

УДАР СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ О ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ

А. Г. ГОРШКОВ, Э. И. ГРИГОЛЮК

(Москва)

Задачи об ударе плоских и упругих тел о жидкость интенсивно начали исследоваться еще в 30-х годах в связи с расчетами гидросамолетов при посадке и судов на волнении [1-3]. При ударе произвольного тела о жидкость величина и характер распределения гидродинамической нагрузки по поверхности тела определяется многими факторами. Учесть все эти факторы достаточно трудно в силу нелинейности граничных условий на свободной поверхности, наличия струйных явлений и брызгообразования, приводящих к разрывным решениям.

К настоящему времени наиболее подробно изучен удар жестких тел о воду. Вопросы учета гидроупругого взаимодействия между телом и жидкостью рассматривались из введенных еще Вагнером соображений в основном для плоскокилеватых тел [3-5]. Подробная библиография по проблеме удара тел о жидкость приводится в обзоре [6].

Рассматривается вертикальный удар тонкой полой сферической оболочки о поверхность идеальной несжимаемой жидкости. По контуру оболочка опирается на упругий шпангоут, который скреплен с жестким телом, массой M_0 . Масса жесткого груза M_0 намного превышает массу оболочки m_0 . Предполагается, что начальная скорость удара v_0 мала по сравнению со скоростью распространения звука c в жидкости.

1. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только осесимметричных деформаций оболочки. Тогда при некоторых соотношениях параметров оболочки и опорного шпангоута [7] уравнение движения оболочки относительно нормального прогиба w_1 и граничные условия удаётся представить в особенно простой форме

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = -A \nabla^2 \nabla^2 w + B \nabla^2 w - \gamma w + \frac{1}{k} \frac{dV}{d\tau} + D p^* \quad (1)$$

$$w = \nabla^2 w = 0 \quad \text{при } \alpha = 1$$

Здесь

$$\begin{aligned} w &= w_1 / h, \quad k = h / R, \quad \tau = ct / R, \quad \gamma = E / \rho_0 c^2, \quad p^* = p / \rho c^2 \\ A &= \gamma k^2 / 12 \varphi_0^4 (1 - \nu^2), \quad B = N_0 \gamma h / E R_0^2 k^2, \quad D = 1 / \eta k^2, \quad \eta = \rho_0 / \rho \\ V &= v / c, \quad \varphi_0 = R_0 / R, \quad \alpha = r / R_0, \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial \alpha^2 + 1 / \alpha \partial / \partial \alpha \end{aligned}$$

где h, R — толщина и радиус кривизны оболочки; ν, E, ρ_0 — соответственно коэффициент Пуассона, модуль упругости и плотность материала оболочки; ρ, c — плотность жидкости и скорость звука в ней; R_0 — радиус опорного шпангоута; t — время; r — текущий радиус цилиндрической системы координат; p — гидродинамическое давление; v — скорость движения оболочки как твердого тела; N_0 — постоянное начальное усилие в оболочке.

При выводе уравнения (1) не учитывались силы инерции в срединной поверхности оболочки и проекция инерционной силы от движения оболочки как твердого тела на касательную к контуру оболочки. Положительное значение прогиба совпадает с внутренней нормалью. В начальный момент времени $w = \partial w / \partial \tau = 0$ при $\tau = 0$.

2. Для определения гидродинамических нагрузок на начальном этапе взаимодействия оболочки с жидкостью воспользуемся теми же вагнеровскими соображениями, что и для клина в плоском случае [1]. При небольших глубинах погружения течение около тела вращения будет аналогично течению впереди эквивалентного диска радиуса $b(t)$, который движется поступательно.

Тогда потенциал скоростей возмущенного движения жидкости $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (в предположении, что он существует) можно представить в виде (μ, ξ — эллиптические координаты)

$$\varphi_1 = \frac{2v}{\pi} b\mu(1 - \xi \operatorname{arctg} \xi), \quad \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_{2n+1}(\mu) Q_{2n+1}(i\xi)$$

$$B_n = -b \left[\frac{\partial}{\partial \xi} Q_{2n+1}(i\xi) \right]_{\xi=0}^{-1} \int_0^1 \mu \frac{\partial w_1}{\partial t} P_{2n+1}(\mu) d\mu \quad (2)$$

Здесь $P_{2n+1}(\mu)$, $Q_{2n+1}(i\xi)$ — полиномы Лежандра первого и второго рода; $\mu = 0$ соответствует свободной поверхности жидкости; $\xi = 0$ соответствует поверхности диска.

Потенциал φ_1 соответствует поступательному движению диска со скоростью v , а потенциал φ_2 обусловлен наличием дополнительного поля скоростей $\partial w / \partial t$, вызванных деформацией оболочки [8, 9].

После перехода к безразмерным координатам на основании соотношения Коши — Лагранжа получим

$$p^* = p_1^* + p_2^*, \quad p_1^* = \frac{2}{\pi} \left[\frac{V^2 a}{\varphi_0 u \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} + \varphi_0 \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \frac{dV}{d\tau} \right] \quad (3)$$

$$p_2^* = -\frac{k}{2\beta^2} \sum f_n \left\{ \frac{V}{u} \left[P_{2n+1}(\mu) + \frac{1 - \mu^2}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} P_{2n+1}(\mu) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\beta} \alpha \frac{\partial w}{\partial \tau} P_{2n+1}(\bar{\mu}) d\alpha + a P_{2n+1}(\mu) \int_0^{\beta} \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} P_{2n+1}(\mu) d\alpha \right\}$$

причем

$$f_n = \frac{4n + 3}{\pi} \left[\frac{n!^2 2^{2n+1}}{(2n + 1)!} \right]^2, \quad \mu = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta},$$

$$a = \frac{b}{R}, \quad u = \frac{V}{da/d\tau}, \quad \beta = \frac{b}{R_0}$$

Функция $u(\tau)$ в данном случае введена формально по аналогии с ударом жестких тел, и она уже не имеет универсального значения как при ударе жестких тел ($u(\tau)$ должна находиться в процессе решения).

При выводе формул (3) в интеграле Коши — Лагранжа были опущены некоторые слагаемые, пропорциональные квадрату полной скорости движения жидкости. Роль этих слагаемых увеличивается с ростом глубины погружения.

Наибольшие трудности при таком подходе состоят в определении радиуса смоченной поверхности $b(t)$. Его можно определить из соответствующего интегрального уравнения, как и в случае вертикального удара плоскокилеватого упругого тела [5].

Здесь для упрощения задачи при определении $b(t)$ рассмотрим вертикальный удар эквивалентной механической системы, состоящей из двух

жестких тел массой M_0 и m_0 , связанных между собой упругой пружиной. В контакт с жидкостью входит тело m_0 , масса которого и форма ударяющейся поверхности соответствует массе и форме жесткой оболочки. Движение этой системы будет описываться следующими уравнениями [3]:

$$x_1'' + \omega x(x_1 - x_2) - \phi = 0, \quad (1 + m)x_2'' + m \dot{x}_2'' - \omega(x_1 - x_2) - \phi = 0 \quad (4)$$

при этом

$$x_1 = y_1/R, \quad x_2 = y_2/R, \quad \omega = \omega_0 R^2/c^2 m_0 \\ \phi = gR/c^2, \quad m = 4\sigma b^3/3m_0, \quad \kappa = m_0/M_0$$

Здесь y_1 — перемещение тела M_0 ; y_2 — перемещение тела m_0 ; ω_0 — жесткость пружины; g — ускорение силы тяжести.

Жесткость пружины ω_0 должна определяться из эксперимента или теоретическим путем.

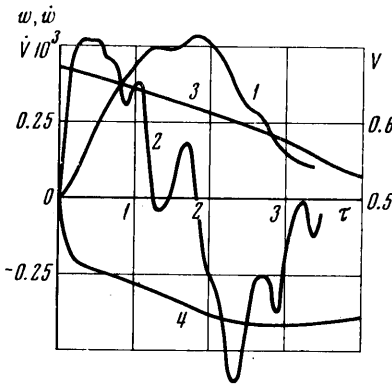
В этом случае функция $u = x_2'/a'$ определяется выражением [10]

$$u = \frac{1+a^2}{4a^2} \ln \frac{1+a}{1-a} - \frac{1}{2a} \quad (5)$$

К системе (4) необходимо присоединить начальные условия

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_1' = x_2' = V_0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (6)$$

Система (4) с учетом (5) и (6) интегрировалась численно методом Рунге — Кутты (жесткость ω_0 определялась через частоту колебаний первого тона оболочки). Из решения этой системы определялся закон изменения $a(\tau)$, $u(\tau)$, $V(\tau)$ и $V'(\tau)$. Полученные данные использовались в дальнейшем для решения уравнения (1).



3. Для рассматриваемого частного случая перемещение оболочки $w(a, \tau)$ удобно представить в форме

$$w = \sum_i \Theta_i J_0(\xi_i \alpha) \quad (7)$$

где $J_0(\xi_i \alpha)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а ξ_i — корни уравнения $J_0(\xi_i) = 0$.

Раскладывая внешнюю нагрузку в ряд по соответствующим функциям Бесселя, после применения процедуры И. Г. Бубнова [11] получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $\Theta_i(\tau)$, которая интегрировалась численно методом Рунге — Кутты при следующих значениях характерных параметров оболочки и среды:

$$k = 0.0255, \quad \phi_0 = 0.42, \quad \gamma = 3.91, \quad \eta = 0.428, \quad V_0 = 6.66 \cdot 10^{-3}, \quad \nu = 0.3, \quad \kappa = 0.07.$$

Вычисления проводились для $i = 1 \div 7$, $n = 0 \div 4$.

На фигуре показано изменение суммарного прогиба w (кривая 1) и скорости w' (кривая 2) в центре панели. На этой же фигуре кривая 3 характеризует изменение во времени скорости движения всей системы как твердого тела V , а кривая 4 соответствует V' .

Наибольший вклад в суммарный прогиб дают первые четыре члена ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner H. Über Stoss — und Gleitvorgänge der Oberfläche von Flüssigkeiten. Z. angew. Math. und Mech. 1932, Bd 12, H. 4, S. 199—215.
2. Седов Л. И. Об ударе твердого тела плавающего на поверхности жидкости. Тр. ЦАГИ, 1934, вып. 187, стр. 1—27.
3. Sydow J. Über den Einfluss von Federung und Kielung auf den Landestoss. Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Jahrbuch. 1938, S. 93—102.
4. Повицкий А. С. Посадка гидросамолетов. Тр. ЦАГИ, 1939, вып. 423, стр. 1—83.
5. Meyerhoff W. K. Die Berechnung hydroelastischer Stosse. Schiffstechnik, 1965, Bd. 17, H. 60, S. 18—30; H. 61, S. 49—64.
6. Григолюк Э. И. Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью. Тр. VII Всес. конф. по теории пластин и оболочек, 1969, М., «Наука», 1970, стр. 755—778.
7. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Действие акустической волны давления на пологую сферическую оболочку. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 4, стр. 787—789.
8. Wilkinson J. P. D., CarPELLI A. P., Salzman R. N. Hydroelastic interaction of shells of revolution during water impact. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 5, pp. 792—797.
9. Горшков А. Г., Коган Ф. А. Удар упругих и жестких тел о воду. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 5, стр. 189.
10. Schmieden C. Die Aufschlag von Rotationskorparn auf eine Wasseroberfläche. Z. angew. Math. und Mech., 1953, Bd 33, H. 4, S. 147—151.
11. Бубнов И. Г. Отзыв о работе проф. С. П. Тимошенко «Об устойчивости упругих систем». Сб. С-Петербургск. ин-та инж. путей сообщения, 1913, вып. 31, стр. 33—36. См. также в кн.: И. Г. Бубнов Избр. тр., Л., Судпромгиз, 1956, стр. 136—139.