

О СИЛЬНОМ ВЯЗКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НА ТРЕУГОЛЬНОМ И СКОЛЬЗЯЩЕМ КРЫЛЬЯХ

И. Г. КОЗЛОВА, В. В. МИХАЙЛОВ

(Москва)

Рассмотрено обтекание треугольного и скользящего крыльев на режиме сильного вязкого взаимодействия. Показано, что решение каждой из указанных задач не является единственным. Получено условие, которому должно удовлетворять решение на оси симметрии треугольного крыла бесконечного размаха. Найден класс автомодельных течений в пограничном слое на тонком треугольном крыле.

1. Рассмотрим обтекание бесконечной плоской треугольной пластины потоком вязкого газа с числом M , равным бесконечности. Пусть ось x прямоугольной системы координат совпадает с осью симметрии пластины и направлением скорости набегающего потока, а ось y перпендикулярна поверхности пластины (фиг. 1).

Введем следующие обозначения: u_∞ , ρ_∞ — соответственно скорость и плотность набегающего потока; l — характерная длина; μ_0 — коэффициент вязкости при температуре адиабатического торможения; $u u_\infty$, $v u_\infty$, $w u_\infty$ — проекции полной скорости на оси x , y , z соответственно;

$$x\mu_0 / (\rho_\infty u_\infty), \quad y\mu_0 / (\rho_\infty u_\infty), \quad z\mu_0 / (\rho_\infty u_\infty)$$

— координаты вдоль указанных осей, $p\rho_\infty u_\infty^2$ — давление; $p\rho_\infty$ — плотность; $h u_\infty^2$ — энтальпия, μ_0 — коэффициент вязкости; P — число Прандтля; κ — показатель адиабаты.

$$R_0 = \rho_\infty u_\infty l / \mu_0, \quad H = h + 1/2(u^2 + v^2 + w^2)$$

Если при достаточно больших числах R_0 рассматриваемое течение может быть описано уравнениями пограничного слоя и внешнего невязкого потока, то оно должно быть автомодельным, т. е. возможно преобразование, уменьшающее число независимых переменных. Такое преобразование, сводящее задачу к двумерной, проделано в работе [1]. Полученные уравнения использованы в [2] для расчета обтекания треугольного крыла. Покажем, что принятая в [2] схема течения противоречива.

Согласно [2], течение около правой и левой половин крыла соответствует обтеканию скользящей пластины на режиме сильного вязкого взаимодействия и лишь вблизи оси симметрии на расстояниях $\Delta z/x \rightarrow 0$ при $R_0 \rightarrow \infty$ уравнения пограничного слоя неприменимы. При этом отношение давления на оси крыла к давлению в остальной части течения становится как угодно большим, если $R_0 \rightarrow \infty$. Так как в пограничном слое давление газа и давление адиабатически заторможенного газа имеют один порядок величины, то газ, поступающий из слоя в область, расположенную вблизи оси крыла, тормозится до давления, как угодно превышающего давление адиабатического торможения. Очевидно, что указанный режим не должен реализоваться, вследствие того, что при $R_0 \rightarrow \infty$ и характерных скоростях потока порядка u_∞ в областях меньших по порядку величины x могут осуществляться лишь невязкие течения и скачки уплотнения¹.

¹ Согласно [3], вязкость необходимо учитывать при этом лишь в относительно узком пристеночном слое.

Исходя из сказанного, изменим схему течения следующим образом. Будем считать, что давление в области неприменимости уравнений пограничного слоя вблизи оси x равно по порядку величины давлению в пограничном слое. Отсюда следует, что размер указанной области имеет тот же порядок, что и толщина слоя.

На фиг. 2 показана обсуждаемая схема течения вблизи оси в плоскости $x = \text{const}$. Здесь Δ_1 — область течения низкоэнтропийного газа, Δ_2 — область, заполненная газом, поступающим из пограничного слоя с толщиной δ . Предположим, что в Δ_2 справедлива оценка $w = O(1)$. Тогда, учитывая, что $O(\Delta z/x) < 1$, в уравнениях Навье — Стокса, определяющих течение в Δ_2 , можно пренебречь вязкостью газа и всеми производными по x . Следовательно, в Δ_2 должно реализоваться двумерное в плоскости $x = \text{const}$ течение, вдоль линий тока которого значение u постоянно. Поскольку одной из линий тока такого течения будет граница между Δ_1 и Δ_2 , часть оси y и поверхность пластины, профиль составляющей u в пограничном слое невозможно срастить с решением в области Δ_2 , так как значения u на верхней и нижней границах слоя существенно различны.

Для того, чтобы избежать указанного противоречия, можно предположить, что решение уравнений пограничного слоя при $z/x \rightarrow 0$ должно удовлетворять условию $w \rightarrow 0$, т. е. составляющая скорости w при $z \approx 0$ должна быть величиной более высокого порядка малости по сравнению с единицей. Исходя из сказанного, течение в пограничном слое должно отличаться от течения на скользящей пластине, т. е. решение автомодельных уравнений пограничного слоя и внешнего невязкого потока, выстраиваемое от кромок крыла, должно быть неоднозначным.

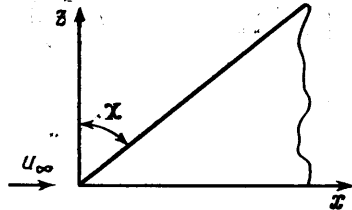
2. Выведем автомодельные уравнения для течения вязкого газа на тонком треугольном в плане крыле при числе M набегающего потока, равном бесконечности и $\text{tg } \chi = O(1)$.

С относительной точностью порядка θ^2 , где θ — максимальная из характерных относительных толщин крыла или слоя, уравнения трехмерного пограничного слоя на крыле могут быть записаны в виде

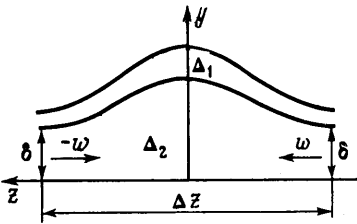
$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h}{P} + \frac{u^2 + w^2}{2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad H = h + \frac{u^2 + w^2}{2}, \quad p = p(x, z)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Примем, что μ зависит от температуры линейно

$$\mu = \frac{p}{\rho \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \quad (2.2)$$

Введем функцию тока ψ согласно уравнению

$$u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

и, заменив переменную y на ψ , произведем следующие преобразования независимых и независимых переменных:

$$x = x, \quad r = \left(\frac{\varepsilon}{\rho x (1-g)} \right)^{1/2} \int_0^\psi \rho \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi, \quad g = \frac{\zeta}{\zeta_0}$$

$$L = x^{-1/2 m} (1-g)^{-1/2} p^{1/2}, \quad t = w \zeta_0, \quad \zeta = z/x, \quad \zeta_0 = \text{ctg } \chi$$

Предположим, что распределение давления по крылу таково, что $L = \bar{L}(g)$. В этом случае система (2.1) преобразуется к следующему автономному виду:

$$Nu_r + 2\varepsilon v g h + (1-g) [2\varepsilon m h + (t/\zeta_0^2 - ug)u_g - 4\varepsilon g h L_g/L] = u_{rr}$$

$$Nt_r - 2\varepsilon v h + (1-g) [(t/\zeta_0^2 - ug)t_g + 4\varepsilon h L_g/L] = t_{rr} \quad (2.3)$$

$$NH_r + (1-g)(t/\zeta_0^2 - ug)H_g = H_{rr}/P + 1/2(1-1/P)(u^2 + t^2/\zeta_0^2)_{rr}$$

$$N_r - 1/2(v+1)(t/\zeta_0^2 - ug) + (1-g)[1/2(m+1)u + (t/\zeta_0^2 - ug)L_g/L - gu_g + t_g/\zeta_0^2] = 0$$

Здесь N является аналогом составляющей v и обращается в нуль при $r=0$, если $v=0$ на поверхности крыла, а индексами g, r, rr обозначены соответственно производные по g и первые и вторые производные по r .

При решении задачи без учета вязкого взаимодействия примем, что форма крыла подчиняется соотношению

$$y_w = x^{1+1/2 m} (1-g)^{1+1/2} \Phi(g) \quad (2.4)$$

Считая невязкое течение в каждой из плоскостей $z = \text{const}$ плоским («теория полос»), что справедливо с принятой относительной точностью θ^2 , можно получить уравнения, связывающие $L(g)$ и Φ . Однако, следуя [1], используем для определения этой связи приближенный метод касательных клиньев, согласно которому

$$p = 1/2(\kappa + 1) \cos^2(nx)$$

Здесь (nx) — угол между нормалью к телу и скоростью набегающего потока¹.

Тогда, используя 2.4, получаем

$$L = \sqrt{1/2(\kappa + 1)} \{ (1-g) [(1 + 1/2 m)\Phi - g\Phi_g] + g(1 + 1/2 v)\Phi \} \quad (2.5)$$

Функция Φ должна быть достаточно гладкой, а крыло — тонким, что требует условия $m \leq 0$. Хотя при этом наклон поверхности крыла вблизи передних кромок может быть велик, будем считать, что погрешность в решении мала при достаточном удалении от кромок.

3. Перейдем к рассмотрению случая сильного вязкого взаимодействия на треугольном крыле. При указанном режиме течения толщина тела пре-

¹ Вместо множителя $1/2(\kappa + 1)$ можно выбрать и другой коэффициент, дающий, например, правильное распределение давления по плоскому степенному телу с показателем степени $1 + m/2$.

небрежимо мала по сравнению с толщиной вытеснения пограничного слоя, а последняя совпадает с толщиной слоя. Таким образом, за поверхность обтекаемого тела необходимо принять верхнюю границу пограничного слоя на треугольной пластине. Вычисляя толщину пограничного слоя δ согласно соотношениям

$$\delta = x^{1/2(m+1)}(1-g)^{1/2(v+1)}\varepsilon^{-1/2}L \int_0^\infty \frac{dr}{\rho}, \quad \rho = \frac{L^2 x^m (1-g)^v}{2\varepsilon h}$$

и заменяя в уравнении (2.4) y_w на δ , будем иметь

$$\Phi L = 2\varepsilon^{1/2} x^{-m-1/2} (1-g)^{-v-1/2} \int_0^\infty h dr \quad (3.1)$$

Для получения автомодельного решения и отсутствия особенности в уравнениях при $g = 1$ полагаем $m = v = -1/2$.

Тогда уравнения (2.3), (2.5), (3.1) преобразуются к виду

$$Nu_r - \varepsilon h + (1-g) [(t/\zeta_0^2 - ug)u_g - 4\varepsilon h g L_g / L] = u_{rr}$$

$$Nt_r + \varepsilon h + (1-g) [(t/\zeta_0^2 - ug)t_g + 4\varepsilon h L_g / L] = t_{rr}$$

$$NH_r + (1-g) (t/\zeta_0^2 - ug)H_g = H_{rr} / P + 1/2(1 - 1/P)(u^2 + t^2/\zeta_0^2)_{rr} \quad (3.2)$$

$$N_r - 1/4(t/\zeta_0^2 - u) + (1-g) [(t/\zeta_0^2 - ug)L_g / L + t_g/\zeta_0^2 - gu_g] = 0$$

$$L = \sqrt{1/2(\kappa + 1)} [1/4\Phi - g(1-g)\Phi_g]$$

$$\Phi L = 2\sqrt{\varepsilon} \int_0^\infty h dr, \quad h = H - 1/2(u^2 + t^2/\zeta_0^2)$$

На поверхности крыла ($r = 0$) $u = t = N = 0$, $H = H_w = \text{const}$. На внешней границе пограничного слоя $u \rightarrow 1$, $t \rightarrow 0$, $H \rightarrow 1/2$ при $r \rightarrow \infty$.

Нетрудно видеть, что решение системы (3.2), не зависящее от g , удовлетворяет граничным условиям, но не обеспечивает сопряжение решений, полученных для левой и правой половин крыла. Можно показать, что указанное решение совпадает с решением для скользящей пластины, которое, по существу, и использовалось в [2].

4. Исследуем систему (3.2) вблизи $g = 1$, предполагая, что решение не является единственным и разлагая параметр L в ряд

$$L(g) = L_0 + L_1(1-g)^\lambda + \sum_2^\infty L_i(1-g)^{\alpha_i} \quad (4.1)$$

Остальные функции, входящие в (3.2), представляем в виде рядов

$$f(r, g) = f_0(r) + f_1(r) \frac{L_1}{L_0} (1-g)^\lambda + \sum_2^\infty f_i(r) (1-g)^{\alpha_i} \quad (4.2)$$

Здесь индексом 0 обозначены члены разложения, соответствующие автомодельному решению для скользящей пластины бесконечного размаха и предполагается, что $0 < \lambda < \alpha_i < \alpha_{i+1}$. Если рассматриваемая задача может решаться с необходимой точностью на конечном (достаточно большом) интервале значений r , и функции f_i на этом интервале ограничены, то при $g \rightarrow 1$ каждый последующий член разложения можно считать мень-

шим по порядку величины предыдущего. В этом случае, предполагая, что остатком ряда можно пренебречь при $g \rightarrow 1$, для нулевых и первых членов разложения будем иметь

$$\begin{aligned} N_0 u_{0r} - \varepsilon h_0 &= u_{0rr}, & N_0 t_{0r} + \varepsilon h_0 &= t_{0rr} \\ N_0 H_{0r} &= H_{0rr} / P + 1/2(1 - 1/P)(u_0^2 + t_0^2 / \zeta_0^2)_{rr} \\ N_{0r} - 1/4(t_0 / \zeta_0^2 - u_0) &= 0, & L_0 &= \sqrt{1/2}(\chi + 1)^{3/4} \Phi_0 \\ \Phi_0 L_0 &= 2\sqrt{\varepsilon} \int_0^\infty h_0 dr, & h_0 &= H_0 - 1/2(u_0^2 + t_0^2 / \zeta_0^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} u_0 = t_0 = N_0 = 0, & \quad H_0 = H_w \quad \text{при } r = 0 \\ u_0 \rightarrow 1, t_0 \rightarrow 0, & \quad H_0 \rightarrow 1/2 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \\ N_1 u_{0r} + N_0 u_{1r} - \varepsilon h_1 - \lambda(t_0 / \zeta_0^2 - u_0)u_1 + \lambda 4\varepsilon h_0 &= u_{1rr} \\ N_1 t_{0r} + N_0 t_{1r} + \varepsilon h_1 - \lambda(t_0 / \zeta_0^2 - u_0)t_1 - \lambda 4\varepsilon h_0 &= t_{1rr} \\ N_1 H_{0r} + N_0 H_{1r} - \lambda(t_0 / \zeta_0^2 - u_0)H_1 &= H_{1rr} / P + \\ &+ (1 - 1/P)(u_0 u_1 + t_0 t_1 / \zeta_0^2)_{rr} \\ N_{1r} - (\lambda + 1/4)(t_1 / \zeta_0^2 - u_1) - \lambda(t_0 / \zeta_0^2 - u_0) &= 0 \\ \frac{4\lambda + 6}{4\lambda + 3} \int_0^\infty h_0 dr = \int_0^\infty h_1 dr, & \quad h_1 = H_1 - u_1 u_0 - t_1 t_0 / \zeta_0^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} u_1 = t_1 = H_1 = N_1 = 0 & \quad \text{при } r = 0 \\ u_1 \rightarrow 0, t_1 \rightarrow 0, H_1 \rightarrow 0 & \quad \text{при } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Таким образом, для существования отличных от нуля первых членов разложений (4.1), (4.2) ($L_1/L_0 \neq 0$) должны существовать некоторые собственные значения λ , при которых переопределенная система уравнений (4.4) имела бы решение. Численное интегрирование систем (4.3), (4.4) показало, что в интервале $0 < \lambda < 70$ для каждого значения Φ_0 имеется лишь одно собственное значение λ . Для $\chi = 0,16, 45,60^\circ$ при $P = 1$ и $M_w = 1/2$ это значение с точностью до двух знаков соответственно равно 24, 22, 12, 7.7. Численное интегрирование системы (3.2) с начальными условиями, соответствующими нулевым членам разложений (4.1), (4.2), показало, что подобная задача некорректна. Отход от кромки ($g = 1$) с помощью двух членов ряда (4.1) (точность контролируется двумя последними уравнениями системы (3.2)) дает однопараметрическое семейство решений, зависящих от величины L_1/L_0 .

Таким образом показано, что решение задачи о сильном вязком взаимодействии на треугольном крыле неединственно.

5. Рассмотрим сильное вязкое взаимодействие на скользящей пластине и покажем, что, если искать решение в виде (4.1), (4.2), то задача для двух первых членов разложения сводится к предыдущей. Примем, что скользящая пластина имеет бесконечный размах и, следовательно, система уравнений (2.1) зависит лишь от двух переменных: y и $x - z \operatorname{tg} \chi$ (фиг. 1).

Введем, как и ранее, функцию тока и некоторые новые переменные r, g, Φ, L согласно соотношениям

$$\begin{aligned} g &= 1 - x + \frac{z}{\zeta_0}, & r &= \left(\frac{\varepsilon}{p(1-g)} \right)^{1/2} \int_0^y \rho \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi \\ L &= (1-g)^{1/4} p^{1/2}, & \delta &= (1-g)^{3/4} \Phi(g), \quad \zeta_0 = \operatorname{ctg} \chi \end{aligned}$$

Тогда после преобразований, аналогичных проделанным выше, получим

$$\begin{aligned} Nu_r - \varepsilon h + (1-g) [(t/\xi_0^2 - u)u_g - 4\varepsilon h L_g/L] &= u_{rr} \\ Nt_r + \varepsilon h + (1-g) [(t/\xi_0^2 - u)t_g + 4\varepsilon h L_g/L] &= t_{rr} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$NH_r + (1-g)(t/\xi_0^2 - u)H_g = H_{rr} / P + 1/2(1 - 1/P)(u^2 + t^2/\xi_0^2)_{rr}$$

$$N_r - 1/4(t/\xi_0^2 - u) + (1-g)[(t/\xi_0^2 - u)L_g/L + t_g/\xi_0^2 - u_g] = 0$$

$$L = \sqrt{1/2(\kappa + 1)} [3/4\Phi - (1-g)\Phi_g], \quad L\Phi = 2\sqrt{\varepsilon} \int_0^{\infty} h dr$$

Условия на верхней и нижней границах пограничного слоя совпадают при этом с условиями для системы (3.1).

Нетрудно видеть, что если искать решение системы (5.1) вблизи передней кромки пластины, используя разложения типа (4.1), (4.2), то для нулевых и первых членов разложения получим системы уравнений (4.3) и (4.4). Таким образом, автомодельное решение для сильного взаимодействия на скользящем крыле (включая случай $\chi = 0$) также неединственно. Стличие решения от автомодельного может трактоваться как влияние задней кромки крыла. Условие, которому должно удовлетворять решение вблизи задней кромки, очевидно, зависит от геометрии обтекаемого тела. (Для случая слабого взаимодействия это влияние ограничено малой окрестностью задней кромки [3, 4].)

В заключение отметим, что расчет, проведенный для случая треугольного крыла с помощью интегрального метода, основанного на введении двухпараметрических профилей поперечной и продольной составляющих скорости, показал, что решение, удовлетворяющее условию $w = 0$ при $g = 0$, существует. При этом на оси симметрии крыла давление и производные от давления разрывов не имеют.

Поступило 23 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженский М. Д. О пространственном гиперзвуковом течении около тонких крыльев. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
2. Ладыженский М. Д. О сильном взаимодействии пограничного слоя с невязким потоком на треугольном крыле. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
3. Нейланд В. Я., Сычев В. В. Асимптотические решения уравнений Навье — Стокса в областях с большими локальными возмущениями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
4. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.