ТЕЧЕНИЕ ВИХРЕВОГО ПОТОКА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

И. А. БЕЛОВ, Л. И. ШУБ

(*Ленинград*)

Исследуется течение в окрестности критической точки преграды осесимметричного потока вязкой несжимаемой жидкости, когда в набегающий поток введены стационарные вихри, ориентированные в направлении угловой координаты. Приводится решение уравнения переноса вихря в случае внешнего потока, содержащего один вихрь наибольшей величины в низкочастотной части спектра. На основе использования конечного интегрального преобразования Ханкеля задача сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что достаточно большой по величине вихрь может существенно влиять на структуру вязкого течения вблизи преграды.

Рассмотрим стационарное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах ξ, φ, ζ. Набегающий поток ограничен бесконечной плоской преградой с критической $\xi=0$, $\zeta=0$. Уравнения, определяющие течение жидкости, запишем в виде

$$v_r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+v_z\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\frac{v_r\Omega}{r}=\Delta\Omega-\frac{1}{r^2}\Omega \tag{1}$$

$$\Omega\equiv\Omega_\varphi=\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r},\quad v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad v_z=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{2}$$

$$r=\left(\frac{\beta}{\nu}\right)^{1/2}\xi,\quad z=\left(\frac{\beta}{\nu}\right)^{1/2}\zeta,\quad v_r=\frac{v_\xi}{(\beta\nu)^{1/2}},$$

$$v_z=\frac{v_\zeta}{(\beta\nu)^{1/2}},\quad \Omega(r,z)=\frac{\Omega(\xi,\zeta)}{\beta}$$

Здесь ψ — функция тока, β — временная постоянная в окрестности критической точки, ν — кинематическая вязкость.

Известно точное решение (1), (2) для случая безвихревого набегающего потока [2]. В отличие от [2] предположим, что набегающий на преграду поток содержит спектр вихрей, распределенных по координате r с длинами волн $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, причем λ_1 — наибольшая или основная длина волны спектра.

На участке $0\leqslant r\leqslant {}^1/_2\lambda_1$ распределение вихрей представим в виде

$$\Omega=-\sum_{n=1}^{\infty}A_nk_nzJ_1(k_nr)\qquad\left(k_n=\frac{2\alpha_n}{\lambda_1}\right) \tag{3}$$

Здесь α_n — n-й корень уравнения $J_1(r)=0$. Тогда функция тока набегающего потока запишется так:

$$\psi(r,z)=r^2z-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}A_nrzJ_1(k_nr) \tag{4}$$

В (4) первый член представляет собой функцию тока невозмущенного движения; второй — функцию тока возмущающего движения. Задание Ω, ψ в набегающем потоке в форме (3), (4) позволяет рассматривать A_n как отношение величины n-го вихря спектра к средней величине вихря в вязком слое из-за касательных напряжений. Для того чтобы завихренность набегающего потока существенно влияла на структуру вязкого течения вблизи преграды, спектр вихрей должен содержать по крайней мере один вихрь с величиной A порядка единицы. Число k_n может рассматриваться как безразмерное волновое число n-го вихря. По определению волнового числа произведение $k_n\lambda_n$ есть постоянная величина для рассматриваемого участка $[0, {}^1/_2\lambda_1]$. Отсюда для определения длины волны n-го вихря спектра имеем соотношение $k_n\lambda_n = k_1\lambda_1 = \mathrm{const}$.

Учитывая (4), решение (1), (2) естественно искать в виде

$$\psi = r^2 f_0(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} f_n(z) r J_1(k_n r) \tag{5}$$

Знак перед суммой в (5) связан с направлением вращения первого от оси z вихря. Знак минус указывает на направление вращения по часовой стрелке.

Рассмотрим случай, когда набегающий поток содержит один вихрь наибольшей величины (величины остальных вихрей пренебрежимо малы). Тогда, сопоставляя выражения (4) и (5), граничные условия для функций f_0 и f_n запишем в виде

$$f_0(0) = f_0'(0) = 0, \quad f_0'(\infty) = 1; \quad f_1(0) = f_1'(0) = 0, \quad f_1'(\infty) = A_1 \tag{6}$$
$$f_n(0) = f_n'(0) = 0, \quad f_n'(\infty) = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Отметим, что, несмотря на характер граничных условий ($A_n = 0$ для всех $n \neq 1$), сохранение бесконечного числа членов в (5) необходимо вследствие нелинейности уравнения (1).

В предположении, что (5) является решением (1), (2), ряд, входящий в (5), сходится, так как по построению это — ряд Фурье — Бесселя для возмущающего движения. Анализ ограничим рассмотрением случая, когда основная длина волны достаточно велика, т. е. когда волновое число $k_1 \ll 1$. Как показано в работе [1], посвященной изучению турбулентных характеристик потока в окрестности критической точки, наибольшая часть турбулентной энергии концентрируется именно в низкочастотных компонентах вихря.

Если подставить (5) в уравнение (1) и пренебречь членами, содержащими k_n^2, то полученное выражение после интегрирования по y от 0 до ∞ с учетом граничных условий (6) имеет вид

$$r^2(f_0''' + 2f_0 f_0 \; - f_0'^2 + 1) - \sum_n (f_n''' + 2f_0 f_n'')\frac{1}{k_n} r J_1(k_n r) +$$
$$+ \sum_n (f_0' f_n' - f_0'' f_n - A_1) r^2 J_0(k_n r) - \sum_{n,i} \frac{1}{k_n}(f_n' f_i' - f_i f_n'' - A_1^2) \times$$
$$\times r J_0(k_i r) J_1(k_n r) + \sum_{n,i} \frac{1}{k_i k_n}(f_i' f_n' - A_1^2) J_1(k_i r) J_1(k_n r) \equiv L(r, z) = 0 \tag{7}$$

Суммирование по n, i в (7) производится для таких n, i, для которых условие $k_n, k_i \ll 1$ еще соблюдается. Отметим, что при $f_n \equiv 0$ выражение

(7) сводится к известному уравнению относительно f_0, описывающему течение в окрестности критической точки в случае безвихревого набегающего потока [2].

Для решения задачи воспользуемся формулой конечного преобразования Ханкеля, применяя ее к выражению $L(r, z)$ на участке $[0, {}^1/_2\lambda_1]$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\lambda_1} L(r,z)\,rJ_0(k_p r)\,dr = 0, \qquad k_p = \frac{2\alpha_p}{\lambda_1} \qquad {\scriptstyle (p=0,1,2,\dots n)} \tag{8}$$

В (8) произведем замену переменных

$$r = \frac{1}{2}\lambda_1 x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

и введем обозначения $\alpha_n = \gamma$, $\alpha_i = \mu$, $\alpha_p = \varkappa$. При этом по определению волнового числа $J_1(\gamma) = J_1(\mu) = J_1(\varkappa) = 0$. Тогда с учетом (7) интеграл (8) примет вид

$$\int_0^1 L(x,z)\,xJ_0(\varkappa x)\,dx = 0 \qquad (\varkappa = 0,\ 3.83,\ 7.01,\ 10.17, \dots) \tag{9}$$

При различных $\varkappa$ отсюда имеем

при $\varkappa = 0$

$$\int_0^1 \gamma x^2 J_1(\gamma x)\,dx = -\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_0^1 xJ_0(\gamma x)\,dx = -J_0(\gamma)$$

$$\int_0^1 x^3 J_0(\gamma x)\,dx = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_0^1 xJ_0(\gamma x)\,dx = \frac{2}{\gamma^2}J_0(\gamma)$$

$$\int_0^1 xJ_1(\gamma x)J_1(\mu x)\,dx = \frac{x}{\gamma^2-\mu^2}[\mu J_1(\gamma x)J_0(\mu x) - \gamma J_1(\mu x)J_0(\gamma x)]\Big|_0^1 = 0 \qquad (\gamma \neq \mu)$$

$$\int_0^1 xJ_1^2(\gamma x)\,dx = -\frac{x}{\gamma}J_1(\gamma x)J_0(\gamma x)\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}[J_1^2(\gamma x) + J_0^2(\gamma x)]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}J_0^2(\gamma)$$

$$\int_0^1 x^2 J_0(\mu x)J_1(\gamma x)\,dx = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\mu\int_0^1 xJ_1(\mu x)J_1(\gamma x)\,dx =$$

$$= -\frac{x^2}{\nu^2-\mu^2}[\mu J_1(\gamma x)J_1(\mu x) + \gamma J_0(\gamma x)J_0(\mu x)]\Big|_0^1 + \frac{2\gamma x}{(\gamma^2-\mu^2)^2}[\gamma J_1(\gamma x)J_0(\mu x) -$$

$$- \mu J_1(\mu x)J_0(\gamma x)]\Big|_0^1 = \frac{\gamma}{\mu^2-\gamma^2}J_0(\gamma)J_0(\mu)$$

$$\int_0^1 x^2 J_0(\gamma x)J_1(\gamma x)\,dx = \frac{J_1^2(\gamma)}{2\gamma} = 0$$

при $\varkappa \neq 0$

$$\int_0^1 x^3 J_0(\gamma x)J_0(\varkappa x)\,dx = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma\int_0^1 x^2 J_1(\gamma x)J_0(\varkappa x)\,dx = \frac{2(\gamma^2+\varkappa^2)}{(\gamma^2-\varkappa^2)^2}J_0(\gamma)J_0(\varkappa)$$

$$\sigma_{n,i,p} = \int_0^1 x^2 J_1(\gamma x)J_0(\mu x)J_0(\varkappa x)\,dx, \qquad \varepsilon_{n,i,p} = \int_0^1 xJ_1(\gamma x)J_1(\mu x)J_0(\varkappa x)\,dx$$

Приводим значения двух последних интегралов $\sigma_{n,i,p}$ и $\varepsilon_{n,i,p}$, вычисленных для конкретных $\gamma = \alpha_n$, $\mu = \alpha_i$, $\varkappa = \alpha_p$

$\varepsilon = 0.0143$,	$\sigma = -0.0106$,	$\gamma = \mu = \varkappa = 3.83$
$\varepsilon = 0.0356$,	$\sigma = 0.0006$,	$\gamma = \mu = \varkappa = 7.015$
$\varepsilon = -0.0149$,	$\sigma = 0.0017$,	$\gamma = \mu = 3.83$, $\varkappa = 7.015$
$\varepsilon = 0.0203$,	$\sigma = 0.0017$,	$\gamma = \varkappa = 3.83$, $\mu = 7.015$
$\varepsilon = 0.0309$,	$\sigma = -0.00263$,	$\gamma = \varkappa = 7.015$, $\mu = 3.83$
$\varepsilon = 0.0309$,	$\sigma = -0.0082$,	$\gamma = 3.83$, $\mu = \varkappa = 7.015$
$\varepsilon = 0.0203$,	$\sigma = -0.0005$,	$\gamma = 7.015$, $\mu = \varkappa = 3.83$
$\varepsilon = 0.0137$,	$\sigma = -0.00263$,	$\gamma = \mu = 7.015$, $\varkappa = 3.83$

Подставляя при различных $\varkappa$ значения приведенных выше интегралов в (9), получаем $n+1$ уравнений для определения функций f_0, f_n

$$f_0''' + 2f_0f_0'' - f_0'^2 + 1 = -\sum_n (f_n''' + 2f_0f_n'' + 2f_0'f_n' - 2f_0''f_n - 2A_1)\frac{4}{\alpha_n^2}J_0(\alpha_n) + \sum_{n\neq i}\frac{4}{\alpha_i^2-\alpha_n^2}(f_n'f_i' - f_if_n'')J_0(\alpha_n)J_0(\alpha_i) - \sum_n \frac{2}{\alpha_n^2}(f_n'^2 - 2f_nf_n'' - A_1^2)J_0^2(\alpha_n) \tag{10}$$

$$f_0''' + 2f_0f_0'' - f_0'^2 + 1 - \frac{1}{2}\sum_{n\neq p}\frac{\alpha_p^2}{\alpha_p^2-\alpha_n^2}J_0(\alpha_n)(f_n''' + 2f_0f_n\ \ ) + \sum_{n\neq p}\frac{\alpha_p^2(\alpha_n^2+\alpha_p^2)}{(\alpha_n^2-\alpha_p^2)^2}J_0(\alpha_n)(f_0'f_n' - f_0''f_n - A_1) + \frac{\alpha_p^2}{12}J_0(\alpha_p)(f_0'f_p' - f_pf_0'' - A_1) = \frac{1}{2}\sum_{i,n}\frac{\alpha_p^2}{\alpha_n}\frac{1}{J_0(\alpha_n)}(f_n'f_i' - f_if_n'' - A_1^2)\sigma_{n,i,p} - \frac{1}{2}\sum_{i,n}\frac{\alpha_p^2}{\alpha_n\alpha_i}\frac{1}{J_0(\alpha_p)}(f_i'f_0' - A_1^2)\varepsilon_{n,i,p} \qquad (p=1,2,\ldots n) \tag{11}$$

Для решения приведенной системы уравнений используются граничные условия (6). Практическая сходимость рядов в (10), (11), как показали дальнейшие расчеты, достаточно высока, поэтому при приближенном решении можно ограничиться двумя членами указанных рядов. Система (10), (11) при n, $i = 1$, 2 имеет вид

$$f_0''' - f_0'^2 + 2f_0f_0'' + 1 = 0.44(f_0'f_1' - f_0''f_1 - A_1) - 0.76(f_0'f_2' - f_0''f_2)) - 0.063(f_1'^2 - A_1^2) - 0.433f_1'f_2' + 0.078f_1f_2'' - 0.012f_2f_1'' \tag{12}$$

$$f_1''' - (2.16f_0' - 0.114f_1' - 0.7f_2')f_1' + (2f_0 + 0.46f_1)f_1'' + 2.16f_0''f_1 + (2.16A_1 - 0.114A_1^2) = -2.8(f_0'f_2' - f_0''f_2) \tag{13}$$

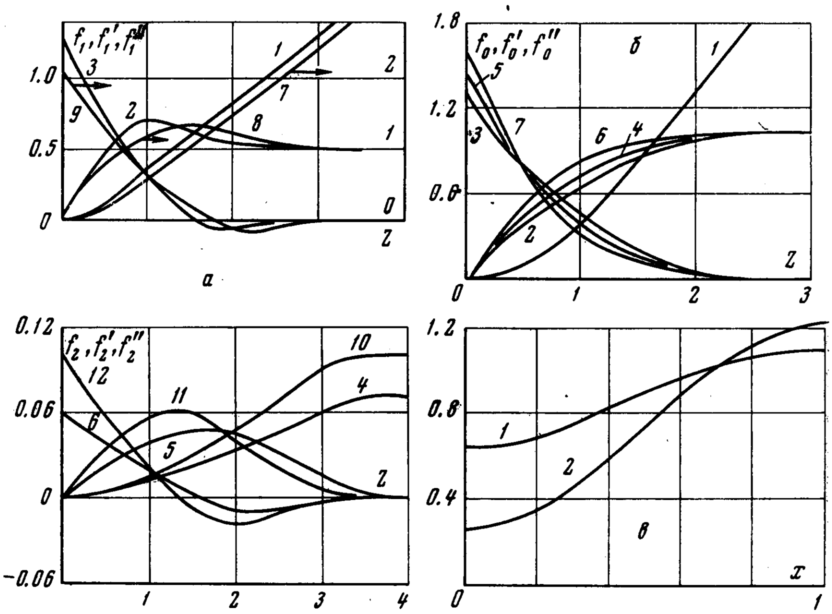
$$f_2'' - (2.85f_2' + 2.74f_1 + 0.41f_2')f_2' + (2f_0 + 1.7f_1)f_1'' + 2.85f_0''f_2 = 0.625(f_0'f_1' - f_0''f_1 - A_1) + 0.86(f_1'^2 - f_1f_1'' - A_1^2) + 0.3(f_1'^2 - A_1^2). \tag{14}$$

На фигуре, *а, б* представлены результаты приближенного решения уравнений (12) — (14) для $A_1 = 0.5$ и 1.0, проведенного методом итераций на электронно-моделирующей машине ЭМУ-10. На фигуре, *в* приведены результаты расчета распределения напряжения трения вдоль преграды в окрестности критической точки на участке $0 \leqslant x \leqslant 1$ по формуле

$$\tau^* = \frac{\tau_w}{(\tau_w)_{\Omega=0}} = \frac{1}{x\,[f_0''(0)]_{\Omega=0}}\left[xf_0''(0) - \sum_{n=1,2}\frac{1}{\alpha_n}f_n''(0)J_1(\alpha_n x)\right] \tag{15}$$

где индекс $\Omega = 0$ соответствует случаю натекания на преграду безвихревого потока.

Из последнего графика следует, что завихренность набегающего потока вызывает уменьшение напряжения трения вблизи критической точки; при удалении от критической точки напряжение трения возрастает. Согласно (15) напряжение трения меняется вдоль преграды периодически, чередование локального уменьшения и увеличения τ_w свидетельствует о наличии периодически распределенных вихрей вблизи преграды. Средняя по преграде величина напряжения трения (расстояние, на котором производится осреднение, достаточно велико по сравнению с длиной волны λ_1) превышает τ_w для безвихревого потока при $A_1 = 0.5$ в 1.11, а при $A_1 = 1.0$ в 1.26 раза.



а — график функций f_n $(n = 1, 2)$ в разложении (7): *1* — (f_1), *2* — (f_1'), *3* — (f_1''), *4* — (f_2), *5* — (f_2'), *6* — (f_2'') при $A_1 = 0.5$; *7* — (f_1), *8* — (f_1'), *9* — (f_1''), *10* — (f_2), *11* — (f_2'), *12* — (f_2'') при $A_1 = 1.0$
б — график функции f_0 в разложении (7): *1* — (f_0), *2* — (f_0'), *3* — (f_0'') при $A_1 = 0$; *4* — (f_0'), *5* — (f_0'') при $A_1 = 0.5$; *6* — (f_0'), *7* — (f_0'') при $A_1 = 1.0$
в — распределение напряжения трения вдоль преграды на участке $0 \leqslant x \leqslant 1$: *1* — (τ^*) при $A_1 = 0.5$, *2* — (τ^*) при $A_1 = 1.0$

Поступило 15 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Kueth A. M., Willmarth W. W. Stagnation point fluctuation on a body of revolution. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 6, p. 714.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.