РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ПЛОТНОСТЬЮ

В. В. МОЗЖИЛКИН, С. В. ФАЛЬКОВИЧ

(*Саратов*)

Обобщаются результаты Ю. П. Райзера [1], У. Д. Хейза [2] и Ф. Л. Черноусько [3] на случай автомодельного распространения ударных волн в газе с экспоненциально изменяющейся плотностью и постоянным давлением. Построено решение задачи методом последовательных приближений. Нулевое приближение совпадает с методом Уитема [4]. Первое приближение хорошо согласуется с численными расчетами из работы [2]. В рамках линейной теории исследовано неавтомодельное движение слабой ударной волны.

1. Рассмотрим движение ударной волны по каналу, поперечное сечение которого изменяется по закону

$$A = A_0 e^{\lambda\beta x} \tag{1.1}$$

где A_0 и β^{-1} — постоянные, имеющие соответственно размерности площади и длины, λ — безразмерная постоянная.

Предположим, что газ идеальный политропический с показателем адиабаты γ; невозмущенное состояние газа определяется формулами

$$p = p_0 = \mathrm{const}, \qquad u = 0, \qquad \rho_0 = \rho_\infty e^{\theta\beta x} \tag{1.2}$$
$$\rho_\infty = \mathrm{const}, \qquad \theta = \mathrm{const}$$

где p — давление, u — скорость газа, ρ — плотность.

В гидравлическом приближении движение газа описывается уравнениями

$$\frac{\partial(u \pm kc)}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial(u \pm kc)}{\partial x} = \mp\lambda\beta uc + \frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + u\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \qquad \left(\Phi = \ln\frac{c^{k\gamma}}{p}, \quad k = \frac{2}{\gamma - 1}\right) \tag{1.3}$$

Здесь c — скорость звука Φ — энтропия.

Так как уравнения (1.3) допускают тождественое преобразование [5]

$$t' = t, \quad x' = \theta x, \quad u' = \theta u, \quad c' = \theta c, \quad \Phi' = k\ln\theta + \Phi$$

то, не нарушая общности, можно предположить, что в законе начального распределения плотности $\theta = 1$.

Из условий Ренкина — Гюгонио следует, что на скачке должны выполняться граничные условия

$$u^* = 2(\gamma + 1)^{-1} U(1 - M^{-2}), \qquad \Phi = \Phi^\circ + k\ln|U| - \beta x$$
$$c^* = \frac{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}}{\gamma + 1}|U|\left(1 - \frac{1}{k\gamma M^2}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{k}{M^2}\right)^{1/2} \tag{1.4}$$
$$M = |U|\left(\gamma\frac{p_0}{\rho_0}\right)^{-1/2}$$

где U — скорость ударной волны, M — число Маха ударной волны по отношению к невозмущенному газу

$$\Phi^0 = \ln\left\{\frac{[2\gamma(\gamma-1)]^{k\gamma/2}}{2\rho_\infty(\gamma+1)^{k/2}}\right\} + \frac{k}{2}\ln\left(1-\frac{1}{k\gamma M^2}\right) + \frac{k\gamma}{2}\ln\left[1+\frac{k}{M^2}\right]$$

Будем искать автомодельные решения системы (1.3). Зададим закон движения скачка в форме

$$X(t) = \frac{\alpha}{\beta}\ln(-t) \tag{1.5}$$

где $\alpha > 0$ — показатель автомодельности. Предположим, что скачок движется в сторону уменьшения x, $t < 0$. Нетрудно заметить, что автомодельное решение существует в трех случаях:

а) газ холодный $p_0 \equiv 0$. Этот случай подробно исследован Ю. П. Райзером [1] и У. Д. Хейзом [2];

б) параметры $p_0 \neq 0$, $M^2 = |t|^{\alpha-2}\alpha^2\rho_\infty(\gamma p_0)^{-1}\beta^{-2} \gg 1$. Тогда

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2 \tag{1.6}$$

в) параметры $p_0 \neq 0$, $M = \text{const}$, $\alpha = 2$.

Введем автомодельные переменные по формулам

$$\xi = \beta(x - X) \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant +\infty)$$

$$u = \frac{\alpha}{\beta t} r(\xi), \qquad c = \frac{\alpha}{\beta t} s(\xi) \tag{1.7}$$

$$\Phi = \Phi^\circ + k\ln\frac{\alpha}{\beta} - (k+\alpha)\ln|t| + F(\xi)$$

Подставляя (1.7) в (1.3), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций r, s, F [1]

$$2k(r-1)(r-s-1)(r+s-1)\frac{ds}{d\xi} = B_+(r-s-1) - B_-(r+s-1) \tag{1.8}$$

$$\frac{dr}{ds} = k\frac{B_+(r-s-1)+B_-(r+s-1)}{B_+(r-s-1)-B_-(r+s-1)} \tag{1.9}$$

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{1+k\alpha^{-1}}{r-1} \tag{1.10}$$

$$B_\pm = (r-1)[\alpha^{-1}(r \pm ks) \mp \lambda rs] + \gamma^{-1}(1+k\alpha)s^2$$

Эта система имеет два тривиальных решения $r \equiv 1$ и $s \equiv 0$ и две особые линии, на которых функции $\xi(r)$ и $\xi(s)$ имеют экстремумы. Уравнение (1.9) имеет восемь особых точек: звездообразный узел $O(0, 0)$; три особые точки на предельной характеристике $r - s - 1 = 0$: $P(0, 1)$, Q_1 и Q_2, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\lambda\alpha r_0^2 + r_0(1 - \alpha\lambda - \gamma^{-1}(2-\alpha)) + \gamma^{-1}(2-\alpha) = 0, \qquad s_0 = r_0 - 1 \tag{1.11}$$

особая точка R с координатами

$$r = \frac{k}{\lambda\alpha}, \qquad s = -\left[\frac{r(1-r)}{\gamma(k+\alpha)}\right]^{1/2}$$

и три особые точки, симметричные Q_1, Q_2 и R относительно оси (2.9).

[1] Замена $z = s^2$ приводит уравнение (1.9) в уравнение (2.9) работы [2].

Граничные условия на ударной волне (1.4) можно преобразовать к виду

$$\xi = 0, \quad r^*(0) = (\gamma+1)^{-1}(1-M^{-2}), \quad F^*(0) = 0 \tag{1.12}$$

$$s^*(0) = -\frac{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1}\left[1-\frac{1}{k\gamma M^2}\right]^{1/2}\left[1+\frac{k}{M^2}\right]^{1/2}$$

В момент времени $t = 0$ значения $u(x, 0)$ и $c(x, 0)$ должны быть конечными, следовательно, если $\xi = +\infty$, то

$$r(\infty) = s(\infty) = 0 \tag{1.13}$$

На плоскости rs ударной волне соответствует дуга эллипса

$$s^2 = (1-r)(1+r/k) \tag{1.14}$$

начинающаяся в точке $(-1, 0)$, которая соответствует акустической волне, и оканчивающаяся в точке

$$\left(-\frac{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1}, \frac{2}{\gamma+1}\right)$$

которая соответствует сильной ударной волне.

Вдоль искомой интегральной кривой уравнения (1.9), начинающейся на эллипсе (1.14) и оканчивающейся в особой точке O, автомодельная переменная ξ должна монотонно возрастать от 0 до $+\infty$, поэтому при соответствующих значениях α и λ решение должно пересечь предельную характеристику в одной из особых точек P, Q_1, Q_2. Подробный анализ системы (1.8) — (1.10) в окрестности узла P показывает, что в нем плотность газа равна бесконечности в любой фиксированный момент времени $t \neq 0$. Поэтому искомое решение должно проходить через точки Q_1 и Q_2. Из (1.6) и (1.11) следует, что

$$0 \leqslant \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} = \frac{\gamma r_0[\lambda(r_0-1)+{}^1/_2]}{r_0(2-\gamma)-2} \tag{1.15}$$

Вдоль оси $s \leqslant -1$ производная $dr/d\xi > 0$, поэтому $0 \leqslant r_0 \leqslant 1$. Из (1.15) следует, что в случае $p_0 \neq 0$ автомодельное решение существует только при $\lambda \geqslant {}^1/_2$ и что

$$0 \leqslant \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \leqslant \frac{\gamma\lambda}{2} V_0^2 \tag{1.16}$$

где

$$V_0 = \frac{2}{2-\gamma}\left\{1-\left[1-\frac{2-\gamma}{2}\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

Если $\lambda - {}^1/_2 \ll 1$, то существуют только автомодельные движения с показателем $\alpha = 2$, так как из (1.16) следует, что при $\lambda \to {}^1/_2 + 0$ $\alpha \to 2 - 0$ и особые точки Q_1 и Q_2 сливаются с точкой $(-1, 0)$, через которую проходит единственное физически реальное решение $r \equiv 0$, начинающееся на эллипсе (1.14). Когда $\alpha = 2$, особые точки Q_1 и Q_2 имеют координаты $(-1, 0)$ и $(-{}^1/_2\lambda^{-1}, 1 - {}^1/_2\lambda^{-1})$.

Через узел Q_1 проходит единственное решение уравнения (1.9) $r \equiv 0$, имеющее физический смысл и совместимое с граничными условиями (1.13) и (1.14), поэтому искомое решение должно проходить через особую точку Q_2. Потребуем, чтобы с увеличением расстояния от ударной волны скорость газа монотонно убывала, тогда точка Q_2 — седло и через нее проходит единственное решение, удовлетворяющее условиям задачи. При $\lambda \to {}^1/_2$ оно стремится к решению $r \equiv 0$, которое соответствует состоянию покон. Однако при $\lambda \to +\infty$ автомодельное движение с $\alpha = 2$ не существует, так как тогда $Q_2 \to P$.

Таким образом, при $1/2 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^\circ$ реализуется автомодельное движение с ударной волной постоянной интенсивности и $\alpha = 2$, причем с ростом λ число Маха M растет от 1 до $+\infty$. При $\lambda \geqslant \lambda^\circ$ существуют только автомодельные движения второго типа (см. [5]) с сильной ударной волной.

2. Во многих задачах о движении ударных волн (см., например, [4-7]) очень хорошее совпадение с точными численными результатами дает метод Уитема [4], в основе которого лежит допущение, что на скачке выполняется условие вдоль характеристики

$$\frac{d(u^* - kc^*)}{dx} = \frac{\lambda\beta u^* c^*}{u^* - c^*} - \frac{c^*}{\gamma}\frac{d\Phi^*}{dx} \tag{2.1}$$

Проинтегрировав его, найдем закон движения скачка. В частности, для задачи, рассмотренной в предыдущем пункте, показатель автомодельности α равен [2]

$$\alpha^{-1} = (2 + \sqrt{k\gamma})^{-1}\{1 + \lambda\gamma(1 + \sqrt{\gamma / k})^{-1}\} \tag{2.2}$$

Отсюда

$$\lambda^\circ = {}^1/_2[1 + \sqrt{k/\gamma}] \tag{2.3}$$

Формула Уитема (2.2) при $\lambda > \lambda^\circ$ определяет показатели автомодельности для $p_0 \neq 0$, $M \gg 1$, а также для $p_0 = 0$; при $\lambda < \lambda^\circ$ — только для $p_0 = 0$.

Если $\alpha = 2$, то из (2.1) следует, что число Маха за скачком и λ связаны соотношением

$$M^* = u^* / c^* = 1 - 2\lambda \tag{2.4}$$

Хейз [2] показал, что формула Уитема (2.2) плохо согласуется с точными численными результатами. Поэтому попытаемся построить метод последовательных приближений, который включал бы в себя метод Уитема как нулевое приближение, а первое приближение хорошо согласовывалось бы с точными значениями.

Нетрудно заметить, что на скачке

$$\frac{d(u^* - kc^*)}{dx} - \lambda\beta\frac{u^* c^*}{u^* - c^*} + \frac{c^*}{\gamma}\frac{d\Phi^*}{dx} =$$
$$= \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{u^* - c^*}\right)\left[\frac{\partial(u - kc)}{\partial t} + \frac{c}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] \tag{2.5}$$

Сравнивая (2.1) и (2.5), получаем, что метод Уитема справедлив, если характеристики семейства C_- достаточно близки к ударной волне или

$$\frac{\partial(u - kc)}{\partial t} + \frac{c}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \equiv 0 \tag{2.6}$$

Уитем [4] отметил, что относительно высокая точность его метода объясняется главным образом условием (2.6), поэтому предположим, что оно справедливо всюду между ударной волной и предельной характеристикой. С помощью соотношений (1.7)—(1.10) легко показать, что (2.6) эквивалентно условию

$$\Psi(r, s, \gamma, \lambda, \alpha) = (r - s)[\alpha^{-1}(r - 2\gamma^{-1}s) + \gamma^{-1}s] + \lambda rs = 0 \tag{2.7}$$

Отсюда

$$r = M^* s \tag{2.8}$$

Примем соотношения (2.2) и (2.8) за нулевое приближение и подставим их в правую часть уравнения (1.9). Проинтегрировав его, найдем, что в случаях $p_0 \equiv 0$ и $M \gg 1$, если $C^2 + 4bM^* > 0$

$$r(s) = r^* + \frac{1}{b}\left\{a(s-s^*) + \frac{1}{s_2 - s_1}\left[(as_2 + M^*)\left(s_2 + \frac{1}{M^*}\right)\ln\frac{s-s_2}{s^*-s_2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -(as_1 + M^*)\left(s_1 - \frac{1}{M^*}\right)\ln\frac{s-s_1}{s^*-s_1}\right]\right\} \qquad (2.9)$$

$$s_{1,2} = (2bM^*)^{-1}\{-C \pm \sqrt{C^2 + 4bM^*}]$$

если $-\Delta^2 = c^2 + 4bM^* < 0$, то

$$r(s) = r^* + \frac{a}{b}\left\{s - s^* + \frac{1}{2M^*}\left[\frac{1}{a}(M^{*2} - a) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{C}{b}\right]\ln\frac{bM^*s^2 + Cs - 1}{bM^*(s^*)^2 + Cs^* - 1} + \frac{1}{M^*b\Delta}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2bM^*s + C}{\Delta} - \right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{arc\,tg}(2bM^*s^* + C)/\Delta\right][2bM^* - M^{*2}ba^{-1}(2b + C) + C(b + C)]\right\}$$

Здесь

$$a = 2\gamma^{-1} - M^* - \alpha\gamma^{-1}$$

$$b = \gamma^{-1}[1 - M^*(\gamma - 1) + M^*k^{-1}\alpha], \qquad C = \gamma^{-1}[M^*(2\gamma - 1) - \alpha(M^* - 1)]$$

Определим первое приближение к показателю α_1 из условия, что решение (2.7) должно пересечь предельную характеристику в особой точке. Затем процесс повторяется.

Приводим значения α_1 и показателя α_0, определенного по формуле Уитема (2.2), а также точное значение α из работы [2] при $\gamma = 1.4$.

$\lambda = 0.6$	0.8	1.0	2.0	3.0	4.0
$\alpha = 3.265$	2.885	2.589			
$\alpha_1 = 3.281$	3.893	2.589	1.702	1.271	1.015
$\alpha_0 = 2.998$	2.682	2.425	1.641	1.240	0.997

Уже в первом приближении совпадение результатов очень хорошее, причем с ростом λ точность растет, что позволяет предположить, что точность вычисленных показателей автомодельности α_1 для случая $p_0 \neq 0$ ($\lambda \geqslant 2$) вполне удовлетворительная. Интересно отметить, что $\Psi(r, s, \lambda, \gamma, \alpha)$ есть достаточно малая величина и для случая скачка умеренной интенсивности. Ошибка при вычислении производной dr/ds на предельной характеристике не превышает 4%. Для первого приближения получаются формулы, аналогичные (2.9), если положить в них

$$a = -M^*, \quad b = M^{*2}k, \quad c = k^{-1}\{kM^* - M^{*2} + M^*] \qquad (2.10)$$

Число λ находится из условия (1.11). По формулам (2.9) и (2.10) найдено, что для случая $\gamma = 1.4$, $\lambda^\circ = 1.5702$. Метод Уитема дает значение $\lambda^\circ = 1.4449$. Так как $1 < \lambda^\circ < 2$ и в этом случае $M = \infty$, то результаты, приведенные выше, показывают, что вычисленное значение λ° достаточно точное.

3. В первом пункте было показано, что при $\lambda \to 1/2 + 0$ ударная волна ослабляется, вырождаясь в акустическую. Тогда можно предположить, что при $\lambda < 1/2$ существуют неавтомодельные течения со слабыми ударными волнами. Введем поэтому новые переменные

$$\rho = \rho_\infty e^{\beta x} + \rho_0, \quad p = p_0 + p^\circ, \quad u = u_0 \qquad (3.1)$$

и предположим, что

$$\frac{\rho^\circ}{\rho_\infty e^{\beta x}} \ll 1, \qquad \frac{u^2}{c_\infty{}^2 e^{\beta x}} \ll 1, \qquad \frac{p^\circ}{p^\circ} \ll 1 \tag{3.2}$$

$$(c_\infty{}^2 = \gamma p_0 / \rho_\infty)$$

Обозначим через $v(x, t)$ смещение частицы из начального (невозмущенного) состояния. Так как в линейной теории обычно пренебрегают различием между эйлеровыми и лагранжевыми координатами, то $u = \partial v / \partial t$. Подставим (3.1) в уравнения движения. После простых преобразований, учитывая, что при $t \to -\infty$ $p^0 = \rho^\circ = 0$, получим

$$e^{\beta x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_\infty{}^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \beta \lambda v\right] \tag{3.3}$$

$$p^\circ = -p_0\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\lambda v\right], \qquad \rho^\circ = -\rho_\infty e^{\beta x}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \beta(\lambda + 1) v\right] \tag{3.4}$$

Уравнение (3.3) допускает инвариантно-групповое решение вида

$$v = \frac{1}{\beta} G e^{\delta\beta x} R(y), \qquad y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c_\infty \beta t}{2 e^{\beta x/2}}\right) \tag{3.5}$$

$$G = \text{const}, \quad \delta = \text{const}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1/2$$

Функция $R(y)$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению

$$y(1-y)R'' + (1/2 - \lambda - 2\delta)(1 - 2y)R' - 4\delta(\lambda + \delta)R = 0 \tag{3.6}$$

На ударной волне смещение непрерывно, а скорость и давление терпят конечный разрыв, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что на скачке

$$R(0) = 0, \qquad R'(0) = 1 \tag{3.7}$$

Из свойств линейно-независимых решений гипергеометрического уравнения следует, что условиям (3.7) можно удовлетворить только при

$$\delta = 1/2(1/2 - \lambda)$$

Тогда единственным решением, удовлетворяющим условиям (3.7), будет

$$R(y) = yF(1/2 - \lambda,\ 1/2 + \lambda,\ 2,\ y) \tag{3.8}$$

Если $\lambda = -1/2 - n$, где n — целое, то решение (3.8) можно представить в виде многочлена $n + 1$-й степени

$$R(y) = y \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} y^i$$

$$\left(a_1 = 1, \qquad a_{i+1} = \frac{i(i-1) - n(n+1)}{i(i+1)} a_i\right)$$

Если λ — произвольное число, меньшее $1/2$, то на скачке

$$v = 0, \quad u = 1/4 G c_\infty e^{\beta(\delta - 1/2)x}$$

$$p^\circ = -1/4 G \gamma p_0 e^{\delta\beta x}, \qquad \rho^\circ = -1/4 \rho_\infty e^{\beta(\delta+1)x}$$

$$M = 1 - 1/16(\gamma + 1) G e^{\delta\beta x}$$

Отсюда видно, что, хотя скорость ударной волны неограниченно возрастает, интенсивность скачка уменьшается и условия линеаризации (3.2) выполнены.

Соотношения (3.4), (3.5) и (3.8) определяют закон затухания скачка.

Поступило 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Райзер Ю. П. Распространение ударной волны в неоднородной атмосфере в сторону уменьшения плотности. ПМТФ, 1964, № 4.
2. Hayes W. D. Self-similar strong shocks in an exponential medium. J. Fluid. Mech., 1968, vol. 32, p. 2. (Рус. перев.: «Механика», Период. сб. перев. иностр. статей, 1968, № 6 (112).)
3. Черноусько Ф. Л. Сходящиеся ударные волны в газе с переменной плотностью. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
4. Whitham G. B. On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow. J. Fluid. Mech., 1958, vol. 4, pt 4.
5. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
6. Sakurai A. On the problem of shock wave arriving at the edge of a gas. Comm. Pure. Appl. Math., 1960, vol. 13, p. 353.
7. Welsh R. L. Imploding shocks and detonations. J. Fluid. Mech., 1967, vol. 29, pt 1.