АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ОТСОСЕ

Э. А. ГЕРШБЕЙН

(*Москва*)

Получено асимптотическое решение уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя для плоскопараллельного и осесимметричного течения газа при больших значениях параметра отсоса.

Показано, что корни характеристического уравнения, к которому сводится в первом приближении решение уравнений диффузии, могут быть найдены в радикалах в случае присутствия во внешнем потоке газа химических компонент, которые по своим диффузионным свойствам могут быть объединены в $r \leqslant 5$ группы. При этом число компонент в группах и число компонент в пограничном слое могут быть произвольными.

Получены асимптотические формулы для коэффициента трения, градиентов концентрации и температур и диффузионных потоков компонент на поверхности тела. В качестве примеров приведены формулы для теплового потока в тело при течении диссоциированного воздуха и диссоциированной смеси N_2 и CO_2.

Приводится численное решение уравнений пограничного слоя в случае течения диссоциированного воздуха. Асимптотическое решение сравнивается с численным и устанавливаются области применимости асимптотических формул.

Ранее в работе [1] было получено асимптотическое решение уравнений пограничного слоя для течения несжимаемой жидкости при интенсивном отсосе газа. В работе [2] было получено асимптотическое решение уравнений пограничного слоя в случае плоскопараллельного течения сжимаемого газа. В работе [3] это решение обобщается на случай осесимметричного течения газа.

1. Уравнения ламинарного многокомпонентного пограничного слоя для плоского и осесимметричного течения газа при пренебрежении термодиффузией и химическими реакциями внутри слоя имеют вид [4]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r^k) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r^k) = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\frac{dP}{dx} - \sum_{i=1}^{n} c_{pi} I_i \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial C_i}{\partial x} + v\frac{\partial C_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y} I_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (C_i m)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m^2}{\mu m_j} S_{ij}(C_i I_j - C_j I_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} I_i = 0, \quad P = \rho\frac{R}{m}T, \quad S_{ij} = \frac{\mu}{\rho D_{ij}}, \quad \frac{1}{m} = \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{m}$$

Здесь x и y — координаты, направленные вдоль поверхности тела и по нормали к ней; u и v — составляющие скорости в направлении этих координат; r — расстояние до оси симметрии тела, $k=0$ для плоскопараллельного течения; $k=1$ для осесимметричного течения; P, ρ, T, μ, c_p, λ и m — давление, плотность, температура, вязкость, теплоемкость, теплопроводность и молекулярный вес смеси, состоящей из n химических компонент; m_i, C_i, c_{pi} и I_i — молекулярный вес, массовая концентрация, теплоемкость и массовый диффузионный поток i-й компоненты; D_{ij} и S_{ij} — бинарный коэффициент диффузии и число Шмидта. Последние уравнения (1.1) — соотношения Стефана — Максвелла, записанные для массовых концентраций.

Система уравнений (1.1) решается при следующих граничных условиях:

$$u\to u_e(x),\quad T\to T_e(x),\quad C_i\to C_{ie}\quad (i=1,\ldots,n)\quad \text{при } y\to\infty$$

$$u=0,\quad \rho v=G(x),\quad T=T_w(x),\quad C_i=C_{iw}(x)\quad (i=1,\ldots,n)\quad \text{при } y=0 \tag{1.2}$$

Отметим, что в общем случае концентрации компонент $C_{iw}(i=1,\ldots,n)$ неизвестны до решения задачи и являются определяемыми величинами. Однако так как будет найдено аналитическое решение уравнений (1.1) при больших значениях параметра отсоса, то, присоединив к граничным условиям, соответствующим конкретной физической задаче, полученные аналитические зависимости диффузионных потоков, градиентов температур и концентраций компонент на поверхности тела от $(\rho v)_w$, T_w, C_{iw} $(i=1,\ldots,n)$, получим замкнутую систему уравнений для определения состава газа на поверхности тела.

Введем новые переменные и безразмерные функции по формулам

$$\xi=\int_0^x \mu_e\rho_e u_e r^{2k}dx,\qquad \eta=\frac{u_e r^k\varphi(\xi)}{\sqrt{2\xi}}\int_0^y \frac{\rho m S_{pq}}{l}dy$$

$$\varphi(\xi)=\frac{-r^k\sqrt{2\xi}}{\xi_x'}G[x(\xi)],\qquad f_\eta'=lS\frac{u}{u_e},\qquad \varepsilon=\frac{1}{\varphi(\xi)}$$

$$\theta=\frac{T}{T_e},\qquad X_i=\frac{r^k\sqrt{2\xi}}{\xi_x'\varphi(\xi)}I_i\quad (i=1,\ldots,n),\qquad l=\frac{\mu\rho}{\mu_e\rho_e} \tag{1.3}$$

$$\beta_1=\frac{2\xi}{u_e}\frac{du_e}{d\xi},\qquad \beta_2=\frac{2\xi}{T_e}\frac{dT_e}{d\xi},\qquad \alpha=\frac{u_e^2}{c_{pe}T_e},\qquad S=\frac{1}{mS_{pq}}$$

Преобразуем систему уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) к безразмерному виду

$$\rho v=-r^{-k}\sqrt{2\xi}[\varphi\xi_x'+\varepsilon(\gamma\xi_x'+2\xi f_\eta'\eta_x')] \tag{1.4}$$

$$(S^{-1}\psi_\eta')_\eta'+\psi_\eta'=\varepsilon^2[-\gamma\psi_\eta'+\beta lS(\psi^2-\rho_e/\rho)+2\xi f_\eta'\psi_\xi'] \tag{1.5}$$

$$f_\eta'=lS\psi \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{c_p}{c_{pe}}\frac{1}{\sigma S}\theta_\eta'\right)_\eta'+\left(\frac{c_p}{c_{pe}}-\sum_{i=1}^n\frac{c_{pi}}{c_{pe}}X_i\right)\theta_\eta'+\frac{\alpha}{S}\psi_\eta'^2=$$

$$=\varepsilon^2\frac{c_p}{c_{pe}}\left[-\gamma\theta_\eta'+\beta_2\left(1-\frac{c_{pe}m_e}{c_pm}\right)f_\eta'\theta+2\xi f_\eta'\theta_\xi'\right], \tag{1.7}$$

$$X_{i\eta}'-C_{i\eta}'=\varepsilon^2(\gamma C_{i\eta}'-2\xi f_\eta'C_{i\xi}')\qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.8}$$

$$g_{i\eta}' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(g_i X_j - g_j X_i) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.9}$$

$$\gamma = \left(1 - 2\xi \frac{\varphi_\xi'}{\varphi}\right) f + 2\xi f_\xi', \quad g_i = mC_i, \; m = \sum_{i=1}^{n} g_i, \quad a_{ij} = \frac{S_{ij}}{m_j S_{pq}}$$

$$\begin{gathered} \psi \to 1, \quad \theta \to 1, \quad C_i \to C_{ie} \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при } \eta \to \infty \\ f = 0, \; \psi = 0, \; \theta = \theta_w(\xi), \; C_i = C_{iw}(\xi) \; (i = 1, \ldots, n) \text{ при } \eta = 0 \end{gathered} \tag{1.10}$$

2. Решение системы уравнений (1.5)—(1.9) с граничными условиями (1.10) при интенсивном отсосе газа будем искать в виде

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= f_0(\xi, \eta) + \varepsilon^2 f_2(\xi, \eta) + \ldots \\ \theta(\xi, \eta) &= \theta_0(\xi, \eta) + \varepsilon^2 \theta_2(\xi, \eta) + \ldots \\ C_i(\xi, \eta) &= C_{i0}(\xi, \eta) + \varepsilon^2 C_{i2}(\xi, \eta) + \ldots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в систему уравнений (1.5)—(1.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие уравнения для определения $f_k(\xi, \eta)$, $\theta_k(\xi, \eta)$, $C_{ik}(\xi, \eta)$ $(k \geqslant 0)$ (индекс 0 здесь и далее опущен):

$$(S^{-1}\psi_\eta')_\eta' + \psi_\eta' = 0, \qquad f_\eta' = lS\psi \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{c_p}{c_{pe}} \frac{1}{\sigma S} \theta_\eta'\right)_\eta' + \left(\frac{c_p}{c_{pe}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{pi}}{c_{pe}} X_i\right) \theta_\eta' + \frac{\alpha}{S} \psi_\eta'^2 = 0 \tag{2.3}$$

$$X_{i\eta}' = C_{i\eta}' \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

$$g_{i\eta}' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(g_i X_j - g_j X_i) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

Граничные условия для системы уравнений (2.2)—(2.5) следующие $(k = 0)$:

$$\begin{gathered} \psi \to 1, \quad \theta \to 1, \quad C_i \to C_{ie} \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при } \eta \to \infty \\ f = 0, \; \psi = 0, \; \theta = \theta_w(\xi), \; C_i = C_{iw}(\xi) \; (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при } \eta = 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Граничные условия для остальных приближений $(k > 0)$

$$\begin{gathered} \psi_k \to 0, \quad \theta_k \to 0, \quad C_{ik} \to 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при } \eta \to \infty \\ f_k = \psi_k = \theta_k = C_{ik} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при } \eta = 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

3. Решение системы уравнений (2.2)—(2.5) с граничными условиями (2.6) начнем с решения уравнений диффузии.

Проинтегрировав уравнения (2.4), получим выражения для диффузионных потоков

$$X_i = C_i - C_{ie} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

Далее будем предполагать, что отношения чисел Шмидта, определенных по бинарным коэффициентам диффузии $S_{ij} | S_{pq}$, постоянны [5].

Тогда, подставив выражения (3.1) в уравнения (2.5), получим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$g_{i\eta}' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(g_j C_{ie} - g_i C_{je}) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Частные решения системы уравнений (3.2) будем искать в виде [6]

$$g_i = \gamma_i e^{\lambda\eta} \tag{3.3}$$

Подстановка соотношений (3.3) в систему уравнений (3.2) приводит ее к системе алгебраических уравнений относительно

$$(\sigma_{ii} - \lambda)\gamma_i + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\gamma_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n \ j \neq i)$$

$$\sigma_{ii} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{je}, \qquad \sigma_{ij} = a_{ij}C_{ie} \qquad (j \neq i)$$

Для получения нетривиального решения следует определить корни характеристического уравнения

$$\det \|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\lambda\| = 0, \qquad \delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ij} = 0 \qquad (j \neq i) \tag{3.4}$$

Рассмотрим уравнение (3.4). Аналогичное уравнение рассматривалось также в работе [7]. Можно показать, что уравнение (3.4) не содержит свободного члена, следовательно, существует нулевой корень $\lambda = 0$.

В пограничном слое могут присутствовать компоненты (образованные, например, за счет химических реакций на поверхности тела), которые не содержатся во внешнем потоке газа. В этом случае определяются $(n - l)$ корней характеристического уравнения в виде

$$\lambda_i = -\sum_{j=1}^{l} a_{ij}C_{je} \qquad (i = l + 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

Здесь l — число компонент, присутствующих на внешней границе пограничного слоя.

Таким образом, корни характеристического уравнения (3.4) могут быть получены в виде радикалов для смесей, в которых $l \leqslant 5$, при этом $(n - l)$ может быть произвольным.

Кроме этого во многих случаях удается в смеси газов выделить группы компонент с близкими диффузионными свойствами. Если смесь газов состоит из n химических компонент, причем во внешнем потоке присутствуют l компонент, которые можно разбить на r групп с близкими диффузионными свойствами, то характеристическое уравнение (3.4) можно представить в следующем виде:

$$\lambda \prod_{k=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{n_k - 1} \prod_{k=l+1}^{n} (\lambda - \lambda_k) \det \|\sigma_{ij}^* - \delta_{ij}^*\lambda\| = 0 \tag{3.6}$$

При этом степень уравнения $\det\|\sigma_{ij}^* - \delta_{ij}^*\lambda\| = 0$ будет равна $(r - 1)$.

Здесь n_k — число компонент в группе с номером k. Корни уравнения (3.6) λ_k при $k = l + 1, \ldots, n$ определяются выражениями (3.5)

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{r} a_{kj}\sigma_{je} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n_1} C_i, \ldots, \qquad \sigma_r = \sum_{i=t}^{l} C_i \qquad (t = l - n_r + 1) \tag{3.7}$$

Суммирование в (3.7) ведется по числу групп. Для $i, j = 1, \ldots, r-1$, $j \neq i$ $(i, j$ — номера групп)

$$\sigma_{ij}^{*} = a_{ij}\sigma_{ie}, \qquad \sigma_{ii}^{*} = -\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\sigma_{je}$$

$$\delta_{ij}^{*} = 0, \quad \delta_{ii}^{*} = 1, \quad \sigma_{ir}^{*} = -\sigma_{ie}^{*} \quad (i = 1, \ldots r), \quad \delta_{rr}^{*} = 0$$

Таким образом, корни характеристического уравнения (3.4) можно найти в радикалах при разбиении компонент, присутствующих во внешнем потоке, на число групп $r \leqslant 5$, причем число компонент в каждой группе и число компонент в пограничном слое могут быть произвольными.

При известных корнях характеристического уравнения построение фундаментальной системы решений проводится обычным способом [6].

Рассмотрим частные случаи смесей газов.

а) Пусть во внешнем потоке присутствуют l компонент, которые по диффузионным свойствам можно объединить в одну группу компонент A; а в пограничном слое присутствуют n компонент, включая компоненты группы А. Тогда

$$\begin{gathered} g_i = g_{ie} + \left(g_{iw} - C_{ie}\sum_{k=1}^{l} g_{kw}\right)\exp\left(-\frac{\eta}{m_\alpha}\right) - \\ - C_{ie}\sum_{k=l+1}^{n} \frac{m_\alpha}{m_k} g_{kw} \exp\left(-\frac{S_{\alpha k}}{S_{\alpha\alpha} m_\alpha}\eta\right) \qquad (i = 1, \ldots, l) \\ g_i = g_{iw}\exp\left(-\frac{S_{\alpha i}\eta}{S_{\alpha\alpha} m_\alpha}\right) \qquad (i = l+1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Здесь индекс α относится к компонентам группы А, $S_{p\gamma} \equiv S_{\alpha\alpha}$.

б) Пусть во внешнем потоке присутствуют l компонент, которые по диффузионным свойствам можно разбить на две группы А и В. В пограничном слое присутствуют n компонент, включая n_α компонент группы А и n_β компонент группы В.

Тогда

$$\begin{gathered} g_i = g_{ie} + [g_{iw} - g_{ie} - C_{ie}(\psi_{iw} - \chi_i)]\exp(\lambda_i\eta) - \\ - C_{ie}[\chi_i \exp(\lambda_{\alpha\beta}\eta) - \psi_i(\eta)] \quad (i = 1, \ldots, l) \\ g_i = g_{iw}\exp(\lambda_i\eta) \qquad (i = l+1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\psi_i(\eta) = \sum_{j=l+1}^{n} \frac{g_{iw}}{m_j} \frac{m_\alpha m_\beta (S_{\alpha\beta} - S_{kj})\exp(\lambda_j\eta)}{m_\beta(S_{\alpha j} - S_{\alpha\beta})\sigma_{\alpha e} + m_\alpha(S_{\beta j} - S_{\alpha\beta})\sigma_{\beta e}}$$

$$\psi_i(\eta) = \psi_\alpha(\eta) \quad (k = \alpha,\ i = 1, \ldots, n_\alpha),$$
$$\psi_i(\eta) = \psi_\beta(\eta) \quad (k = \beta,\ i = n_\alpha + 1, \ldots, l)$$

$$\chi_i = \chi_\alpha = \frac{m_e m_w}{m_\beta}\sigma_{\beta e}\left(\frac{\sigma_{\alpha w}}{\sigma_{\alpha e}} - \frac{\sigma_{\beta w}}{\sigma_{\beta e}} - \frac{\psi_{\alpha w} - \psi_{\beta w}}{m_w}\right) \quad (i = 1, \ldots, n_\alpha)$$

$$\chi_i = \chi_\beta = \frac{m_\beta}{m_\alpha}\frac{\sigma_{\alpha e}}{\sigma_{\beta e}}\chi_\alpha \quad (i = n_\alpha + 1, \ldots, n) \quad S_{pq} \equiv S_{\alpha\beta}$$

$$\lambda_i = -\frac{S_{\alpha\alpha}}{S_{\alpha\beta}}\frac{\sigma_{\alpha e}}{m_\alpha} - \frac{\sigma_{\beta e}}{m_\beta} \quad (i = 1, \ldots, n_\alpha),$$

$$\lambda_i = -\frac{S_{\beta\beta}}{S_{\alpha\beta}}\frac{\sigma_{\beta e}}{m_\beta} - \frac{\sigma_{\alpha e}}{m_\alpha} (i = n_\alpha + 1, \ldots, l)$$

$$\lambda_{\alpha\beta} = -\frac{1}{m_e}, \quad \lambda_i = -\frac{S_{\alpha i}}{S_{\alpha\beta}}\frac{\sigma_{\alpha e}}{m_\alpha} - \frac{S_{\beta i}}{S_{\alpha\beta}}\frac{\sigma_{\beta e}}{m_\beta} \quad (i = l + 1, \ldots, n)$$

Аналогичные формулы можно получить и в случае присутствия во внешнем потоке газа компонент, которые по диффузионным свойствам могут быть разбиты на три, четыре или пять групп.

4. После того как найдено решение уравнений диффузии, найдем решение уравнений импульсов и энергии.

Будем предполагать, что

$$\sigma = \sigma(C_1, \ldots, C_n), \quad S_{pq} = S_{pq}(C_1, \ldots, C_n), \quad C_{pi} = \text{const} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

Интегрируя первое уравнение (2.2) с учетом граничных условий (2.6), получаем

$$\psi_\eta' = k_1 S \exp\left(-\int_0^\eta S d\eta\right) \tag{4.2}$$

$$\psi = k_1 \int_0^\eta S \exp\left(-\int_0^\eta S d\eta\right) d\eta \tag{4.3}$$

$$k_1 = \left[\int_0^\infty S \exp\left(-\int_0^\eta S\, d\eta\right) d\eta\right]^{-1}$$

Интегрируя уравнение (2.3) с учетом (4.2) и (2.6), получаем

$$\theta_\eta' = a\omega\left(k_2 - \alpha \int_0^\eta \frac{c}{\omega} d\eta\right) \tag{4.4}$$

$$\theta = \theta_\omega + \int_0^\eta \left(k_2 - \alpha \int_0^\eta \frac{c}{\omega} d\eta\right) a\omega d\eta \tag{4.5}$$

$$k_2 = (1 - \theta_w) k_3 + {}^1/_2 \alpha k_4, \qquad k_3 = \left(\int_0^\infty a\omega d\eta\right)^{-1}$$

$$k_4 = 2k_3 \int_0^\infty a\omega \int_0^\eta \frac{c}{\omega} d\eta d\eta, \qquad \omega = \exp\left(-\int_0^\eta ab d\eta\right)$$

$$a = \sigma S \frac{c_{pe}}{c_p}, \qquad b = \frac{c_p}{c_{pe}} - \sum_{i=1}^n \frac{c_{pi}}{c_{pe}}(C_i - C_{ie}), \qquad c = \frac{\psi_\eta'^2}{S}$$

На поверхности тела при $\eta = 0$

$$\psi_\eta' = k_1 S, \qquad \theta_\eta' = a_w[(1 - \theta_w) k_3 + {}^1/_2 \alpha k_4]$$
$$X_i = C_{iw} - C_{ie} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

Если перейдем к переменным Дородницына — Лиза, которые связаны с переменными ξ и η соотношениями

$$\xi^* = \xi, \qquad \eta^* = \frac{1}{\varphi(\xi)} \int_0^\eta \frac{l}{m S_{pq}} d\eta$$

то выражения (4.6) примут следующий вид:

$$\psi_{\eta *}{}' = \frac{k_1\varphi(\xi)}{l_w}, \qquad \theta_{\eta *}{}' = \frac{c_{pe}}{c_{pw}}\left(\frac{\sigma}{l}\right)_w \varphi(\xi)\left[(1-\theta_\omega)k_3 + {}^1/{}_2\alpha k_4\right]$$

$$Z_i = \varphi(\xi)X_i = -\varphi(\xi)(C_{ie} - C_{iw}) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.7}$$

Таким образом, выражения (4.3), (4.5), (3.1), (3.8) или (3.9) являются решением в первом приближении системы уравнений (1.5)—(1.9) с граничными условиями (1.10).

Возвращаясь к физическим координатам и размерным функциям, используя соотношения (1.3), получаем искомые функции u, T, C_i, I_i $(i = 1, \ldots, n)$ и координату y как функции параметра η.

Приведем выражения для напряжения трения, диффузионных и конвективных тепловых потоков на поверхности тела (индекс w опускаем)

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = -k_1u_e\rho v, Q^T = -\lambda\frac{\partial T}{\partial y} = [c_{pe}(T_e - T)k_3 + {}^1/{}_2k_4u_e{}^2]\rho v$$

$$I_i = (C_{ie} - C_{iw})\rho v \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.8}$$

Если сделать дополнительные предположения

$$c_{pi} = c_p \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \sigma = \text{const}, \quad mS_{pq} = \text{const} \tag{4.9}$$

то константы интегрирования будут равны

$$k_1 = k_3 = k_4 = 1$$

5. Найдем тепловой поток к поверхности при обтекании тела диссоциированным потоком газа. При этом будем предполагать, что реакции в пограничном слое заморожены, а на поверхности они протекают бесконечно быстро, т. е. последняя является идеальным катализатором. Кроме этого будем предполагать, что с поверхности отсасывается газ, состав которого $C_i^{(1)}$ равен составу газа на поверхности тела C_{iw}.

Из условия сохранения элементов на поверхности тела

$$\sum_{i=1}^{n} m_{li}[\rho v(C_i - C_i^{(1)}) + I_i] = 0 \qquad (l = 1, \ldots, r) \tag{5.1}$$

и асимптотического решения (4.8) будет следовать, что концентрации элементов на поверхности тела $\overset{*}{C}_{iw}$ равны концентрациям элементов во внешнем потоке $\overset{*}{C}_{ie}$, т. е.

$$C_i^{(1)*} = C_{ie}^* = C_{iw}^* \tag{5.2}$$

Здесь m_{li} — содержание элемента l в компоненте i, r — число химических элементов.

Если поверхность тела поддерживается при температуре ниже предела диссоциации при данном давлении, то концентрации продуктов диссоциации на поверхности тела равны нулю.

Тогда полный тепловой поток в тело

$$q = -\lambda\partial T/\partial y + \sum_{i=1}^{n} h_iI_i = [c_{pe}(T_e - T_w)k_3 + {}^1/{}_2u_e{}^2k_4 + h_d]\rho v \tag{5.3}$$

Здесь h_i — удельная энтальпия i-й компоненты, включая теплоту ее образования, h_d — энергия диссоциации единицы массы газа. Если условия (4.9) выполнены, то тепловой поток в тело

$$q = [c_p(T_e - T_w) + {}^1/{}_2u_e{}^2 + h_d]\rho v \tag{5.4}$$

или, введя полную энтальпию смеси на внешней границе (энтальпию торможения) H_e, получим

$$q = (H_e - H_w)\rho v \tag{5.5}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Пусть тело обтекается диссоциированным воздухом, который на внешней границе пограничного слоя представляет собой пятикомпонентную смесь O, N, NO, O_2, N_2. На поверхности тела

$$C_{iw} = 0 \qquad (i = \mathrm{O, N, NO})$$

В этом случае тепловой поток в тело будет равен

$$q = [c_p(T_e - T_w) + {}^1/_2 u_e^2 + h_d]\rho v$$

$$h_d = 3686C_e(\mathrm{O}) + 8038C_e(\mathrm{N}) + 716C_e(\mathrm{NO}), \quad [h] = \text{кал/г}$$

б) Пусть тело обтекается потоком газа, состоящего из продуктов [8] диссоциации углекислого газа и молекулярного азота O, N, C, O_2, N_2, NO, C_2, C_3, CO, CN, CO_2.

На поверхности тела с учетом (5.2) будем иметь

$$C_{iw} = 0 \qquad (i \neq \mathrm{CO_2, N_2})$$

Тогда тепловой поток в тело будет равен

$$q = [c_p(T_e - T_w) + {}^1/_2 u_e^2 + h_d]\rho v$$

$$h_d = 3686C_e(\mathrm{O}) + 8038C_e(\mathrm{N}) + 716C_e(\mathrm{NO}) + 2385C_e(\mathrm{CO}) +$$
$$+ 6999C_e(\mathrm{CN}) + 21\,964C_e(\mathrm{C}) + 15\,999C_e(\mathrm{C_2}) + 15\,054C_e(\mathrm{C_3}), \quad [h_d] = \text{кал/г}$$

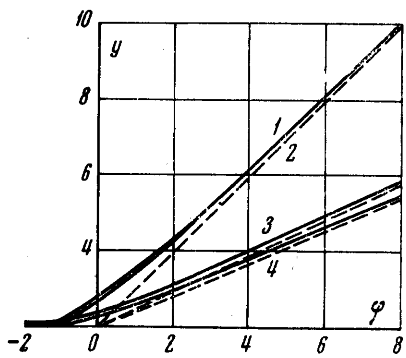
6. Система уравнений (1.1) решалась на ЭЦВМ в случае течения диссоциированного воздуха с помощью стандартной программы, созданной для решения уравнений двумерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя на разрушающейся поверхности [9]. Использовалась неявная четырехточечная двухслойная разностная схема с точностью аппроксимации $O(\Delta\eta)^4 + O(\Delta\xi)^2$ [10].

Граничные условия на поверхности тела были следующие:

$$u = 0, \quad \rho v = G(x), \quad T = T_w(x),$$
$$C_{iw} = 0 \quad (i = O, N), \quad I(O) + I(O_2) = 0$$
$$\text{при } y = 0$$

На внешней границе пограничного слоя

$$u \to u_e(x), \quad T \to T_e(x),$$
$$C_i \to C_{ie} \quad (i = \mathrm{O, N, O_2, N_2})$$
$$\text{при } y \to \infty$$



Пограничный слой предполагался локально-автомодельным. Параметры α и β_1 брались равными $\alpha = 0.25$, $\beta_1 = 0.5$. Параметр отсоса (вдува) изменялся в пределах $(-2 \leqslant \varphi \leqslant 10)$.

Результаты расчетов представлены на фигуре, где кривые *1*, *2* представляют собой зависимости диффузионных потоков компонент O, N и O_2 на поверхности тела от параметра отсоса (*1* — Y(O), Y(N); *2* — $Y(O_2)$ $Y_i = Z_i(C_{iw} - C_{ie})^{-1}$). Кривые *3*, *4* представляют собой аналогичные зависимости безразмерного трения $\psi_{\eta*}'$ и градиента температур $\vartheta = \theta_{\eta*}'(1 - \theta_w)^{-1}$. Пунктирные линии — асимптотическое решение.

Сравнение результатов асимптотического решения с результатами численного показывает, что отличие коэффициента трения, градиентов температур и концентрации компонент, и диффузионных потоков на поверхности тела, подсчитанных по асимптотическим формулам (4.7) и полученных из численного решения, становится малым при отсосах $\varphi \gtrsim 5$ и продолжает уменьшаться с увеличением параметра отсоса.

Автор благодарит Г. А. Тирского за обсуждение данной работы.

Поступило 4 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Watson E. J. The asymptotic theory of boundary layer flow with suction. Aeronaut. Res. Consil. Rep. and Mem., 2619 (1947), 1952.
2. Morduchow M. General asymptotic suction solution of the laminar compressible boundary layer with heat transfer. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 8, TN, pp. 1949—1951.
3. Morduchow M., Libby P. A. Class of solution of the axisymmetric boundary-layer equations with mass transfer. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 10.
4. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
5. Тирский Г. А. Анализ химического состава ламинарного многокомпонентного пограничного слоя на поверхности горящих пластиков. Космические исследования, 1964, т. 2, № 4.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1953.
7. Совершенный В. Д. Течение многокомпонентного газа между параллельными проницаемыми поверхностями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
8. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двоякой кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава. ПМТФ, 1965, № 1.
9. Гершбейн Э. А. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
10. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», М., «Наука», 1964, стр. 304—325.