

## МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ПЛАЗМЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

В. В. БАРАНОВ, М. Д. КАРТАЛЕВ

(Москва)

На основе гидродинамических уравнений Чу, Гольдбергера и Лоу [4] исследуются некоторые типы плоских течений плазмы с анизотропным давлением (давление вдоль магнитного поля  $p_{\parallel}$  не равно давлению поперек магнитного поля  $p_{\perp}$ ). В п. 1 соотношения на поверхностях сильного разрыва, полученные в работе [2], используются для исследования изменения параметров в слабых ударных волнах в линейном приближении. В п. 2 в линейном приближении рассматриваются задачи обтекания тел, слабо изменяющих однородный поток плазмы на бесконечности. Аналогичные задачи в магнитной гидродинамике с изотропным давлением подробно рассматривались, например, в [3-5].

**1. Слабые ударные волны.** Система магнитогидродинамических уравнений для бестолкнувательной плазмы в приближении Чу, Гольдбергера и Лоу имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) &= 0, & \frac{d}{dt} \left( \frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \operatorname{div} (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{v}$  — средняя скорость,  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$  — продольное и поперечное давления плазмы,  $\mathbf{P}$  — тензор напряжений,  $\mathbf{B}$  — вектор индукции магнитного поля,  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$  — единичный вектор вдоль магнитного поля.

На основе системы уравнений (1.1) в [6, 7] рассмотрены линейные волны, а в [8] — нелинейные простые волны (или волны Римана). В [8] было показано, что в некоторых предельных случаях простые волны имеют тенденцию к опрокидыванию, что, в свою очередь, может привести к образованию разрыва гидродинамических параметров.

Соотношения на этих разрывах, получаемые из законов сохранения массы, импульса и энергии, оказываются незамкнутыми вследствие наличия двух давлений — продольного и поперечного. Поэтому в [2] предполагается, что на сильном разрыве сохраняется первый адиабатический инвариант  $p_{\perp}/\rho B$ . Это предположение позволяет замкнуть систему соотношений на разрыве, хотя и не является достаточно обоснованным физически.

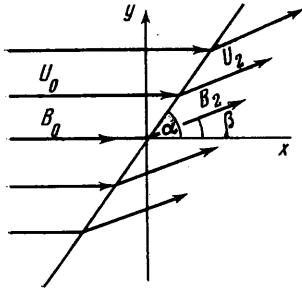
Согласно [2] соотношения на поверхностях сильного разрыва в системе координат, связанной с разрывом, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \{v_n\} &= m \{\rho^{-1}\}, & \{B_n\} &= 0 \\ m^2 \{\rho^{-1}\} + \{p_{\perp}\} + \{(4\pi)^{-1} B_{\tau}^2\} + (4\pi)^{-1} B_n^2 \{\lambda\} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m\{v_\tau\} - (4\pi)^{-1}B_n\{(1-\lambda)\mathbf{B}_\tau\} &= 0 & (1.2) \\
 m\{\rho^{-1}\mathbf{B}_\tau\} - B_n\{v_\tau\} &= 0, & m\{p_\perp/\rho B\} = 0 \\
 m\{\rho^{-1}\varepsilon\} + \{v_n(p_\perp + B^2/8\pi)\} - (4\pi)^{-1}B_n\{(1-\lambda)\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}\} &= 0 \\
 v_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{e}_n(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_n), & \mathbf{B}_\tau = \mathbf{B} - \mathbf{e}_n(\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_n) & v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_n, & B_n = \mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_n & (1.3) \\
 \lambda = \frac{4\pi(p_\parallel - p_\perp)}{B^2} & m = \rho v_n, & \varepsilon = \frac{1}{2} \left[ 3p_\perp + \rho v^2 + \frac{(1+\lambda)B^2}{4\pi} \right]
 \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{e}_n$  — единичный вектор нормали к поверхности разрыва. Фигурные скобки означают разность значений соответствующих величин до и после сильного разрыва.

Для простоты рассмотрим случай, когда скорость  $\mathbf{v}$  и магнитное поле  $\mathbf{B}$  параллельны до разрыва. Тогда вследствие сохранения тангенциальной составляющей электрического поля скорость и магнитное поле будут параллельны и за поверхностью разрыва.



Фиг. 1

Следует заметить, что случай, когда скорость не параллельна магнитному полю, сводится к рассматриваемому случаю выбором соответствующей системы координат, движущейся относительно исходной вдоль поверхности разрыва с некоторой постоянной скоростью.

В дальнейшем будем рассматривать ударные волны ( $m \neq 0$ ,  $\{\rho\} \neq 0$ ) с геометрией потока, представленной на фиг. 1.

Будем предполагать, что скорость и магнитное поле в невозмущенном ударной волной потоке (фиг. 1) направлены вдоль оси  $x$  (индексы 1 и 2 относятся в выписанных ниже соотношениях к параметрам потока перед и за ударной волной соответственно),  $\alpha$  — угол наклона ударной волны, а  $\beta$  — угол поворота потока плазмы за ударной волной.

В рассматриваемом случае вместо (1.2), (1.3) получим систему уравнений, которая является аналогом системы уравнений, полученной в [4] для случая изотропного давления

$$B_n \equiv B_1 \sin \alpha = B_2 \sin (\alpha - \beta), \quad m \equiv \rho_1 v_1 \sin \alpha = \rho_2 v_2 \sin (\alpha - \beta)$$

$$4\pi \rho_1 v_1 [v_2 \cos (\alpha - \beta) - v_1 \cos \alpha] = B_1 [(1 - \lambda_2) B_2 \cos (\alpha - \beta) - (1 - \lambda_1) B_1 \cos \alpha]$$

$$p_{\perp 1} + \frac{m^2}{\rho_1} + \frac{B_1^2}{8\pi} \cos^2 \alpha + \frac{B_1^2}{4\pi} \lambda_1 \sin^2 \alpha =$$

$$= p_{\perp 2} + \frac{m^2}{\rho_2} + \frac{B_2^2}{8\pi} \cos^2 (\alpha - \beta) + \frac{B_2^2}{4\pi} \lambda_2 \sin^2 (\alpha - \beta)$$

$$m \left[ \frac{3}{2} \frac{p_{\perp 2}}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + (1 + \lambda_2) \frac{B_2^2}{8\pi \rho_2} \right] + v_2 \left( p_{\perp 2} + \frac{B_2^2}{8\pi} \right) \sin (\alpha - \beta) -$$

$$- \frac{B_n}{4\pi} (1 - \lambda_2) v_2 \cdot \mathbf{B}_2 = m \left[ \frac{3}{2} \frac{p_{\perp 1}}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + (1 + \lambda_1) \frac{B_1^2}{8\pi \rho_1} \right] +$$

$$+ v_1 \left( p_{\perp 1} + \frac{B_1^2}{8\pi} \right) \sin \alpha - \frac{B_n}{4\pi} (1 - \lambda_1) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{B}_1$$

$$\frac{p_{\perp 1}}{\rho_1 B_1} = \frac{p_{\perp 2}}{\rho_2 B_2} \quad (1.4)$$

Рассмотрим теперь ударные волны слабой интенсивности, т. е. будем считать, что добавки к невозмущенным скорости  $v_i \equiv u_0$ , магнитному полю  $B_i \equiv B_0$ , давлениям  $p_{\perp i} \equiv p_{\perp 0}$  и  $p_{\parallel i} \equiv p_{\parallel 0}$  и плотности  $\rho_i \equiv \rho_0$  за ударной волной, равные соответственно  $v_x, v_y, b_x, b_y, p_{\perp}, p_{\parallel}, \rho$ , малы. Линеаризуя в этом случае систему уравнений (1.4), получаем ( $\lambda$  — добавок к  $\lambda_1 \equiv \lambda_0$  за ударной волной)

$$b_x \operatorname{tg} \alpha_0 - b_y = 0, \quad v_x \operatorname{tg} \alpha_0 - v_y + \frac{u_0}{\rho_0} \rho \operatorname{tg} \alpha_0 = 0$$

$$v_x + v_y \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{B_0}{4\pi \rho_0 u_0} [(1 - \lambda_0) b_x + (1 - \lambda_0) b_y \operatorname{tg} \alpha_0 - B_0 \lambda]$$

$$p_{\perp} + \frac{B_0}{4\pi} (\cos^2 \alpha_0 + 2\lambda_0 \sin^2 \alpha_0) b_x + \frac{B_0}{4\pi} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 - 2\lambda_0) b_y +$$

$$+ \frac{B_0^2}{4\pi} \lambda \sin^2 \alpha_0 - \rho u_0^2 \sin^2 \alpha_0 = 0$$

$$p_{\perp} = \frac{p_{\perp 0}}{B_0} b_x + \frac{p_{\perp 0}}{\rho_0} \rho, \quad B_0 v_y - u_0 b_y = 0$$

$$\frac{5}{2} u_0 p_{\perp} + \left( \frac{5}{2} p_{\perp 0} + \rho_0 u_0^2 + 3\lambda_0 \frac{B_0^2}{8\pi} \right) v_x - \left( \frac{5}{2} p_{\perp 0} + \frac{B_0^2}{4\pi} + \right. \quad (1.5)$$

$$\left. + \lambda_0 \frac{B_0^2}{8\pi} \right) \frac{v_y}{\operatorname{tg} \alpha_0} + u_0 \frac{B_0}{4\pi} (1 + 2\lambda_0) b_x + 3u_0 \frac{B_0^2}{8\pi} \lambda = 0$$

Здесь  $\alpha_0$  — угол наклона ударной волны нулевой интенсивности, совпадающий с углом наклона характеристики для невозмущенного потока. Нетривиальное решение системы однородных алгебраических уравнений (1.5) относительно добавок к гидродинамическим параметрам потока плазмы за ударной волной существует тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю. Вычисляя определитель (1.5), получаем условие для  $\operatorname{tg} \alpha_0$ , при котором определитель равен нулю

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \pm \left( \frac{(M^2 - 1) [1 + A^2 (3M^2)^{-1} + A^2 (N^2)^{-1}] + M^2 A^2 N^{-4}}{(A^2 - 1) (M^2 - 1)} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

$$A^2 = \frac{4\pi \rho_0 u_0^2}{(1 - \lambda_0) B_0^2}, \quad M^2 = \frac{\rho_0 u_0^2}{3p_{\parallel 0}}, \quad N^2 = \frac{\rho_0 u_0^2}{p_{\perp 0}}, \quad \lambda_0 = \frac{4\pi (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0})}{B_0^2}$$

Выражение (1.6) совпадает с выражением для угла наклона характеристик, полученным в [9]. Разрешая первые шесть уравнений (1.5), получаем

$$v_x = - \frac{M^2 (A^2 - 1) \operatorname{tg} \alpha_0 v_y}{N^2 [(M^2 - 1) (1 + A^2 (3M^2)^{-1} + A^2 N^{-2}) + M^2 A^2 N^{-4}]}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{u_0 \operatorname{tg} \alpha_0} \frac{[N^2 (M^2 - 1) + M^2]}{N^2 (M^2 - 1)} v_y, \quad b_x = \frac{B_0}{u_0 \operatorname{tg} \alpha_0} v_y$$

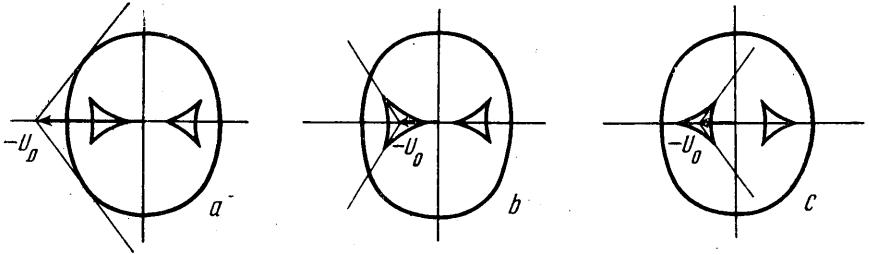
$$\rho_{\perp} = \frac{p_{\perp 0}}{u_0 \operatorname{tg} \alpha_0} \frac{[2N^2 (M^2 - 1) + M^2]}{N^2 (M^2 - 1)} v_y, \quad b_y = \frac{B_0}{u_0} v_y \quad (1.7)$$

$$\lambda = - \frac{4\pi \rho_0 u_0}{B_0^2 \operatorname{tg} \alpha_0} \frac{[M^2 N^{-4} (M^2 - N^2) + 3^{-1} (M^2 - 1)]}{M^2 (M^2 - 1)} v_y$$

Простой подстановкой легко показать, что решение (1.7) обращает в тождество последнее уравнение в (1.5).

Определим знак  $\operatorname{tg} \alpha_0$  из диаграмм Фридрихса, приведенных в [6, 7]. Если уходящие характеристики направлены вниз по потоку, то  $\operatorname{tg} \alpha_0 > 0$ , а если вверх по потоку, то  $\operatorname{tg} \alpha_0 < 0$ .

На фиг. 2 приведены диаграммы Фридрихса и уходящие характеристики для гиперболических областей, в которых выполнены неравенства



Фиг. 2

$M^2 > 1, A^2 > 1$  (в дальнейшем область  $A$ ),  $M^2 < 1, A^2 < 1$  (область  $B$ ) и  $M^2 < 1, A^2 > 1$  (область  $C$ ) соответственно. Следует заметить, что, как видно из (1.6), при  $M^2 > 1, A^2 < 1$  не существует действительных характеристик (эллиптическая область), при  $M^2 > 1, A^2 > 1$  действительные характеристики существуют при любых значениях параметра  $N^2$  (фиг. 2, а), а при  $M^2 < 1, A^2 < 1$  и  $M^2 < 1, A^2 > 1$  действительные характеристики существуют лишь при положительном и отрицательном числителе в выражении (1.6) для  $\operatorname{tg} \alpha_0$  соответственно. Последние два случая отображены на фиг. 2, в и фиг. 2, с. Из фиг. 2 видно, что в областях  $A$  и  $C$  имеем  $\operatorname{tg} \alpha_0 > 0$ , а в области  $B$  имеем  $\operatorname{tg} \alpha_0 < 0$ .

Область  $RMHD$ , названная так в [7], в которой скорость альфвеновской волны меньше скорости медленной магнитозвуковой волны, соответствует неравенствам  $M^2 < 1, A^2 > 1$ . Остальные возможные случаи соответствуют  $PMHD$  в [7].

Для исследования изменений гидродинамических параметров в слабой ударной волне, описываемых уравнениями (1.7), рассмотрим аналогично [7] плоскость  $S_{\parallel}, S_{\perp}$ , где  $S_{\parallel} = 4\pi p_{\parallel 0} / B_0^2$ , а  $S_{\perp} = 4\pi p_{\perp 0} / B_0^2$ .

Кривые, нанесенные на фиг. 3, определяются уравнениями

$$(1) \quad S_{\parallel} = S_{\perp} + 1 \quad (p_{\parallel 0} = p_{\perp 0} + B_0^2 / 4\pi)$$

$$(2) \quad S_{\parallel} = S_{\perp}^2 (S_{\perp} + 1/2)^{-1} \quad (p_{\parallel 0} = p_{\perp 0}^2 (p_{\perp 0} + B_0^2 / 8\pi)^{-1})$$

$$(3) \quad S_{\parallel} = 1/3 M_A^2 \quad (M^2 = 1, M_A^2 = 4\pi \rho_0 u_0^2 / B_0^2)$$

$$(4) \quad S_{\parallel} = S_{\perp} + 1 - M_A^2 \quad (A^2 = 1)$$

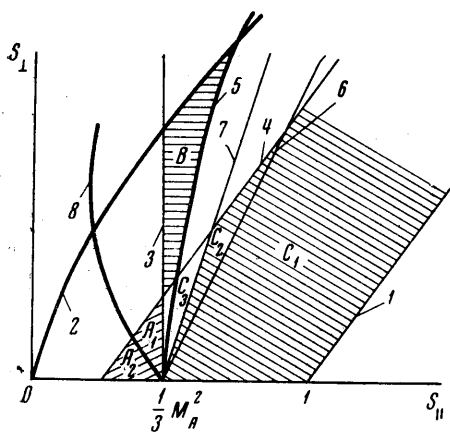
$$(5) \quad S_{\parallel} = 1/6 S_{\perp}^2 (S_{\perp} + 1/2)^{-1} + 1/3 M_A^2 \\ ((M^2 - 1)[1 + A^2(3M^2)^{-1} + A^2 N^{-2}] + M^2 A^2 N^{-4} = 0)$$

$$(6) \quad S_{\parallel} = 1/3 (S_{\perp} + M_A^2) \quad (Y_1 \equiv M^2 - 1 + M^2 N^{-2} = 0)$$

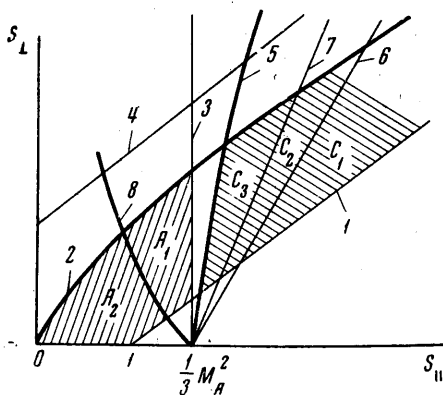
$$(7) \quad S_{\parallel} = 1/6 S_{\perp} + 1/3 M_A^2 \quad (Y_2 \equiv 2(M^2 - 1) + M^2 N^{-2} = 0)$$

$$(8) \quad S_{\perp}^2 - 3S_{\parallel}^2 - 3S_{\parallel}S_{\perp} + M_A^2 S_{\parallel} = 0 \quad (Y_3 \equiv (M^2 - N^2)M^2 / N^4 + \\ + 1/3(M^2 - 1) = 0)$$

Кривые 1 и 2 ограничивают область устойчивости (правее 1 возникает «планговая» неустойчивость, а левее 2 — «зеркальная» неустойчивость). Правее 3 выполняется неравенство  $M^2 < 1$  (на фиг. 3 прямая 3 нанесена для  $M_A^2 < 3$ ). Правее 4 выполняется неравенство  $A^2 > 1$ . Правее 5 числитель в выражении (1.6) для  $\text{tg } \alpha_0$  отрицателен, а левее — положителен. Левее прямых 6 и 7 имеем  $Y_1 > 0, Y_2 > 0$ , а правее —  $Y_1 < 0, Y_2 < 0$  соответственно. Левее кривой 8 имеем  $Y_3 > 0$ , а правее —  $Y_3 < 0$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, прямыми 6, 7 и кривой 8 область  $C$  разбивается на три подобласти:  $C_1, C_2, C_3$ , а область  $A$  — на  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Незаштрихованная область на фиг. 3 соответствует области эллиптичности (действительные характеристики отсутствуют).

Следует заметить, что при  $M_A^2 < 3/4$  пропадает область  $A = A_1 + A_2$ , так как в этом случае прямые 3 и 4 в рассматриваемом квадранте не пересекаются, при  $M_A^2 \geq M_A^{*2} \approx 1.315$  пропадает область  $B$ , так как при  $M_A^2 = M_A^{*2}$  линии 2, 4, 5 пересекаются в одной точке таким образом, что левее этой точки линия 4 лежит выше 2, а при  $M_A^2 > 1.5$  вообще нет точек пересечения 2 и 4 при  $S_{\perp} > 0$  и  $S_{\parallel} > 0$ . Легко показать также, что при  $M_A^2 > 1/4$  кривая 8 пересекает 3 в области устойчивости только в точке ( $S_{\perp} = 0, S_{\parallel} = 1/3 M_A^2$ ), но именно этот случай и представляет интерес, поскольку при  $M_A^2 < 3/4$  область  $A$  отсутствует.

Таким образом, при  $M_A^2 \leq 3/4$  существуют только области  $B$  и  $C$ , при  $3/4 < M_A^2 < M_A^{*2}$  существуют все три области, а при  $M_A^2 \geq M_A^{*2}$  остаются только области  $A$  и  $C$ .

Для солнечного ветра, для которого  $1/3 M_A^2 > 1$  [9], диаграмма в плоскости  $S_{\parallel}, S_{\perp}$  имеет вид, представленный на фиг. 4.

Из проведенного выше анализа и из формул (1.7) окончательно имеем для направления изменения гидродинамических параметров в слабых ударных волнах в различных областях при  $v_y > 0$  (поток плазмы отклоняется вверх)

$$(A_1) \quad v_x < 0, \quad \rho > 0, \quad p_{\perp} > 0, \quad b_x > 0, \quad \lambda > 0.$$

т. е. в этой области поток вдоль оси  $x$  тормозится, плотность и поперечное давление увеличиваются, а параметр, характеризующий планговую неустойчивость, возрастает, и если  $\lambda_0 \sim 1$ , то, вследствие  $\lambda > 0$ , за ударной волной может возникнуть неустойчивость.

(A<sub>2</sub>). Все параметры изменяются так же, как и в области A<sub>1</sub>, но  $\lambda < 0$ , т. е. в такой ударной волне шланговая неустойчивость не развивается.

(B) Так как в этой области  $\operatorname{tg} \alpha_0 < 0$ , то

$$v_x < 0, \quad \rho > 0, \quad p_{\perp} > 0, \quad b_x < 0, \quad \lambda > 0$$

(C<sub>1</sub>)  $v_x > 0, \quad \rho > 0, \quad p_{\perp} > 0, \quad \lambda < 0, \quad b_x > 0$

(C<sub>2</sub>) Все параметры изменяются так же, как и в C<sub>1</sub>, но  $\rho < 0$ .

(C<sub>3</sub>) Все параметры изменяются так же, как и в C<sub>2</sub>, но  $p_{\perp} < 0$ .

В солнечном ветре  $A^2 \gg 1, M^2 \gg 1$ , поэтому на фиг. 3, 4 это соответствует области A. Наиболее часто в солнечном ветре встречаются условия  $S_{\parallel} \sim 1, S_{\perp} \sim 1, M_A^2 \gg 1$ , что соответствует области A<sub>2</sub> ( $Y_3 > 0$ ), т. е. имеют место ударные волны сжатия, в которых при  $\lambda_0 < 1$  не может возникнуть шланговой неустойчивости. Однако при больших значениях параметра  $S_{\parallel}$  может оказаться, что  $Y_3 < 0$ , это соответствует области A<sub>1</sub>, в которой может возникнуть шланговая неустойчивость в ударной волне. Теория таких бесстолкновительных ударных волн развивается в [10].

**2. Линейные задачи обтекания.** Рассмотрим теперь задачи обтекания тел, помещенных в поступательный поток плазмы, движущийся с постоянной скоростью  $u_0$  вдоль оси  $x$ . В поток плазмы вморожено постоянное магнитное поле  $B_0$ , составляющее некоторый угол с направлением скорости. Обтекаемые тела могут быть образованы как твердыми, так и магнитными поверхностями. При этом будем предполагать, что эти поверхности являются линиями тока, т. е. нормальная составляющая скорости плазмы  $v_n$  равна нулю (при  $v \parallel B$  отсюда следует, что и  $B_n = 0$  на этих поверхностях). Кроме того, предположим, что эти тела вносят малые возмущения в основной поток. Считая, что движение описывается системой уравнений (1.1), последние можно линеаризовать. В плоском случае при  $u_0 \parallel B_0$  из (1.1) в линейном приближении получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{2}{3M^2} \frac{\partial b_x}{\partial x} + \left( \frac{1}{3M^2} - \frac{1}{N^2} \right) \frac{\partial b_y}{\partial y} &= 0 & (2.1) \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \frac{1}{N^2} + \frac{1}{M_A^2} \right) \frac{\partial b_x}{\partial y} + \left( \frac{1}{3M^2} - \frac{1}{N^2} - \frac{1}{M_A^2} \right) \frac{\partial b_y}{\partial x} &= 0 \\ b_y - v &= 0 \end{aligned}$$

Здесь величины  $M^2, M_A^2, N^2$  определены в п. 1, а

$$u = \frac{u'}{u_0}, \quad v = \frac{v'}{u_0}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho_0}, \quad b_x = \frac{b_x'}{B_0}, \quad b_y = \frac{b_y'}{B_0}, \quad \mathbf{v} = \{u, v, 0\}$$

Индекс 0 относится к значениям параметров в невозмущенном потоке, штрих означает малые возмущения параметров. Кроме того, при получении (2.1) использовались уравнения

$$p_{\parallel} + 2b_x - 3\rho = 0, \quad p_{\perp} - b_x - \rho = 0 \quad (p_{\parallel} = p'_{\parallel} / p_{\parallel 0}, \quad p_{\perp} = p'_{\perp} / p_{\perp 0}) \quad (2.2)$$

которые также являются следствием линеаризации системы уравнений (1.1).

Из второго и третьего уравнений (2.1) получим интеграл

$$u = \left( \frac{1}{M^2} - \frac{1}{N^2} \right) b_x - \frac{1}{M^2} \rho \quad (2.3)$$

Используя это соотношение, из (2.1) легко получить еще один интеграл

$$(1 - M^2 N^{-2} - M^2) b_x + (M^2 - 1) \rho = 0 \quad (2.4)$$

В (2.3) и (2.4) произвольные функции координаты  $y$  положены равными нулю вследствие отсутствия источников возмущения на бесконечности.

Исключая из (2.1) при помощи (2.3) и (2.4) все переменные, кроме  $v$ , получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5)$$

где  $\operatorname{tg}^2 \alpha_0$  определен формулой (1.6).

Для определения функции  $v$  необходимо решить уравнение (2.5) при граничных условиях, требующих, чтобы поверхность обтекаемого тела совпадала с линией тока, т. е.

$$v = f_{\pm}'(x) \quad \text{при } y = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.6)$$

где  $y = f_{\pm}(x)$  — функция, определяющая форму обтекаемого тела (знак плюс относится к верхней поверхности тела, а знак минус — к нижней),  $l$  — длина тела.

Если функция  $v$  найдена, то остальные функции находятся путем последовательного интегрирования системы уравнений (2.1) и из (2.2)

$$\begin{aligned} b_y = v, \quad b_x = - \int_{-\infty}^x \frac{\partial v}{\partial y} dx, \quad \rho = \frac{(1 - M^2 N^{-2} - M^2)}{(1 - M^2)} b_x \\ u = \frac{M^2}{N^2(1 - M^2)} b_x, \quad p_{\parallel} = \frac{(N^2 - 3M^2 - N^2 M^2)}{(1 - M^2)N^2} b_x \\ p_{\perp} = \frac{(2N^2 - 2M^2 N^2 - M^2)}{(1 - M^2)N^2} b_x \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.5) видно, что область существования действительных характеристик существенно связана со знаком  $\operatorname{tg}^2 \alpha_0$ . При  $\operatorname{tg}^2 \alpha_0 < 0$  уравнение (2.5) эллиптического типа, а при  $\operatorname{tg}^2 \alpha_0 > 0$  — гиперболического. Этот анализ в точности совпадает с анализом, проведенным в п. 1. В частности, в областях  $A$  и  $C$  уходящие характеристики направлены вниз по течению, а в области  $B$  они направлены вверх по течению.

В гиперболической области решение можно еще выразить через форму обтекаемого тела, как это сделано в [3].

В случае  $u_0 \perp V_0$  вместо (2.1) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left( \frac{1}{3M^2} - \frac{1}{N^2} - \frac{1}{M_A^2} \right) \frac{\partial b_x}{\partial y} + \left( \frac{1}{N^2} + \frac{1}{M_A^2} \right) \frac{\partial b_y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \frac{1}{3M^2} - \frac{1}{N^2} \right) \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{2}{3M^2} \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0 \\ b_y + u = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Исключая из (2.8) величину  $b_v$ , для любой из оставшихся функций легко получить уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \eta_i = 0$$

$$A = \frac{1}{2}(-d + \sqrt{d^2 - 4c}), \quad B = \frac{1}{2}(-d - \sqrt{d^2 - 4c})$$

$$d = \frac{2(3M^2)^{-1}(3N^{-2} - 1) + M_A^{-2}(M^{-2} - 1) - N^{-2}(N^{-2} + 1)}{(1 - 2N^{-2} - M_A^{-2})} \quad (2.9)$$

$$c = \frac{M^{-2}[N^{-2} + M_A^{-2} - (3M^2)^{-1}]}{(1 - 2N^{-2} - M_A^{-2})}$$

Конец вектора  $-\mathbf{u}_0$  в рассматриваемом здесь случае находится на оси ординат на диаграммах Фридрикса (фиг. 2, *a, b, c*). Поэтому, как и в обычной магнитной гидродинамике, имеют место два случая. В первом случае имеется четыре действительные характеристики (оба оператора в (2.9) имеют гиперболический тип); во втором случае существуют две действительные характеристики (один оператор гиперболический, а другой — эллиптический).

Поступило 7 V 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G., Goldberger M., Low F. The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. Proc. Roy. Soc., 1956, Ser. A, vol. 236, p. 112.
2. Лунн Y. Discontinuities in an anisotropic plasma. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No 10.
3. Taniuti T. An example of isentropic study flow in the magnetohydrodynamic. Progr. Theoret. Phys., 1958, vol. 19, p. 749.
4. Коган М. Н. Магнетодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, т. 28, вып. 1.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
6. Kato Y., Tajiri M., Taniuti T. Propagation of hydromagnetic waves in collisionless plasma I. J. Phys. Soc. Japan, 1966, vol. 21, No. 4, p. 765.
7. Abraham S. B. Propagation of hydromagnetic waves through an anisotropic plasma. J. Plasma Phys., 1967, vol. 1, No. 3, pp. 361—378.
8. Баранов В. Б. Исследование простых волн в плазме с анизотропным давлением. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
9. Солнечный ветер. М., «Мир», 1968.
10. Kennel C., Sagdeev R. Collisionless shock waves in high  $\beta$  plasmas I. J. Geophys. Res., 1967, vol. 72, No. 13.