) \vartheta^B + \dots \quad (4.11)$$

а из (3.1) при желании можно найти v' .

5. Подвергнем проверке полученные формулы для главных членов при $\alpha \rightarrow 0$, используя то обстоятельство, что при малых углах атаки решение в вихревом слое получено в элементарном виде (см., например, [1]).

Из формул (4.1), (4.2), (4.4), (5.4), (5.7) работы [1] следует, что при $\alpha \rightarrow 0$

$$u \sim u_0^* - \frac{a_0^{*2}}{u_0^*} (s - s_0 - \alpha s_1 \cos \varphi) + \alpha U_1^* \cos \varphi \quad (5.1)$$

Здесь f_0 означает f при $\alpha = 0$.

$$s - s_0 = \alpha s_1 \frac{Z-1}{Z+1}, \quad Z = \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \vartheta^{2h\alpha}, \quad h = -\frac{W_1^*}{2u_0^* \sin \beta}$$

где U_1^* , W_1^* , s_0 , s_1 — постоянные (см. [1])

$$U_1^* + W_1^* \sin \beta = -\frac{a_0^{*2}}{u_0^*} s_1 \quad (5.2)$$

Из формул (5.1) следует, что u в окрестности $\vartheta = 0$ представляется в виде

$$u = u^* + D(\varphi) \vartheta^{2h\alpha} + \dots \quad (5.3)$$

где

$$D(\varphi) \sim -\alpha 2s_1 \frac{a_0^{*2}}{u_0^*} \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \quad (5.4)$$

и

$$u_{\varphi\varphi}^*(\pi) \sim \alpha \left(\frac{a_0^{*2}}{u_0^*} s_1 - U_1^* \right) \quad (5.5)$$

Кроме того, с учетом (4.1), (4.6) получим

$$A(\varphi) = -(\gamma-1)\rho^* C \sim -\alpha \rho_0^{*2} s_1 (\gamma-1) \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \quad (5.6)$$

Произведем теперь проверку формул пунктов 1—4 следующим образом. При $\alpha \rightarrow 0$ согласно (5.3) должно быть

$$B \sim 2h\alpha = -\frac{W_1^*}{u_0^* \sin \beta} \alpha \quad (5.7)$$

Подставляя (5.5) в (4.5), используя (5.2) и равенство $u^*(\pi) \sim u_0^*$, найдем, что B , определяемое по формуле (4.5), действительно при $\alpha \rightarrow 0$ представляет собой выражение (5.7). Далее при $\alpha \rightarrow 0$ (см. [1])

$$w^* \sim \alpha W_1^* \sin \varphi, \quad v_0^* \sim -2u_0^*$$

и $C \sim -A / (\gamma-1)\rho_0^*$, D , определяемые формулами (5.6), (5.4), удовлетворяют уравнениям (4.2) и (4.9) (с точностью $O(\alpha^2)$). Другие форму-

лы при $\alpha \rightarrow 0$ также дают результаты, согласующиеся с результатами работы [1]. Например, при $\alpha \rightarrow 0$ первое приближение для w и p_0 не имеет особенности вида $\vartheta^{2\alpha}$. Подстановка (5.4), (5.6) в формулы (4.10), (4.11) показывает, что выражения соответственно в квадратной и круглой скобках обращаются в нуль (с точностью, принятой при выводе формул (5.4), (5.6)).

6. Итак, если $B < 1$, то главные члены u, v, w, p, ρ при $\vartheta \rightarrow 0$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^x + A\vartheta^B + \dots \\ p &= p^x + \rho^x w^{x^2} \operatorname{ctg} \beta \vartheta + \operatorname{ctg} \beta \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p^x}{\rho^x} + w^{x^2} \right) A - 2\rho^x u^x D \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{1+B} \vartheta^{1+B} + \dots \\ u &= u^x + D\vartheta^B + \dots \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} v &= - \left[2u^x + \frac{1}{\rho^x \sin \beta} (\rho^x w^x)_\varphi \right] \vartheta + \dots \\ w &= w^x + \frac{1}{w^x} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p^x}{\rho^{x^2}} A - u^x D \right) \vartheta^B + \dots \end{aligned}$$

Напомним, что f^x обозначает f при $\vartheta = 0$, $\vartheta = \theta - \beta$; функции $A(\varphi)$, $D(\varphi)$ определяются из уравнений (4.6), (4.2), (4.9); постоянная B — по формуле (4.5). Для случая $B > 1$ формулы, аналогичные (6.1), имеют вид

$$f = f^x + f_0^x \vartheta + \dots \tag{6.2}$$

где под f понимаются p, ρ, u, v, w .

7. В книге [2] задача о конусе решена конечно-разностным методом, называемым еще «методом установления», и рассчитаны таблицы для различных значений α, β, M_1 , где M_1 — число Маха невозмущенного потока. В [2] использовалась цилиндрическая система координат и затем координата ξ , где $\xi = 0$ на поверхности конуса и $\xi = 1$ на ударной волне.

Используя таблицы [2], можно по формуле (4.5) подсчитать B с одной — двумя верными значащими цифрами. Некоторые результаты таких расчетов представлены ниже: здесь указаны также значения

$$P = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_3 - \rho_2)}$$

при $\varphi = 90^\circ$, где индексами 1, 2, 3 отмечены значения плотности ρ на поверхности конуса ($\xi = 0$) и двух ближайших узлах сетки ($\xi = 0.05, \xi = 0.1$).

M_1	β°	α°	B	P
2	10	2.5	1.5	0.4
3	10	5	0.50	2
5	20	10	0.33	4
7	30	5	0.10	17
7	30	15	0.36	3

Как видно из этих данных на поверхности конуса может существовать сильная особенность, например в случае $M_1 = 7, \beta = 30^\circ, \alpha = 5^\circ, B \approx 0.1$. Формулы (6.1) можно использовать для определения поведения f_0 в вихревом слое. Если $f = f^x + F\vartheta^B + \dots$, то

$$f_0 \approx BF\vartheta^{B-1} \approx B \frac{f - f^x}{\vartheta}, \text{ или } \left(\frac{f}{f^x} \right)_\xi \approx B \frac{f - f^x}{f^x \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\xi} \tag{7.1}$$

По формуле (7.1) были подсчитаны значения $(\rho/\rho^*)_{\xi}$ при $\xi = 0.075$; здесь же была определена эта производная по данным таблиц [2] согласно формуле

$$\left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)_{\xi} \approx \frac{1}{0.05} \left(\left. \frac{\rho}{\rho^*} \right|_{\xi=0.1} - \left. \frac{\rho}{\rho^*} \right|_{\xi=0.05} \right) \quad (7.2)$$

Приводим результаты расчетов для $M_1 = 7$, $\beta = 30^\circ$ и двух пар значений ($\alpha = 15^\circ$, $B \approx 0.36$) и ($\alpha = 5^\circ$, $B \approx 0.1$).

φ°	=	135	90	45	
$\left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)_{\xi(7.1)}$	=	{ 0.18	0.86	2.4	(15°, 0.36)
		{ 0.030	0.14	0.32	(5°, 0.1)
$\left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)_{\xi(7.2)}$	=	{ 0.16	0.73	1.8	(15°, 0.36)
		{ 0.033	0.11	0.089	(5°, 0.1)

Приведенные результаты показывают, что если в первом случае согласование $(\rho/\rho^*)_{\xi(7.1)}$ и $(\rho/\rho^*)_{\xi(7.2)}$ получилось хорошим, то во втором при $\varphi = 45^\circ$ расхождение существенное. Этот факт можно истолковать двояко. Возможно, что точность, даваемая главным членом решения, — здесь недостаточна. Может быть также, что при вычислениях в [2] производные по ξ аппроксимировались в вихревом слое слишком грубо, так как $(\rho_2 - \rho_1) / (\rho_3 - \rho_2) \approx 48$ при $\varphi = 45^\circ$.

8. Существование сильной особенности на поверхности конуса для u и т. д. во многих случаях требует получения следующего приближения в теории пограничного слоя, так как в пограничном слое, например, в выражении для u появляются члены $O(\varepsilon^B)$, где $\varepsilon = R^{-1/2}$, R — число Рейнольдса задачи. Аналогичные явления имеют место и для неконических тел как заостренных, так и затупленных при несимметричном обтекании, что указывает на важность высших приближений в теории пространственного пограничного слоя.

Поступило 3 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Булах Б. М. Сверхзвуковой поток около наклоненного кругового конуса. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2, стр. 300—307.
2. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.