О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ РАЗРЕЖЕНИЯ, ОБЛАДАЮЩИХ СИММЕТРИЕЙ

О. В. РЫСЕВ

(*Москва*)

Рассматриваются нестационарные изэнтропические течения разрежения, обладающие осевой или центральной симметрией. Используя каноническую форму записи соотношений, выполняемых вдоль характеристик, показываем, что при определенных условиях течения разрежения могут содержать характеристику, вдоль которой скорость и скорость звука изменяются как в течении от некоторого установившегося источника.

1. Нестационарные изэнтропические течения газа с осевой или центральной симметрией описываются системой двух уравнений [1]:
уравнением импульсов

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+2\varkappa c\frac{\partial c}{\partial r}=0 \tag{1.1}$$

уравнением неразрывности

$$2\varkappa\left(\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial r}\right)+c\left(\frac{\partial u}{\partial r}+(\nu-1)\frac{u}{r}\right)=0 \tag{1.2}$$

Здесь u — скорость, c — скорость звука, r — пространственная координата, t — время, $\varkappa=1/\gamma-1$, γ — показатель адиабаты, $\nu=2,3$ для течений с осевой и центральной симметрией соответственно.

Соотношения, выполняемые вдоль характеристик

$$\frac{d}{dt}(u\pm 2\varkappa c)\pm(\nu-1)\frac{cu}{r}=0,\qquad \frac{dr}{dt}=u\pm c \tag{1.3}$$

путем введения функций

$$2\alpha=u^2+2\varkappa c^2,\qquad \beta=c^{2\varkappa}ur^{\nu-1} \tag{1.4}$$

могут быть приведены к каноническому виду [2]

$$d\alpha\pm\frac{cu}{\beta}d\beta=0,\qquad \frac{dr}{dt}=u\pm c \tag{1.5}$$

Знак плюс соответствует характеристикам первого семейства, минус — второго.

Из условий совместимости (1.5) следует, что если в нестационарном течении вдоль некоторой линии L функции $\alpha(r,t)$, $\beta(r,t)$ постоянны, то эта линия является характеристикой. Действительно, если это не так, то решение задачи Коши для уравнений (1.1), (1.2) в характеристическом треугольнике, ограниченном частью линии L и двумя характеристиками противоположных семейств, есть $\alpha=\mathrm{const}$, $\beta=\mathrm{const}$, т. е. в окрестности линии L течение стационарное, что невозможно по предположению.

Покажем, что в некоторых случаях нестационарные течения разрежения могут содержать характеристику, несущую стационарное состояние, т. е. характеристику, вдоль которой $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

Будем считать, что в течении разрежения скорость в частице может только возрастать, скорость звука — только убывать; в произвольный момент времени скорость с увеличением радиуса только растет, скорость звука — только убывает, т. е. предполагаем, что в каждой внутренней точке в области течения разрежения выполняются неравенства

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} > 0, \quad \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial c}{\partial r} < 0 \tag{1.6}$$

Будем называть θ-областью область, ограниченную линиями $t = f_1(r)$, $t = f_2(r)$ и линиями $t = \varphi_1(r)$, $t = \varphi_2(r)$, пересекающими линии $t = f_1(r)$, $t = f_2(r)$, где $f_1(r), f_2(r)$; $\varphi_1(r), \varphi_2(r)$ — непрерывные однозначные функции своего аргумента, если внутри этой области знаки производных $\partial u / \partial t$ и $\partial c / \partial t$ совпадают, кроме того

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} \neq 0 \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial c}{\partial t} = 0\right) \quad \text{вдоль линии } t = f_1(r)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} \neq 0\right) \text{вдоль линии } \ t = f_2(r)$$

Теорема. Если внутри θ-области производные от u и c по координате и времени будут непрерывными функциями, то течение в этой области не может быть течением разрежения.

Предположим противное. Пусть некоторое течение содержит θ-область, в которой производные $\partial u / \partial r$, $\partial u / \partial t$, $\partial c / \partial r$, $\partial c / \partial t$ являются непрерывными функциями, пусть также в θ-области выполняются неравенства (1.6). Для простоты рассуждений считаем, что

$$\varphi_1(r) = \text{const} = t_1, \qquad \varphi_2(r) = \text{const} = t_2 \qquad (t_2 > t_1)$$

и для определенности примем, что

$$\partial u / \partial t = 0, \quad \partial c / \partial t \neq 0 \quad \text{вдоль } \ t = f_1(r)$$

$$\partial u / \partial t \neq 0, \quad \partial c / \partial t = 0 \quad \text{вдоль } \ t = f_2(r)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(r, t) = \frac{\partial u}{\partial t} - 2\varkappa A \frac{\partial c}{\partial t}$$

где A — произвольная непрерывная функция, большая нуля.

Так как $\psi = -2\varkappa A \partial c / \partial t$, $\psi = \partial u / \partial t$ соответственно вдоль $t = f_1(r)$ и $t = f_2(r)$, а производные $\partial c / \partial t$ и $\partial u / \partial t$ одного знака, то при движении по линии $t = t_0$ $(t_1 < t_0 < t_2)$ всегда найдется некоторая точка $P(r, t_0)$, в которой [3]

$$\psi = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - 2\varkappa A \frac{\partial c}{\partial t}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Из (1.6) следует, что в точке $P(r, t_0)$

$$\frac{du}{dt} + 2\varkappa B \frac{dc}{dt} = 0 \tag{1.8}$$

где B — некоторая функция точки $P(r, t_0)$, большая нуля.

Используя (1.1) и (1.2), равенства (1.7) и (1.8) можно записать следующим образом:

$$2\varkappa\frac{\partial c}{\partial r}+B\left(\frac{\partial u}{\partial r}+(\nu-1)\frac{u}{r}\right)=0 \tag{1.9}$$

$$2\varkappa(c-Au)\frac{\partial c}{\partial r}+(u-Ac)\frac{\partial u}{\partial r}-(\nu-1)\frac{cuA}{r}=0 \tag{1.10}$$

Из равенства (1.10) следует, что течение в θ-области не может быть дозвуковым, так как в противном случае произвольную функцию A можно выбрать так, что $M<A<M^{-1}$, при этом $u-Ac<0$ и $c-Au>0$ и, следовательно, все члены в (1.10) имеют один знак, что невозможно.

Пусть течение сверхзвуковое. Исключая из равенств (1.9) и (1.10) производную $\partial c/\partial r$, получаем

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+(ABu-Ac-Bc)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+(\nu-1)\frac{u}{r}\right)=0 \tag{1.11}$$

$$(u+ABu-Ac-Bc)\frac{\partial u}{\partial r}+(ABu-Ac-Bc)(\nu-1)\frac{u}{r}=0 \tag{1.12}$$

Из (1.9) следует, что $B=c/u$ вдоль линии $t=f_2(r)$, где $\partial c/\partial t=0$. Обозначим $B=\Delta c/u$, тогда

$$2\varkappa u\frac{\partial c}{\partial r}+\Delta c\left(\frac{\partial u}{\partial r}+(\nu-1)\frac{u}{r}\right)=0$$

Используя уравнение неразрывности, получаем

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{1-\Delta}{\Delta}u\frac{\partial c}{\partial r} \tag{1.13}$$

Если внутри θ-области $\partial c/\partial t>0$, то из (1.6) и (1.13) следует, что $\Delta>1$. Выбирая произвольную функцию A таким образом, чтобы

$$0<\frac{1}{A}<M-\frac{1}{B}=\frac{\Delta-1}{\Delta}M$$

получаем, что коэффициент перед вторым членом в (1.11) положительный и, следовательно, равенство выполняться не может.

Пусть внутри θ-области $\partial c/\partial t<0$, тогда из (1.6) и (1.13) следует, что $\Delta<1$. В этом случае, если произвольную функцию A выбрать так, чтобы

$$A>\frac{M^2-\Delta}{M(1-\Delta)}>0 \qquad (M>1,\quad \Delta<1)$$

то неравенство

$$\frac{1}{A}>M-\frac{1}{B}=-\frac{1-\Delta}{\Delta}M$$

выполняется автоматически и скобки перед первым и вторым членами в равенстве (1.12) отрицательны, что невозможно.

Полученные противоречия доказывают теорему.

Итак, если на исходную систему уравнений (1.1), (1.2) наложить дополнительные условия в виде неравенств (1.6), то реализуемые течения разрежения не могут содержать θ-области.

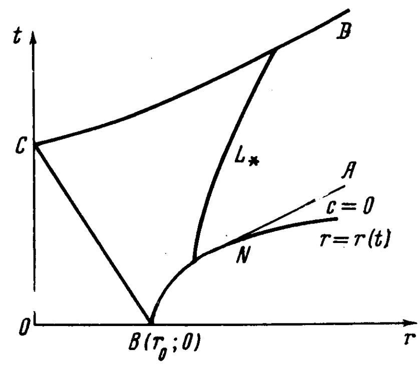
2. Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется сферический (цилиндрический) поршень радиуса r_0, внутри которого находится покоящийся газ. Скорость звука во всем объеме газа постоянна и равна c_0. В момент времени $t=0$ поршень начинает двигаться по закону

$$r=r(t),\quad \frac{dr}{dt}>0,\ \frac{d^2r}{dt^2}>0,\quad r_0=r(0),\quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0}=0 \tag{2.1}$$

Двигаясь ускоренно, поршень в некоторый момент времени t_{**} отрывается от газа. При этом считаем, что отраженный от центра (оси) симметрии фронт волны разрежения CD не догоняет поршень (фиг. 1).

Выясним, как изменяются функции α и β в частице. Используя уравнения (1.1) и (1.2), получаем

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt}&=\frac{\partial\beta}{\partial t}+u\frac{\partial\beta}{\partial r}=\frac{\beta}{u}\frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{d\alpha}{dt}&=\frac{\partial\alpha}{\partial t}+u\frac{\partial\alpha}{\partial r}=2\varkappa c\frac{\partial c}{\partial t}\end{aligned} \tag{2.2}$$



Фиг. 1

Из физических соображений следует, что на фронте волны разрежения и на начальном участке движения поршня

$$\partial u/\partial t>0,\qquad \partial c/\partial t<0 \tag{2.3}$$

а в окрестности точки $N(t_{**}, r(t_{**}))$ на поршне

$$\partial u/\partial t<0,\qquad \partial c/\partial t>0 \tag{2.4}$$

Действительно, после того как поршень оторвался от газа, граница газа с пустотой (фронт разлета) движется с постоянной скоростью [4] и значит при движении по любому направлению внутрь газа скорость убывает.

Так как в волне $ABCD$ производные от u и c по координате и времени являются непрерывными функциями, то из условий (2.3) и (2.4) следует, что волна $ABCD$ содержит линию L_1, вдоль которой $\partial u/\partial t=0$, и линию L_2, вдоль которой $\partial c/\partial t=0$.

Если предположить, что линии L_1 и L_2 не совпадают, то, для того чтобы, двигаясь вместе с частицей, перейти от неравенств (2.3) к неравенствам (2.4), необходимо пройти через θ-область. Однако по доказанной теореме θ-область в рассматриваемом течении существовать не может. В силу этого линии L_1 и L_2 должны совпадать, т. е. в случае расширения поршня по некоторому закону (2.1) в области $ABCD$ имеется линия L_*, вдоль которой

$$\partial u/\partial t=\partial c/\partial t=0 \tag{2.5}$$

С учетом (1.1), (1.2) и (2.5) вдоль линии L_*

$$\partial\alpha/\partial t=\partial\beta/\partial t=\partial\alpha/\partial r=\partial\beta/\partial r=0 \tag{2.6}$$

и, следовательно, функции α и β постоянны. Линия, несущая постоянные значения функций α и β в нестационарном течении, является характеристикой, в данном случае характеристикой второго семейства. Из равенств (2.6) следует, что вдоль характеристики L_*

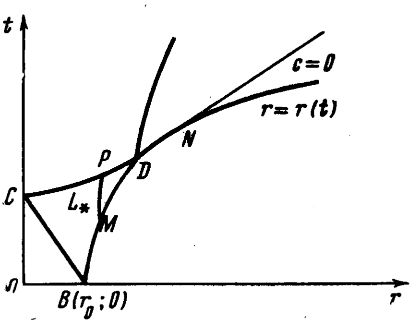
$$2\varkappa(u^2-c^2)\frac{\partial c}{\partial r}+(\nu-1)\frac{cu^2}{r}=0,\quad (u^2-c^2)\frac{\partial u}{\partial r}-(\nu-1)\frac{c^2u}{r}=0 \tag{2.7}$$

и значит с учетом (1.6) она лежит в сверхзвуковой области.

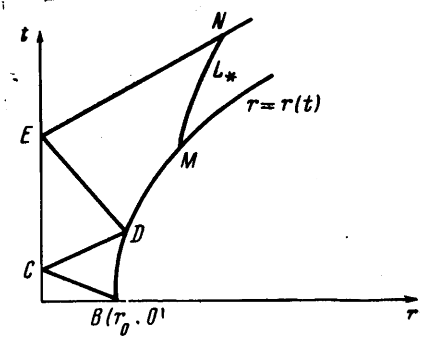
Приписывая функциям α и β на линии L_* индекс $(*)$, считая число Маха M параметром, из формул (1.4), (1.5) получаем

$$u = (2\alpha_*)^{1/2} M (M^2 + 2\varkappa)^{-1/2}, \qquad c = (2\alpha_*)^{1/2} (M^2 + 2\varkappa)^{-1/2},$$
$$r^{\nu-1} = \beta_* (2\alpha_*)^{-(1/2+\varkappa)} M^{-1} (M^2 + 2\varkappa)^{1/2+\varkappa} \tag{2.8}$$
$$t = t_* + (2\alpha_*)^{-1/2} \int_{M_*}^{M} \frac{(M^2 + 2\varkappa)^{1/2}}{M-1} \frac{dr}{dM} dM$$

Здесь t_*, $r(t_*)$ — координаты поршня, при которых имеет место (2.5), M_* — соответствующее число Маха.



Фиг. 2



Фиг. 3

Если момент времени t_* известен, то с помощью (2.1) величины $r(t_*)$, α_*, β_* и M_* находятся и, следовательно, характеристика L_* определяется. Однако момент времени t_* существенно зависит от характера движения поршня при $t < t_*$ и, по-видимому, его можно определить только полностью решив задачу. Поэтому можно лишь утверждать, что в случае расширения поршня по некоторому закону (2.1) в нестационарной волне разрешения $ABCD$ существует характеристика второго семейства, вдоль которой скорость и скорость звука изменяются как в течении от стационарного источника. Положение этой характеристики в физической плоскости и в плоскости годографа существенно зависит от параметра t_*.

Покажем, что характеристика L_* после пересечения со слабым разрывом CD вырождается в обычную характеристику, вдоль которой функции α и β переменны. Действительно, если это не так и характеристика L_* существует в области, расположенной выше линии CD (фиг. 1), то в силу (2.7) и (1.6) вдоль нее $M > 1$, т. е. она не может в некоторый момент времени замкнуться на ось $r = 0$. С другой стороны, при достаточно больших моментах времени, когда движение становится инерциальным

$$u = \frac{r}{t}, \quad c^{2\varkappa} r^{\nu-1} = \frac{1}{t} F\left(\frac{r}{t}\right) \tag{2.9}$$

где $F(r/t)$ — некоторая ограниченная функция [1].

Отсюда видно, что при достаточно больших моментах времени в области течения не может быть линии $\beta = \beta_*$, т. е. характеристика L_* в области, расположенной выше линии CD (фиг. 1), существовать не может.

Рассмотрим теперь случай, когда отраженный от центра (оси) симметрии фронт волны разрежения CD, несущий разрыв производных, догоняет поршень в некоторой точке $D(t_1, r(t_1))$. Если при этом при движении в точку $D(t_1, r(t_1))$ слева вдоль траектории поршня выполняется (2.4), то аналогично проделанному выше показывается, что характеристика L_* существует (линия MP (фиг. 2)).

Если при движении вдоль траектории поршня в точку $D(t_1, r(t_1))$ слева выполняется (2.3), а при движении справа — (2.4), то характеристика L_* существовать не может. Действительно, из неравенств (2.4) следует, что в точке $D(t_1, r(t_1))$

$$(u^2-c^2)\frac{\partial u}{\partial r}-(\nu-1)\frac{c^2u}{r}=0$$

и, следовательно, $M>1$. В силу этого характеристика второго семейства, выходящая из точки $D(t_1, r(t_1))$ и несущая разрыв производных, лежит в сверхзвуковой области. Из условий (2.9) функция β на этой характеристике будет сколько угодно малой при больших значениях t.

Если производные $\partial u/\partial t$ и $\partial c/\partial t$ терпят разрыв в точке $D(t_1, r(t_1))$, но при этом не меняют знака, ($\partial u/\partial t$ остается положительной, а $\partial c/\partial t$ — отрицательной), то аналогично проделанному выше показывается, что характеристика L_* существует (линия MN (фиг. 3)).

В заключение автор благодарит А. А. Никольского за постановку задачи.

Поступило 5 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
2. Рысев О. В. Некоторые особенности разлета в пустоту газового шара. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Гостехиздат, 1947, т. 1.
4. Greenspan H. P., Butler P. S. On the expausion of gas vacuum. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 1.