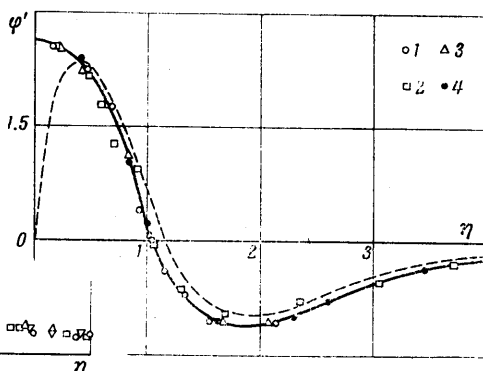


Фиг. 3



Фиг. 4

10 мм. Дополнительное исследование зоны, непосредственно примыкающей к источнику, с помощью короткофокусной шпирен-системы не дало результатов ввиду сильной рефракции лучей в области с большими градиентами температуры.

Поступило 23 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujii T. Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line-heat source and a point heat source. *Internat. J. Heat and Mass Trans.*, 1963, vol. 6, No. 7.
2. Forstrom R. J., Sparrow E. M. Experiments on the buoyant plume above a heated horizontal wire. *Internat. J. Heat and Mass Trans.*, 1967, vol. 10, No. 3.
3. Иоффе Б. В. Рефрактометрические методы химии. Л., Госхимиздат, 1960.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ

В. Т. ИВАНОВ

(Уфа)

Рассматривается решение задач о притоке жидкости к скважинам со щелевым фильтром при различных формах контура питания и к скважинам с двумя видами несовершенства. Решение получено методом прямых [1].

1. Пусть скважина, concentрично расположенная круговому контуру питания, вскрыта n щелями (Фиг. 1), каждая из которых соответствует центральному углу $\alpha_k = \varphi_k' - \varphi_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), и пусть давление на контуре питания и на вскрытой части скважины есть функция полярного угла φ . Кроме того, будем предполагать пласт неоднородным в радиальном направлении. При сформулированных предположениях задача определения потенциала пласта сводится к решению следующей краевой задачи:

найти в области $\Omega (r_c < r < R, 0 < \varphi \leq 2\pi)$ решение уравнений

$$\Phi_{prr}'' + \frac{1}{r} \Phi_{pr}' + \frac{1}{r^2} \Phi_{p\varphi\varphi}'' = 0 \quad (p = 1, 2) \quad (1.1)$$

$$\Phi_p(r, \varphi) = \Phi_p(r, \varphi + 2\pi) \quad (p = 1, 2) \quad (1.2)$$

при краевых условиях

$$\Phi_{1r}'(r_c, \varphi) = 0, \quad \varphi_i' < \varphi < \varphi_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-2) \quad (1.3)$$

$$\varphi_{n-1}' < \varphi_n < 2\pi$$

$$\Phi_1(r_c, \varphi) = \Phi_c(\varphi), \quad \varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_i' \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.4)$$

$$\Phi_2(R, \varphi) = \Phi_k(\varphi), \quad 0 < \varphi \leq 2\pi \quad (1.5)$$

и условиях сопряжения

$$\Phi_1(r_n, \varphi) = \Phi_2(r_n, \varphi), \quad K_1 \Phi_{1r}'(r_n, \varphi) = K_2 \Phi_{2r}'(r_n, \varphi) \quad 0 < \varphi \leq 2\pi \quad (1.6)$$

где K_p ($p = 1, 2$) — проницаемость нефтяного пласта.

Если провести прямые $\varphi = \varphi_j = 2\pi j / m = h_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$), заменить производную по φ в (1.1) разностным отношением, учесть условия периодичности решения (1.2) и условия (1.3)–(1.6), то получим следующую краевую задачу для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_{pj}'' + \frac{1}{r} \Phi_{pj}' + \frac{1}{r^2 h^2} (\Phi_{pj+1} - 2\Phi_{pj} + \Phi_{pj-1}) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} p = 1, 2 \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right) \quad (1.7)$$

$$\Phi_{p0} = \Phi_{pm}, \quad \Phi_{p1} = \Phi_{pm+1} \quad (p = 1, 2)$$

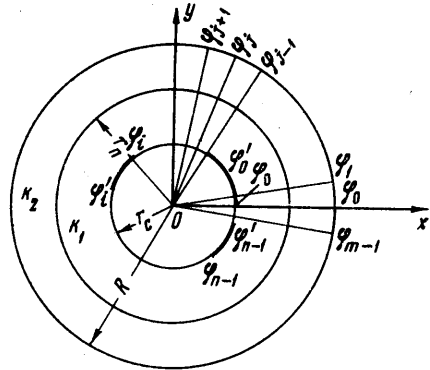
$$\Phi_{1j}'(r_c) = 0, \quad \varphi_i < \varphi_j < \varphi_{i+1}, \quad (1.8)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-2), \quad \varphi'_{n-1} < \varphi < 2\pi \quad (1.9)$$

$$\Phi_{1j}(r_2) = \Phi_{2j}, \quad \varphi_i \leq \varphi_j \leq \varphi_i', \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.10)$$

$$\Phi_{1j}(r_n) = \Phi_{2j}(r_n), \quad K_1 \Phi_{1j}'(r_n) = K_2 \Phi_{2j}'(r_n) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (1.11)$$

$$\Phi_{2j}(R) = \Phi_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (1.12)$$



Фиг. 1

Здесь $\Phi_{pj} = \Phi_{pj}(r)$ — приближенное решение задачи (1.1)–(1.6) на прямой $\varphi = \varphi_j$.
Общее решение систем дифференциальных уравнений (1.7), (1.8) имеет вид [2, 3]

$$\Phi_{1j}(r) = \sum_{s=1}^m b_{js} U_{1s}(r), \quad \Phi_{2j}(r) = \sum_{s=1}^m b_{js} U_{2s} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (1.13)$$

Коэффициенты b_{js} вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} b_{js} &= (-1)^{j-1} \sqrt{2/m} \sin [(2j-1)\pi s / m] \quad (s < l) \\ b_{js} &= -1 / \sqrt{m}, \quad b_{jm} = (-1)^{j-1} / \sqrt{m} \\ b_{js} &= (-1)^{j-1} \sqrt{2/m} \cos [(2j-1)\pi s / m] \quad (s > l) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$(j = 1, 2, \dots, m)$

для случая $m = 2l$

$$\begin{aligned} b_{js} &= (-1)^{j-1} \sqrt{2/m} \sin [\pi(2j-1)(2s-1) / 2m] \quad (s < l+1) \\ b_{jl+1} &= 1 / \sqrt{m} \\ b_{js} &= (-1)^{j-1} \sqrt{2/m} \cos [\pi(2j-1)(2s-1) / 2m] \quad (s > l+1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$(j = 1, 2, \dots, m)$

для случая $m = 2l + 1$

Функции $U_{1s}(r)$ и $U_{2s}(r)$ имеют вид

$$U_{1q}(r) = U_{kq} - B_q \ln(R/r^{\beta} r_n^{1-\beta}), \quad U_{2q}(r) = U_{kq} - B_q \ln(R/r) \quad (q = l, l+1)$$

$$\begin{aligned} U_{1s}(r) &= 1/2 (U_{ks} R^{-\lambda_s} (1+\beta) + B_s [(1-\beta) r_n^{-2\lambda_s} - (1+\beta) R^{-2\lambda_s}]) r^{\lambda_s} + \\ &+ 1/2 (U_{ks} r_n^{2\lambda_s} (1-\beta) R^{-\lambda_s} + B_s [(1+\beta) - R^{-2\lambda_s} r_n^{-2\lambda_s} (1-\beta)]) r^{-\lambda_s} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$U_{2s}(r) = U_{ks} R^{-\lambda_s} r^{\lambda_s} - B_s (R^{-2\lambda_s} r^{\lambda_s} - r^{-\lambda_s}) \quad (s \neq l, l+1)$$

$$\begin{aligned} \beta &= K_2 / K_1; & \lambda_s &= 2h^{-1} \cos(\pi s / m), & \text{если } m &= 2l \\ \lambda_s &= 2h^{-1} \cos[\pi(2s-1) / 2m], & & \text{если } m &= 2l+1, & U_{ks} \quad (s = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Здесь преобразованные правые части (1.12). Произвольные постоянные B_s ($s = 1, 2, \dots, m$) определяются из учета краевых условий (1.9), (1.10), что приводит к решению линейной алгебраической системы уравнений с m неизвестными.

2. Представляет интерес рассмотрение случаев прямолинейного внешнего контура и кругового внешнего контура с эксцентрично заложённой скважиной, так как при произвольном по форме контуре дебит скважины будет промежуточным между дебитом при прямолинейном контуре и дебитом при круговом контуре [4].

Введем на плоскости биполярную систему координат [5], связанную с прямоугольной формулами

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad z = z \quad (2.1)$$

$$-\infty < \alpha < \infty, \quad -\pi < \beta < \pi$$

В координатах (α, β) задача притока жидкости в однородном пласте к скважине со щелевым фильтром сводится к интегрированию уравнения

$$\Phi''_{\alpha\alpha} + \Phi''_{\beta\beta} = 0, \quad \Phi(\beta) = \Phi(\beta + 2\pi) \quad (2.2)$$

при краевых условиях

$$\Phi'_\alpha(\alpha_1, \beta) = 0, \quad \beta_i' < \beta < \beta_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-2) \quad (2.3)$$

$$\beta'_{n-1} < \beta < \pi$$

$$\Phi(\alpha_1, \beta) = \Phi_c(\beta), \quad \beta_i \leq \beta \leq \beta_i' \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.4)$$

$$\Phi(\alpha_2, \beta) = \Phi_k(\beta), \quad -\pi < \beta < \pi \quad (2.5)$$

Здесь $\alpha = \alpha_1$ — контур скважины, $\alpha = \alpha_2$ — контур питания.

Будем решать задачу (2.1)–(2.5) по следующей схеме метода прямых:

$$\Phi_j''(\alpha) + h^{-2}[\Phi_{j+1}(\alpha) - 2\Phi_j(\alpha) + \Phi_{j-1}(\alpha)] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.6)$$

$$\Phi_0(\alpha) = \Phi_m(\alpha), \quad \Phi_1(\alpha) = \Phi_{m+1}(\alpha) \quad (2.7)$$

$$\Phi_j'(\alpha_1) = 0 \quad \beta_i' < \beta_j < \beta_{i+1}, \quad \beta_{n-1} < \beta < \pi, \quad (i = 0, 1, \dots, n-2) \quad (2.8)$$

$$\Phi_j(\alpha_2) = \Phi_{c_j}, \quad \beta_i j \beta_j \leq \beta_i^1 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.9)$$

$$\Phi_j(\alpha_2) = \Phi_{k_j}, \quad -\pi < \beta_j < \pi \quad (2.10)$$

Система дифференциальных уравнений (2.6), (2.7) с учетом краевого условия (2.10) имеет решение

$$\Phi_j(\alpha) = \sum_{s=1}^m b_{js} U_s(\alpha)$$

$$U_q(\alpha) = U_{kq} + B_q(\alpha - \alpha_2), \quad q = l \quad \text{при } m = 2l, \quad q = l+1 \quad \text{при } m = 2l+1$$

$$U_s(\alpha) = \frac{B_s \operatorname{sh} \lambda_s(\alpha - \alpha_2)}{\operatorname{ch} \lambda_s \alpha_2} + \frac{U_{k_s} \operatorname{ch} \lambda_s \alpha}{\operatorname{ch} \lambda_s \alpha_2} \quad \left(\begin{array}{ll} s \neq l & \text{при } m = 2l \\ s \neq l+1 & \text{при } m = 2l+1 \end{array} \right)$$

Произвольные постоянные B_s ($s = 1, 2, \dots, m$) определяются из краевых условий (2.8) и (2.9).

Как в п. 1, можно рассмотреть случай многослойной среды, если скачок проницаемости нефтяного пласта находится на координатной линии $\beta = \text{const}$. Если граница скачка находится вблизи координатной линии, то можно выполнять снос условий сопряжения на эту линию.

Для произвольного внешнего контура решение задачи можно получить методом конформных решеток [6], если удастся найти функцию, отображающую данную область на кольцевую.

Изложенным методом можно получить решение задачи, рассмотренной в [7] с учетом перепада давления вдоль трещины.

3. Рассмотрим решение задачи притока жидкости к скважине с двумя видами несовершенства в неоднородном пласте ограниченной мощности. Задача формулируется следующим образом:

требуется в области Ω (фиг. 2) найти решение уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r k_r(z) \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k_z(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0, \quad u = P - \gamma(H - z) \quad (3.1)$$

при краевых условиях

$$\begin{aligned} u_z'(r, 0) &= 0, & 0 \leq r \leq R; & & u_z'(r, H) &= 0, & r_c \leq r \leq R \\ u_r'(r_c, z) &= 0, & h < z < a_1, & & a_2 < z < H \\ u(r_c, z) &= \psi_1(z), & a_1 \leq z \leq a_2; & & u(r, h) &= \eta(r), & 0 \leq r \leq r_c \\ u(R, z) &= \psi_2(z), & 0 \leq z \leq H \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь r_c — радиус скважины, R — радиус контура питания, H — мощность пласта, (a_1, a_2) — интервал вскрытия пласта, P — давление, u — потенциал скорости, γ — удельный вес жидкости, K_r и K_z — горизонтальная и вертикальная проницаемости.

Если пласт состоит из нескольких пропластков с границами $z = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), то к условиям (3.1), (3.2) необходимо добавить условия сопряжения на линиях разрывов проницаемости

$$\begin{aligned} u(r, a_i - 0) &= u(r, a_i + 0) \\ K_z(a_i - 0)u_z'(r, a_i - 0) &= K_z(a_i + 0)u_z'(r, a_i + 0) \\ (i = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Представим искомую функцию в виде

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{если } (r, z) \in \Pi_1 \\ u_2, & \text{если } (r, z) \in \Pi_2 \end{cases}$$

с условием согласования решений на линии $r = r_c$

$$\begin{aligned} u_1(r_c, z) &= u_2(r_c, z), \\ u_{1r}'(r_c, z) &= u_{2r}'(r_c, z) \quad (0 < z < h) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Разбивая отрезок $[0, H]$ на $n + 1$ произвольных частей прямыми $z = z_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) с шагами $h_j = z_j - z_{j-1}$ так, чтобы k прямых проходили через точки $z = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), а $m + 1$ прямая — через $z = h$, и аппроксимируя производные по z разностными отношениями на неравномерной сетке [8], получаем однородную дифференциально-разностную схему [9]

$$u_{1j}'' + r^{-1}u_{1j}' + B_j u_{1j+1} - A_j u_{1j} + C_j u_{1j-1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.5)$$

$$u_{11} = u_{10}, \quad u_{1m+1} = \eta(r), \quad 0 \leq r \leq r_c \quad (3.6)$$

$$u_{2j}'' + r^{-1}u_{2j}' + B_j u_{2j+1} - A_j u_{2j} + C_j u_{2j-1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

$$u_{21} = u_{20}, \quad u_{2n} = u_{2n+1} \quad (3.8)$$

$$u_{2j}'(r_c) = 0, \quad h < z_j < a_1, \quad a_2 < z_j < H \quad (3.9)$$

$$u_{2j}(r_c) = \psi_{1j}, \quad a_1 \leq z_j \leq a_2 \quad (3.10)$$

$$u_{2j}(R) = \psi_{2j}, \quad 0 < z_j < H \quad (3.11)$$

$$u_{1j}(r_c) = u_{2j}(r_c), \quad u_{1j}'(r_c) = u_{2j}'(r_c) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.12)$$

Коэффициенты уравнений A_j, B_j и C_j определяются по формулам

$$C_j = k_{zj-1/2} / k_{rj} \cdot h_j h_{j+1}, \quad B_j = k_{zj+1/2} / k_{rj} \cdot h_j h_{j+1}, \quad A_j = B_j + C_j$$

где

$$h = 0.5(h_j + h_{j+1}), \quad z_{zj-1/2} = K_z(z_j - 0.5h_j), \quad k_{zj+1/2} = K_z(z_j + 0.5h_{j+1})$$

$$k_{rj}^* = 0.5[K_r(z_j + 0) + K_r(z_j - 0)]$$

Общие решения систем дифференциальных уравнений (3.5) — (3.8) с учетом краевого условия (3.11) имеют вид [10, 11]

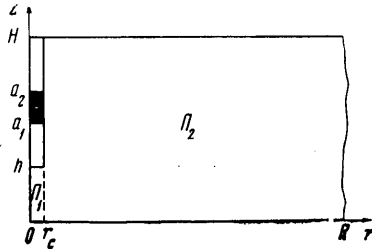
$$u_{1j}(r) = \sum_{s=1}^m U_{1s}(r) \gamma_{1s}(j), \quad u_{2j}(r) = \sum_{s=1}^n U_{2s}(r) \gamma_{2s}(j) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.13)$$

$$U_{1s}(r) = A_{1s} I_0(\sqrt{\lambda_{1s}} r) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1s}}} \int_0^r t F_s(t) [K_0(\sqrt{\lambda_{1s}} t) I_0(\sqrt{\lambda_{1s}} r) - K_0(\sqrt{\lambda_{1s}} r) I_0(\sqrt{\lambda_{1s}} t)] dt$$

$$U_{21}(r) = \Psi_{21} + B_{21} \ln(r/R),$$

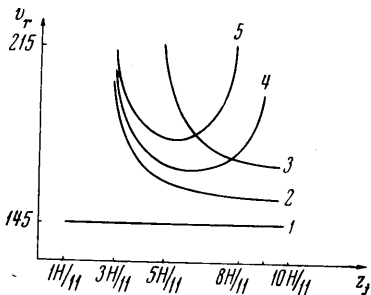
$$U_{2s}(r) = \frac{\Psi_{2s} I_0(\sqrt{\lambda_{2s}} R) - B_{2s} [K_0(\sqrt{\lambda_{2s}} R) I_0(\sqrt{\lambda_{2s}} r) - K_0(\sqrt{\lambda_{2s}} r) I_0(\sqrt{\lambda_{2s}} R)]}{I_0(\sqrt{\lambda_{2s}} R)}$$

$$(s = 1, 2, \dots, n)$$



Фиг. 2

Здесь Ψ_{2s} , $F_s(t)$ — преобразованные правые части условий (3.11) и (3.5), (3.6); I_0 , K_0 — функции Бесселя мнимого аргумента; λ_{1s} , λ_{2s} , $\gamma_{1s}(j)$ и $\gamma_{2s}(j)$ — собственные числа и собственные векторы разностных краевых задач типа Штурма — Лиувилля. Константы A_{1s} и B_{2s} определяются из краевых условий (3.9), (3.10) и (3.12).



Фиг. 3

Обоснование метода прямых рассматривается по схеме, рассмотренной в [10].

Рассмотренным методом можно решить задачу фильтрации упругой жидкости в замкнутом пласте в условиях медленного его истощения [12], а также задачи притока жидкости к скважинам при наличии непроницаемых включений, искусственных экранов и гидравлических разрывов пласта.

Выполнены численные расчеты задачи (3.1), (3.2) при

$$\Psi_2(z) = 10, \quad \psi_1(z) = 0, \quad \eta(r) = 0, \quad r_c = 0.01,$$

$$R = 10, \quad H = 1, \quad K_r = K_z = 1$$

На фиг. 3 представлены графики расчетов нормальной составляющей скорости фильтрации на стенке скважины с двойным видом несовершенства в условиях однородного пласта. Кривые 1, 2, 3 получены для $h = 0$, $h = 3H/11$, $h = 5H/11$, $a_1 = h$, $a_2 = H$, а кривые 4 и 5 характеризуют влияние характера вскрытия пласта при $h = 3H/11$, $a_1 = h$, $a_2 = 9H/11$, $a_2 = 8H/11$.

Поступило 2 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лисковец О. А. Метод прямых. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 12.
2. Фадеева В. Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, т. 28.
3. Устинова Н. И. Об одном видоизменении метода прямых. Уч. зап. Казанск. ун-та, Математика, 1955, кн. 115.
4. Пыхачев Г. Б. Подземная гидравлика. М., Гостехиздат, 1961.
5. Бухгольц Г. Расчеты электрических и магнитных полей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. Иванов В. Т. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом конформных решеток. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 4.
7. Алишаев М. Г. О притоке к скважине со щелевым фильтром. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. Физматгиз, 1966.
9. Будак Б. М. Об однородных дифференциально-разностных схемах второго порядка точности для параболических уравнений с разрывными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 5.
10. Иванов В. Т. Решение методом прямых некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 6.
11. Иванов В. Т. Решение задач теплопроводности методом прямых. Инж.-физ. ж., 1969, т. 17, № 4.
12. Иванов Т. Ф. О линейной фильтрации при упругом режиме в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.

О ПРЕДЕЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ЗАСТОЙНЫХ ЗОН ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ НЕФТИ ВОДОЙ

М. Г. БЕРНАДИНЕР

(Москва)

Дается решение нескольких задач по определению границы застойных зон и коэффициента охвата при вытеснении вязко-пластичной нефти водой в однородном и слоисто-неоднородном пласте.

В ходе вытеснения вязко-пластичной нефти водой застойные зоны, возникающие в окрестности критических точек потока, могут превратиться в целики неподвижной