

## УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ В ТЕОРИИ СВОБОДНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Н. И. АКАТНОВ, А. П. КУЗНЕЦОВ

(Ленинград)

Предлагаются полуэмпирические формулы для коэффициента турбулентной вязкости и масштаба турбулентности, входящих в систему уравнений свободного турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости, которая состоит из уравнений неразрывности, движения и баланса средней энергии турбулентных пульсаций. Преимущество формул перед имеющимися состоит в том, что две эмпирические постоянные, входящие в систему уравнений, имеют близкие значения для круглой и плоской турбулентных струй, а также для турбулентного пограничного слоя на краю полубесконечного однородного потока с неподвижной жидкостью. Вычисленные в работе распределения средней скорости и средней энергии турбулентных пульсаций хорошо совпадают с экспериментальными.

**1. Основные уравнения и дополнительные соотношения.** Будем рассматривать свободный турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Ось  $x$  направим вдоль пограничного слоя вниз по течению. Ось  $y$  будет декартовой координатой в плоском пограничном слое или радиальной координатой цилиндрической системы координат, если пограничный слой имеет осевую симметрию (круглая струя). Проекция средней скорости на оси  $x$  и  $y$  обозначим соответственно  $u$  и  $v$ , а проекции пульсационной составляющей скорости — соответственно  $u'$  и  $v'$ . Проекцию пульсационной составляющей скорости на направление, перпендикулярное к плоскости  $xOy$ , обозначим  $w'$ .

Будем считать турбулентность изотропной, т. е.

$$\langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle, \quad \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right\rangle$$

$$\left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 \right\rangle = \dots$$

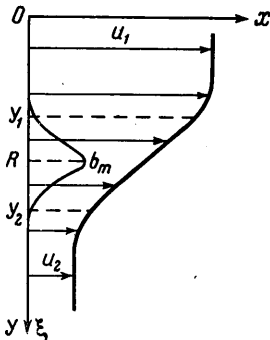
Вязкие напряжения будем считать пренебрежимо малыми по сравнению с турбулентными, а также будем пренебрегать переносом пульсационного движения за счет вязкой диффузии. При сделанных предположениях исходную систему уравнений движения и баланса средней кинетической энергии турбулентных пульсаций запишем в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} (y^k \langle u'v' \rangle)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^k u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^k v) = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} = & - \frac{1}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^k \left\langle v' \left( \frac{p'}{\rho} + \frac{3}{2} u'^2 \right) \right\rangle \right] - \\ & - \langle u'v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} - 15\nu \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \\ b = & \frac{3}{2} \langle u'^2 \rangle \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $k = 0$  соответствует плоскому течению, а  $k = 1$  — осесимметричному,  $-\rho \langle u'v' \rangle = \tau_{xy}$  — касательное напряжение турбулентного трения,  $p'$  — пульсационная составляющая давления (осредненное давление считается постоянным),  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. Для напряжения турбулентного трения, диффузии и диссипации пульсационной энергии примем следующие выражения [1-4]:



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \\ - \left\langle v' \left( \frac{p'}{\rho} + \frac{3}{2} u'^2 \right) \right\rangle = & \varepsilon \frac{\partial b}{\partial y} \\ 15\nu \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = & c \frac{\sqrt{\bar{b}} b}{l} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\varepsilon(x)$  — кинематический коэффициент турбулентной «вязкости»,  $c$  — эмпирическая постоянная,  $b_m$  — максимальное в данном сечении значение  $b$ . Предполагая, что в данном сечении  $\varepsilon$  — величина постоянная, примем

$$\varepsilon = a(\sqrt{\bar{b}})_c L \quad (1.4)$$

где  $a$  — эмпирическая постоянная. Характерной длиной  $L$  в формуле (1.4) будем считать толщину пограничного слоя, в пределах которой  $\partial u / \partial y$  имеет большие значения. Так, если  $u_1$  и  $u_2$  — скорости на границах пограничного слоя (фиг. 1), а  $y_1$  и  $y_2$  — координаты  $y$  точек, в которых разность  $u - u_2$  равна соответственно  $0.9(u_1 - u_2)$  и  $0.1(u_1 - u_2)$ , то условимся считать, что  $L = y_2 - y_1$ . В качестве  $(\sqrt{\bar{b}})_c$  примем среднее значение величины  $\sqrt{\bar{b}}$  на длине  $L$ . В случае плоского течения

$$(\sqrt{\bar{b}})_c = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\bar{b}} dy, \quad \varepsilon = a \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\bar{b}} dy \quad (1.5)$$

Для осесимметричного пограничного слоя имеем

$$(\sqrt{\bar{b}})_c = \frac{2}{y_2^2 - y_1^2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\bar{b}} y dy, \quad \varepsilon = \frac{2a}{y_1 + y_2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\bar{b}} y dy \quad (1.6)$$

Величину  $l$ , входящую в формулу для удельной диссипации турбулентной энергии, примем пропорциональной ширине области турбулентных пульсаций скорости и определим для плоского движения как

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{b}{b_m} \right)^{1/2} dy \quad (1.7)$$

Для круглой струи  $l$  получим следующим образом. Пусть пограничный слой представляет собой кольцевую область (см. фиг. 1), в которой  $R = y$ , где  $b = b_m$ , а  $\xi$  — координата, отсчитываемая вдоль  $y$  от точки  $y = R$ .

Определим величину  $l$  соотношением<sup>1</sup>

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{b}{b_m}\right)^{1/2} y dy = \int_{-R}^{\infty} (R + \xi) \left(\frac{b}{b_m}\right)^{1/2} d\xi =$$

$$= \int_{-\xi_1}^{1/2} (R + \xi) d\xi = R \left(\frac{l}{2} + \xi_1\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{4} - \xi_1^2\right) \quad (1.8)$$

При этом, если  $1/2 l < R$ , то  $\xi_1 = 1/2 l$ , а при  $1/2 l > R$  положим  $\xi_1 = R$ . Из (1.8) при  $R \rightarrow \infty$  следует (1.7), а для круглой струи, полагая  $R \ll l/2$ , или в пределе  $R = 0$ , найдем

$$l = \left[ 8 \int_0^{\infty} \left(\frac{b}{b_m}\right)^{1/2} y dy \right]^{1/2} \quad (1.9)$$

**2. Интегрирование системы уравнений и результаты.** В качестве примера рассмотрим течение в плоской затопленной турбулентной струе. Граничные условия задачи имеют вид

$$v = 0, \partial u / \partial y = 0, \partial b / \partial y = 0 \quad (y = 0) \quad u = 0, b = 0 \quad (y = \pm \infty) \quad (2.1)$$

Интенсивность струи зададим с помощью ее импульса

$$J_0 = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy \quad (2.2)$$

Найдем решение задачи, соответствующее основному участку струи. Будем разыскивать решение уравнений (1.1) и (1.2) в виде

$$u / u_m = F'(\eta), \quad b / u_m^2 = \varphi(\eta), \quad F = \psi / u_m \delta, \quad \eta = y / \delta \quad (2.3)$$

Здесь  $u_m$  — скорость на оси струи,  $\psi$  — функция тока,  $\delta(x)$  — условная ширина струи. Подставляя (2.3) в (1.5), получаем

$$\varepsilon = a a_\varphi u_m \delta \quad \left( a_\varphi = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{\varphi} d\eta \right) \quad (2.4)$$

Условие (2.2) дает связь между  $u_m$  и  $\delta$  в виде

$$u_m^2 \delta = K_0 = \text{const} \quad \left( K_0 = J_0 \left[ \rho \int_{-\infty}^{\infty} F'^2 d\eta \right]^{-1} \right) \quad (2.5)$$

Уравнение (1.1) с условиями (2.1) после подстановки в них (2.3) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{a a_\varphi}{d\delta/dx} F''' + \frac{1}{2} (FF')' = 0 \quad (2.6)$$

$$F = 0, \quad F'' = 0 \quad (\eta = 0); \quad F' = 0 \quad (\eta = \infty) \quad (2.7)$$

Из (2.6) видно, что подобие профилей скорости существует при условии  $d\delta/dx = \text{const } a a_\varphi$ . Далее примем

$$d\delta/dx = a a_\varphi \quad (2.8)$$

<sup>1</sup> Предполагаем, что в (1.8) интегралы с верхним пределом  $\infty$  и при любых  $R$  сходятся.

Хорошо известным решением уравнения (2.6), удовлетворяющим условиям (2.7), будет  $F = 2\text{th}(\frac{1}{2}\eta)$ .

Используя (2.3), приведем уравнение (1.2) с граничными условиями (2.1) к виду

$$\varphi'' + \frac{1}{2}F\varphi' + \left(F' - \frac{c\sqrt{\varphi_m}}{aa_\varphi n}\right)\varphi + F'^2 = 0 \quad \left(n = 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_m}} d\eta\right) \quad (2.9)$$

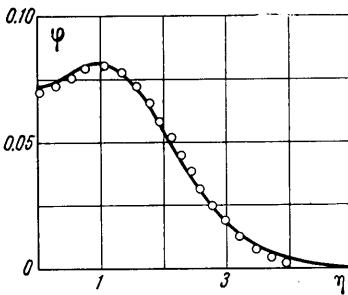
$$\varphi' = 0 \quad (\eta = 0), \quad \varphi = 0 \quad (\eta = \infty) \quad (2.10)$$

Значение постоянной  $c$ , входящей в уравнение (2.9), определялось путем сравнения результатов интегрирования уравнения (2.9) с экспериментальными данными Бредбери [8].

Уравнение (2.9) численно интегрировалось при соблюдении условий (2.10) при различных значениях  $\beta = c\sqrt{\varphi_m}/aa_\varphi n$ , причем  $\beta$  подбиралось так, чтобы величины  $a_\varphi$  и  $n$  оказались близкими к значениям, найденным по данным [8].

На фиг. 2 представлен график функции  $\varphi(\eta)$ , найденный численным интегрированием (2.9) при  $c = 2.10$  ( $a_\varphi = 0.650$ ,  $n = 5.83$ ). Там же точками нанесены данные [6]. Величина универсальной постоянной  $a$  вычислена по данным [8] с помощью формулы

$$a = \frac{dy_{0.5}/dx}{\eta_{0.5}a_\varphi}$$

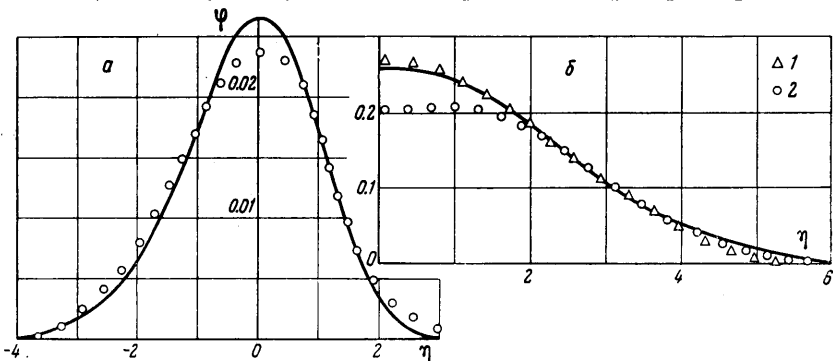


Фиг. 2

(где  $y_{0.5}$  — координата точки, в которой  $u = 0.5u_m$ ,  $\eta_{0.5}$  — значение  $\eta$ , соответствующее  $F' = 0.5$ ) и оказалась равной  $a = 0.095$ . Из соотношений (2.8) и (2.5) имеем

$$\delta = aa_\varphi(x + x_0), \quad u_m = \frac{K_0}{\sqrt{aa_\varphi(x + x_0)}} \quad (2.11)$$

Величина  $aa_\varphi$  в (2.11) пропорциональна коэффициенту структуры турбулентности, используемому в известном решении Гертлера [10].



Фиг. 3

Найденное аналогичным образом распределение  $\varphi(\eta)$  для течения в плоском слое смешения приведено на фиг. 3, а, где точками даны результаты экспериментальных исследований [7]. Для круглой струи на фиг. 3, б представлена зависимость величин  $(\frac{2}{3}\varphi)^{1/2}$  от  $\eta$ , а точками 1 и 2 приведены экспериментальные данные работ [5], [6] соответственно; причем в

случае слоя смешения  $\varphi = b / u_0^2$ , где  $u_0$  — скорость равномерного свободного потока.

Экспериментальные константы  $a$  и  $c$  для случая плоского слоя смешения, случая плоской струи и случая круглой струи имеют соответственно следующие значения:

$$a = 0.081, 0.095, 0.084; \quad c = 2.1, 2.1, 1.8$$

Для плоского следа за цилиндром [8] значения постоянных  $a$  и  $c$  значительно отличаются от приведенных выше.

#### ЛИТЕРАТУРА

Поступило 20 I 1970

1. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Сер. Физ., 1942, т. 6, № 1—2, стр. 56—58.
2. Prandtl L., Wienghardt K. Über ein neues Formelsystem für die aus gebildete Turbulenz. Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.—Phys., 1945, H. 6.
3. Rotta J. C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, Bd. 1. Z. Physik, 1951, Bd. 129, Nr 5.
4. Джаугаштин К. Е. Распределение пульсационной энергии в осесимметричной турбулентной струе электропроводящей жидкости, распространяющейся в продольном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1968, № 4.
5. Corrsin S. Investigation of flow in an axially symmetrical heated jet of air. NACA Wartime Rep., W—94, Dezember 1943.
6. Corrsin S., Uberoi M. S. Further experiments on the flow and heated transfer in a heated turbulent air jet. NACA Rep., 1950, No. 998.
7. Liepmann H. W., Laufer J. Investigation of free turbulent mixing. Tech. Notes NACA, 1947, No. 1257.
8. Bradbury L. T. S. The structure of a self-preserving turbulent plane jet. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 1, pp. 31—64.
9. Townsend A. A. Measurements in the turbulent wake of a cylinder. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A., 1947, vol. 190, No. 1023, pp. 551—561.
10. Görtler H. Berechnung von Ausgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. ZAMM, 1942, Bd 22, H. 5, S. 244.