ДВИЖЕНИЕ ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

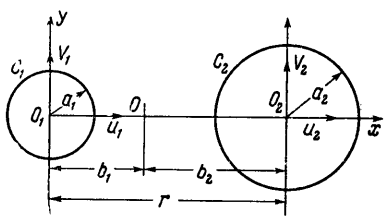
В. Ю. МАЗУР

(*Одесса*)

Решение задачи о движении двух круговых цилиндров в идеальной жидкости проводилось ранее приближенными методами с погрешностью, возрастающей по мере приближения цилиндров друг к другу [1, 2]. В данной работе приводится точное решение задачи для произвольного движения цилиндров.

Определены потенциал скорости, кинетическая энергия и силы, действующие на цилиндры со стороны жидкости.

1. Рассмотрим движение двух цилиндров с радиусами a_1 и a_2 в идеальной жидкости, которая покоится на бесконечности. Берем плоскость xy, перпендикулярную к образующим цилиндров. Пусть ось x в рассматриваемый момент времени совпадает с линией, соединяющей центры окружностей C_1 и C_2 (фигура). Начало координат помещаем в центре первой окружности, тогда комплексный потенциал абсолютного течения представляется выражением



$$W = -\frac{a_1^2}{z}(U_1 + iV_1) + U_1 f_{11}(z) + V_1 f_{12}(z) - \frac{a_2^2}{z-r}(U_2 + iV_2) + U_2 f_{21}(z) + V_2 f_{22}(z) \tag{1.1}$$

Здесь U_1, V_1, U_2, V_2 — составляющие скорости цилиндров, r — расстояние между центрами окружностей, f_{ik} — аналитические функции в области D, ограниченной двумя круговыми контурами. Функции f_{ik} удовлетворяют условиям

на окружности C_1

$$\operatorname{Im} f_{11} = 0, \quad \operatorname{Im} f_{12} = 0, \quad \operatorname{Im} f_{21} = \operatorname{Im}\frac{a_2^2}{z-r}, \quad \operatorname{Im} f_{22} = \operatorname{Re}\frac{a_2^2}{z-r} + \text{const} \tag{1.2}$$

на окружности C_2

$$\operatorname{Im} f_{11} = \operatorname{Im}\frac{a_1^2}{z}, \quad \operatorname{Im} f_{12} = \operatorname{Re}\frac{a_1^2}{z} + \text{const}, \quad \operatorname{Im} f_{21} = 0, \quad \operatorname{Im} f_{22} = 0 \tag{1.3}$$

на бесконечности

$$df_{ik} / dz \,|_{z\to\infty} = 0, \qquad f_{ik}\,|_{r\to\infty} = 0 \tag{1.4}$$

Используя методику работы [3], находим

$$W = W_1 + W_2$$

$$W_1 = U_1 W_{11} + V_1 W_{12}, \qquad W_2 = U_2 W_{21} + V_2 W_{22} \tag{1.5}$$

$$W_{11} = -\frac{a_1^2}{z} + 2a_1 \operatorname{sh} h_{11} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-2kh_{12}}}{\operatorname{sh} kh} \cos k\zeta_1$$

$$W_{12} = -\frac{a_1^2}{z} i + 2a_1 \operatorname{sh} h_{11} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-2kh_{12}}}{\operatorname{sh} kh} \sin k\zeta_1$$

$$W_{21} = -\frac{a_2^2}{z-r} - 2a_2 \operatorname{sh} h_{21} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-2kh_{22}}}{\operatorname{sh} kh} \cos k\zeta_2$$

$$W_{22} = -\frac{a_2^2}{z-r} i - 2a_2 \operatorname{sh} h_{21} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-2kh_{22}}}{\operatorname{sh} kh} \sin k\zeta_2$$

Здесь

$$\zeta_1 = -i \ln \frac{a_1 - \beta_1 z}{z - \beta_1 a_1}, \qquad \zeta_2 = -i \ln \frac{a_2 - \beta_2 (r - z)}{r - z - \beta_2 a_2} \tag{1.6}$$

$$\beta_1 = \frac{r^2 - a_2^2 + a_1^2}{2ra_1} + \left[\left(\frac{r^2 - a_2^2 + a_1^2}{2ra_1}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

$$\beta_2 = \frac{r^2 - a_1^2 + a_2^2}{2ra_2} + \left[\left(\frac{r^2 - a_1^2 + a_2^2}{2ra_2}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

$$h_{11} = \ln \beta_1, \qquad h_{21} = \ln \beta_2, \qquad h = \ln n$$

$$h_{12} = {}^1/_2 \ln n\beta_1, \qquad h_{22} = {}^1/_2 \ln n\beta_2$$

где n — модуль области D, определяемый соотношением

$$n = \frac{r^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} + \left[\left(\frac{r^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}\right)^2 - 1\right]^{1/2} \tag{1.7}$$

Ряды в (1.5) сходятся при любых значениях $r > a_1 + a_2$. В частном случае, когда $a_2 \to 0$, комплексный потенциал W принимает вид

$$W|_{a_2 \to 0} = -a_1^2 z^{-1} (U_1 + iV_1) \tag{1.8}$$

т. е. представляет собой потенциал движения цилиндра в неограниченной жидкости.

2. Кинетическая энергия, заключенная в слое жидкости единичной высоты при движении цилиндров, может быть определена выражением

$$T = -\frac{1}{2} \rho a_1 \int_0^{2\pi} \varphi (U_1 \cos \Theta_1 + V_1 \sin \Theta_1) \, d\Theta_1 -$$

$$-\frac{1}{2} \rho a_2 \int_0^{2\pi} \varphi (U_2 \cos \Theta_2 + V_2 \sin \Theta_2) \, d\Theta_2 \tag{2.1}$$

Здесь $\varphi = \operatorname{Re} W$ — граничное значение потенциала скорости на окружностях C_1 и C_2.

Из (1.5) находим

$$\varphi = \operatorname{Re} W|_{z = a_1 e^{i\Theta_1}} = \varphi(\Theta_1, \xi_1, \xi_2), \qquad \varphi = \operatorname{Re} W|_{z = r + a_2 e^{i\Theta_2}} = \varphi(\Theta_2, \xi_1, \xi_2)$$

Далее, используя (1.6), нетрудно установить соотношения

$$\Theta_i = f(\xi_k) \qquad (i, k = 1, 2)$$

При этом интегралы, входящие в (2.1), с применением теоремы о вычетах вычисляются точно

$$T = \frac{\rho\pi a_1^2}{2}\mu_1(U_1^2+V_1^2)+\frac{\rho\pi a_2^2}{2}\mu_2(U_2^2+V_2^2)-$$

$$-\rho\pi\left[\frac{a_1^2a_2^2}{r^2}+2(a_1^2\operatorname{sh}^2h_{11}+a_2^2\operatorname{sh}^2h_{21})\sum_{k=1}^{\infty}k\operatorname{cth}khe^{-2kh}\right](U_1U_2+V_1V_2)$$

Здесь

$$\mu_1 = 1+4\operatorname{sh}^2h_{11}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-k(2h_{11}+h)}}{\operatorname{sh}kh},\qquad \mu_2 = 1+4\operatorname{sh}^2h_{21}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-k(2h_{21}+h)}}{\operatorname{sh}kh} \tag{2.2}$$

Отсюда, используя соотношения (1.6), окончательно получаем

$$T = \lambda_1(U_1^2+V_1^2)+\lambda_2(U_2^2+V_2^2)+2\lambda_3(V_1V_2-U_1U_2) \tag{2.3}$$

Здесь

$$\lambda_1 = \frac{\rho\pi a_1^2\mu_1}{2},\qquad \lambda_2=\frac{\rho\pi a_2^2\mu_2}{2},\qquad \lambda_3=\frac{\rho\pi a_1^2a_2^2}{r^2}\mu_3$$

$$\mu_1 = 1+\frac{r^4-2r^2(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2-a_1^2)^2}{r^2a_1^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-k(2h_{11}+h)}}{\operatorname{sh}kh}$$

$$\mu_2 = 1+\frac{r^4-2r^2(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2-a_1^2)^2}{r^2a_2^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-k(2h_{21}+h)}}{\operatorname{sh}kh}$$

$$\mu_3,\mu_4 = 1+\frac{r^4-2r^2(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2-a_1^2)^2}{a_1^2a_2^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\operatorname{cth}kht^{-2kh}$$

Рассмотрим частный случай, соответствующий движению цилиндра у стенки. Полагая $a_1=a_2=a$, $U_1=-U_2$, $V_1=V_2$, $r=2b$, из (2.2) находим

$$T=\rho\pi a^2(U^2-V^2)\left(1+4\operatorname{sh}^2h_w\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-4kh_w}}{\operatorname{sh}2kh_w}+\frac{a^2}{4b^2}+\right.$$

$$\left.+4\operatorname{sh}^2h_w\sum_{k=1}^{\infty}k\operatorname{cth}2kh_we^{-4kh_w}\right)\quad\left(\begin{array}{c}h_w=\ln n_w={}^1/_2h\\ n_w=b/a+\sqrt{b^2/a^2-1}\end{array}\right) \tag{2.4}$$

Здесь n_w — модуль области, ограниченной контуром сечения цилиндра и стенкой, b — расстояние от центра круга до стенки.

Разложим в ряд отношение $a^2/4b^2$. Принимая во внимание, что $h_w>0$, имеем

$$\frac{a^2}{4b^2}=\frac{1}{4\operatorname{ch}^2h_w}=-\operatorname{sh}^2h_w\frac{d}{dh_w}\frac{e^{-4h_w}}{1-e^{-4h_w}}=$$

$$=-\operatorname{sh}^2h_w\frac{d}{dh_w}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-4kh_w}=4\operatorname{sh}^2h_w\sum_{k=1}^{\infty}ke^{-4kh_w}$$

При этом соотношение (2.4) принимает вид

$$T = 2T_w, \quad T_w = \frac{\rho\pi a^2}{2}\mu(U^2 + V^2), \quad \mu = 1 + 4\operatorname{sh}^2 h_w \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{3kh_w}}{\operatorname{sh} kh_w}$$

что совпадает с результатами [3].

3. Определим силы, действующие на цилиндры со стороны жидкости. При движении тел заданной формы в идеальной жидкости потенциал скорости, а следовательно, и кинетическая энергия жидкости полностью определяются обобщенными координатами тел q_i и обобщенными скоростями $q_i^{\cdot}$. Ввиду этого жидкую среду можно рассматривать как систему с идеальными связями, имеющую ограниченное число степеней свободы, и силы, действующие на систему, вычислять с помощью уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \tag{3.1}$$

Здесь i — число степеней свободы движущихся тел, T — кинетическая энергия жидкости, Q_i — обобщенные силы, действующие на жидкость.

В рассматриваемом случае в качестве обобщенных координат принимаем

$$q_1 = -b_1, \quad q_2 = y_{01}, \quad q_3 = b_2, \quad q_4 = y_{02}$$

где y_{0i} — расстояние центров окружностей C_1 и C_2 от оси x (фигура). Тогда

$$q_1^{\cdot} = U_1, \quad q_2^{\cdot} = V_1, \quad q_3^{\cdot} = U_2, \quad q_4^{\cdot} = V_2$$

Обобщенные силы могут быть представлены в виде

$$Q_1 = -X_1, \quad Q_2 = -Y_1, \quad Q_3 = -X_2, \quad Q_4 = -Y_2$$

Здесь X_i, Y_i — проекции главного вектора гидродинамических давлений, действующих на цилиндры.

Значения производных $\partial T / \partial q_i$ и $\partial T / \partial q_i^{\cdot}$ вычисляем, используя (2.3). Окончательно получаем

$$X_1 = -2\lambda_1\frac{dU_1}{dt} + 2\lambda_3\frac{dU_2}{dt} - (2U_1U_2 - U_1^2 + V_1^2)\frac{d\lambda_1}{dr} - (U_2^2 + V_2^2)\frac{d\lambda_2}{dr} + 2(U_2^2 - V_1V_2)\frac{d\lambda_3}{dr}$$

$$Y_1 = -2\lambda_1\frac{dV_1}{dt} - 2\lambda_3\frac{dV_2}{dt} - 2V_1(U_2 - U_1)\frac{d\lambda_1}{dr} - 2V_2(U_2 - U_1)\frac{d\lambda_3}{dr}$$

$$X_2 = -2\lambda_2\frac{dU_2}{dt} + 2\lambda_3\frac{dU_1}{dt} + (2U_2U_1 - U_2^2 + V_2^2)\frac{d\lambda_2}{dr} + (U_1^2 + V_1^2)\frac{d\lambda_1}{dr} - 2(U_1^2 - V_1V_2)\frac{d\lambda_3}{dr}$$

$$Y_2 = -2\lambda_2\frac{dV_2}{dt} - 2\lambda_3\frac{dV_1}{dt} - 2V_2(U_2 - U_1)\frac{d\lambda_2}{dr} - 2V_1(U_2 - U_1)\frac{d\lambda_3}{dr} \tag{3.2}$$

Легко убедиться, что соотношения (3.2) удовлетворяют равенствам

$$\frac{dT}{dt} = -X_1U_1 - Y_1V_1 - X_2U_2 - Y_2V_2 \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial U_1} + \frac{\partial T}{\partial U_2}\right) = -X_1 - X_2, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial V_1} + \frac{\partial T}{\partial V_2}\right) = -Y_1 - Y_2$$

Уравнения (3.3) представляют собой аналитическую запись теоремы об изменении кинетической энергии системы и закона количества движения.

Автор благодарит Н. С. Сторожука за помощь при выполнении данной работы.

Поступило 16 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Блох Э. Д., Гиневский Л. С. О движении системы тел в идеальной жидкости. НТО судостроительной пром-ти им. Крылова, 1963, вып. 47.
2. Патарая Н. Н. Применение метода конформного отображения к решению задачи обтекания двух тел. Тр. Тбилисск. гос. ун-та, 1961, т. 84.
3. Мазур В. Ю. Движение кругового цилиндра вблизи вертикальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.