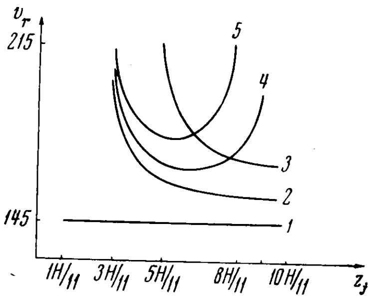
Здесь Ψ_{2s}, $F_s(t)$ — преобразованные правые части условий (3.11) и (3.5), (3.6); I_0, K_0 — функции Бесселя мнимого аргумента; λ_{1s}, λ_{2s}, $\gamma_{1s}(j)$ и $\gamma_{2s}(j)$ собственные числа и собственные векторы разностных краевых задач типа Штурма — Лиувилля. Константы A_{1s} и B_{2s} определяются из краевых условий (3.9), (3.10) и (3.12).



Фиг. 3

Обоснование метода прямых рассматривается по схеме, рассмотренной в [10].

Рассмотренным методом можно решить задачу фильтрации упругой жидкости в замкнутом пласте в условиях медленного его истощения [12], а также задачи притока жидкости к скважинам при наличии непроницаемых включений, искусственных экранов и гидравлических разрывов пласта.

Выполнены численные расчеты задачи (3.1), (3.2) при

$$\psi_2(z) = 10, \quad \psi_1(z) = 0, \quad \eta(r) = 0, \quad r_c = 0.01,$$

$$R = 10, \quad H = 1, \quad K_r = K_z = 1$$

На фиг. 3 представлены графики расчетов нормальной составляющей скорости фильтрации на стенке скважины с двойным видом несовершенства в условиях однородного пласта. Кривые *1*, *2*, *3* получены для $h = 0$, $h = 3H/11$, $h = 5H/11$, $a_1 = h$, $a_2 = H$, а кривые *4* и *5* характеризуют влияние характера вскрытия пласта при $h = 3H/11$, $a_1 = h$, $a_2 = 9H/11$, $a_2 = 8H/11$.

Поступило 2 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лисковец О. А. Метод прямых. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 12.
2. Фадеева В. Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, т. 28.
3. Устинова Н. И. Об одном видоизменении метода прямых. Уч. зап. Казанск. ун-та, Математика, 1955, кн. 115.
4. Пыхачев Г. Б. Подземная гидравлика. М., Гостехиздат, 1961.
5. Бухгольц Г. Расчеты электрических и магнитных полей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. Иванов В. Т. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом конформных решеток. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 4.
7. Алишаев М. Г. О притоке к скважине со щелевым фильтром. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1966.
9. Будак Б. М. Об однородных дифференциально-разностных схемах второго порядка точности для параболических уравнений с разрывными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 5.
10. Иванов В. Т. Решение методом прямых некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 6.
11. Иванов В. Т. Решение задач теплопроводности методом прямых. Инж.-физ. ж., 1969, т. 17, № 4.
12. Иванов Т. Ф. О линейной фильтрации при упругом режиме в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.

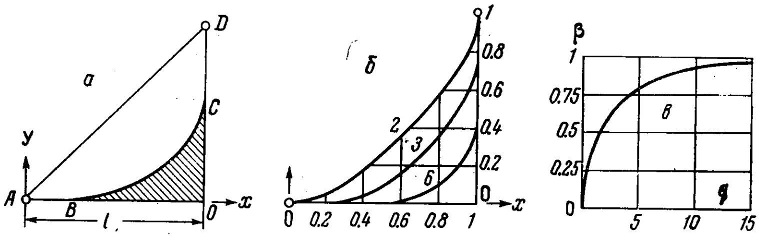
О ПРЕДЕЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ЗАСТОЙНЫХ ЗОН ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ НЕФТИ ВОДОЙ

М. Г. БЕРНАДИНЕР

(*Москва*)

Дается решение нескольких задач по определению границы застойных зон и коэффициента охвата при вытеснении вязко-пластичной нефти водой в однородном и слоисто-неоднородном пласте.

В ходе вытеснения вязко-пластичной нефти водой застойные зоны, возникающие в окрестности критических точек потока, могут превратиться в целики неподвижной нефти. Конечная конфигурация целиков, определяющих потери нефти при заводнении нефтяного пласта, зависит, вообще говоря, от истории продвижения водо-нефтяного контакта. Можно, однако, найти максимальные размеры целиков, в которых



Фиг. 1

нефть при неизменных условиях остается неподвижной неограниченно долго ввиду наличия у нее предельного напряжения сдвига. В области движения воды выполняется закон фильтрации Дарси

$$\mathbf{w} = -(k / \mu) \operatorname{grad} p \tag{0.1}$$

Здесь $\mathbf{w}$ — вектор скорости фильтрации воды, k — проницаемость пласта, μ — вязкость воды, p — давление.

Давление удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta p = 0 \tag{0.2}$$

Граница Г неподвижных целиков нефти будет для фильтрационного потока воды линией тока. Примем также, что вдоль этой границы градиент давления равен по модулю предельному значению для нефти γ, так что

$$\partial p / \partial n = 0, \qquad |\operatorname{grad} p|_{\Gamma} = \gamma \qquad (n \text{ — нормаль к } \Gamma) \tag{0.3}$$

Возникающая задача рассматривалась в работах [1, 2] при приближенном анализе движения однородной вязко-пластичной жидкости в пористой среде. На возможность использования той же постановки при определении предельной конфигурации целиков указано в обзоре [3].

1. Определим размеры целиков при разработке однородного пласта пятиточечной сеткой скважин. При этом бесконечный пласт покрыт системой квадратов со стороной $2l$, в вершинах которых находятся источники (нагнетальные скважины), а в центрах — стоки (эксплуатационные скважины) равной интенсивности Q на единицу мощности пласта. Элемент симметрии течения ($^1/_8$ квадрата сетки) представлен на фиг. 1, *а*, где заштрихованная область — целик неподвижной нефти.

Движение считается плоским и для отыскания комплексного потенциала потока $W = H + i\Psi$ $(H = -(k / \mu)p$ — потенциальная функция, Ψ — функция тока) и неизвестной границы целика можно, как и в работах [1, 2], воспользоваться известными методами теории струй [4].

Комплексная скорость $\omega = dW / dz$, комплексный потенциал W и координаты точек физической плоскости $z = x + iy$, отнесенные к величине l, выражаются через вспомогательную комплексную переменную $\chi = \xi + i\eta$, принимающую значения в верхней полуплоскости $\eta \geqslant 0$

$$W = \frac{Q}{8\pi} \ln \frac{d - \chi}{1 - \chi} \tag{1.1}$$

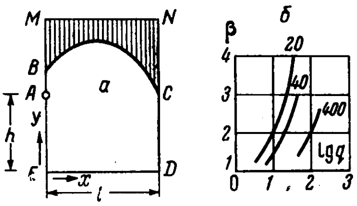
$$\omega = \lambda \left[\frac{(1 + \sqrt{\chi})(\sqrt{d} + \sqrt{\chi})}{(1 - \sqrt{\chi})(\sqrt{d} - \sqrt{\chi})} \right]^{1/4} \tag{1.2}$$

$$z = \frac{Q(d-1)}{8\pi l} \int \frac{\omega}{(1-\chi)(d-\chi)} d\chi \tag{1.3}$$

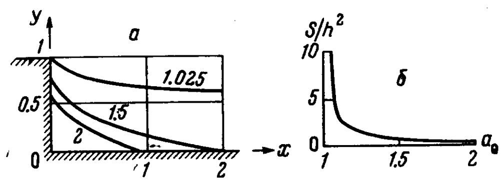
Точки действительной оси $\xi = 1$ и $\xi = d$ являются образами источника и стока соответственно, а отрицательная часть оси ξ — образом границы целика. Постоянная d, входящая в решение, определяется из условия равенства расстояния AD между нагнетательной и эксплуатационной скважинами величине $l\sqrt{2}$, что приводит к уравнению

$$\frac{Q\sqrt{2}(d-1)}{16\pi\lambda l}\int_1^d \frac{d\xi}{(d-\xi)^{1/4}(\xi-1)^{1/4}(\sqrt{d}-\sqrt{\xi})(\sqrt{\xi}+1)}=1 \qquad (1.4)$$

На фиг. 1, *б* показано положение границ целика для значений определяющего параметра задачи $q = Q/\lambda l = 2, 3, 6$; здесь $\lambda = (k/\mu)\gamma$ — скорость фильтрации воды на границе целика. На фиг. 1, *в* показана зависимость от q коэффициента вытеснения β, представляющего собой отношение площади пласта (фиг. 1, *а*), из которой нефть вытеснена S_{ABCD} к его полной площади S_{AOD}.



Фиг. 2



Фиг. 3

2. Если пласт состоит из нескольких несообщающихся между собой пропластков различной мощности и проницаемости, вскрытых единой сеткой скважин, то размеры целиков в каждом из пропластков будут определяться распределением дебитов скважин по пропласткам. Зная суммарный дебит скважин Q на единицу мощности пласта и потребовав, чтобы разность давлений между нагнетательными и эксплуатационными скважинами, рассматриваемыми как окружности малого радиуса $r \ll l$, принимала одинаковые значения для всех пропластков, определяется распределение дебита по слоям. Из (1.1) и (1.3) получаем (ограничиваясь для простоты случаем двухслойного пласта) систему уравнений

$$\frac{Q_1}{k_1}\ln\left[\left(\frac{\pi Q_1}{\lambda_1 r}\right)^4\frac{(\sqrt{d_1}-1)^2}{2^{22}}\right]=\frac{Q_2}{k_2}\ln\left[\left(\frac{\pi Q_2}{\lambda_2 r}\right)^4\frac{(\sqrt{d_2}-1)^2}{2^{22}}\right]$$

$$Q_1h_1+Q_2h_2=Q(h_1+h_2) \qquad (2.1)$$

Здесь h_1 и h_2 — мощность первого и второго пропластков.

Неоднородность пласта может приводить к существенному изменению объемного коэффициента охвата. Так, например, для однородного пласта, выбирая значения параметров, близкие к средним значениям для месторождения Арлан ($\gamma = 0.02$ *атм/м*, $\mu = 1$ *сп*, $k = 0.2$ *дарси*, $Q = 10$ *м²/сут*), получаем $\beta = 0.38$ для $l = 200$ *м* и $\beta = 0.56$ для $l = 100$ *м*. Если же предположить, что при той же средней проницаемости и мощности пласт состоит из двух пропластков с проницаемостью 0.125 и 0.5 *дарси* и отношением мощностей соответственно 4 : 1, получаем $\beta_1 = 0.21$ и $\beta_2 = 0.40$ для $l = 200$ *м*. При этом среднее значение коэффициента охвата составляет 0.24, что существенно ниже значения для однородного пласта той же мощности. Это указывает на необходимость раздельной эксплуатации пропластков.

3. Аналогично могут быть рассмотрены другие типичные для разработки нефтяного месторождения случаи расстановки скважин. Приведем результаты расчета обводнения пласта, вскрытого цепочкой скважин с дебитом Q на единицу мощности пласта и расстоянием между скважинами $2l$, расположенную вблизи прямолинейного экрана (MN), полностью «залитого» целиком неподвижной нефти с границей BC, и на расстоянии h от прямолинейного контура питания (ED) с постоянным давлением (фиг. 2, *а*). На фиг. 2, *б* приведена зависимость коэффициента охвата β (отношение вымываемой площади к характерной, равной lh) для различных значений $q = Q/\lambda l = 20, 40, 400$.

Наличие в пласте непроницаемых включений затрудняет вытеснение нефти и увеличивает потери за счет того, что на включениях нарастают застойные зоны, переходящие в целики неподвижной нефти при обводнении пласта. Чтобы оценить размеры целиков, примем для простоты, что включение в виде полубесконечной полосы с плоским торцом шириной $2h$ обтекается неограниченным фильтрационным потоком воды со скоростью a на бесконечности.

На фиг. 3, *а* представлены координаты границы целиков, отнесенных к величине h, для различных значений параметра $a_0 = a/\lambda = 1.025, 1.5, 2$.

На фиг. 3, *б* дана зависимость площади целика, отнесенная к величине h^2, от параметра a_0. Следует отметить, что в данном случае постановка задачи о предельной границе целика при скорости потока на бесконечности, меньшей λ, теряет смысл.

Автор благодарен В. М. Ентову за большую помощь в работе и В. М. Рыжику за ряд ценных замечаний.

Поступило 6 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глумов И. Ф. О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
2. Алишаев М. Г. О стационарной фильтрации с начальным градиентом. В кн. «Теория и практика добычи нефти», М., «Недра», 1968.
3. Сб. «Развитие исследований по теории фильтрации в СССР за 50 лет», гл. 2, § 10. М., «Наука», 1969.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.