

По формулам (2) и (13) находим

$$\sigma = \sigma(\theta) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\varepsilon \sin \theta} \quad (14)$$

Обозначая правую часть формулы (11) через $\Phi(\zeta)$, для рассматриваемого примера будем иметь

$$e^{-i\sigma} \ln \rho + i \int e^{-i\sigma(\theta)} d\theta = C + \Phi(\zeta) \quad (15)$$

Отсюда, учитывая формулу (14), окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon \sin \theta}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2) + 2\varepsilon \cos \theta}} \ln \rho + (1 + \varepsilon) E \left(\frac{\theta}{2}, \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1 + \varepsilon} \right) + (1 - \varepsilon) F \left(\frac{\theta}{2}, \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1 + \varepsilon} \right) - \\ & - \frac{i}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2) + 2\varepsilon \cos \theta}} [(1 + \varepsilon \cos \theta) \ln \rho + 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \theta] = C + \Phi(\zeta) \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода.

Полагая в этой формуле $\varepsilon = 0$, получаем обтекание дуги окружности, $\varepsilon < 1$ — эллипса, $\varepsilon = 1$ — параболы, $\varepsilon > 1$ — гиперболы.

Постоянная интегрирования C может быть найдена путем сопоставления точек ζ_s и z_s .

В качестве второго примера рассмотрим обтекание дуги логарифмической спирали потоком от вихреисточника, расположенного не в центре кривой ($z_1 \neq 0$). Для логарифмической спирали $\sigma = \operatorname{const}$, поэтому из формулы (11) сразу получаем выражение для отображающей функции

$$\begin{aligned} e^{i\sigma} \left\{ \ln^{1/2} [\sqrt{\rho^2 - 2\rho_1 \cos(\theta - \theta_1) + \rho_1^2} + \rho - \rho_1 \cos(\theta - \theta_1)] + \right. \\ \left. + \frac{2i\rho}{\rho + \rho_1} F \left(\frac{\theta - \theta_1}{2}, \frac{2\sqrt{\rho_1\rho}}{\rho_1 + \rho} \right) \right\} = C + \Phi(\zeta) \end{aligned} \quad (17)$$

В частном случае, когда $z_1 = 0$, отображающая функция принимает весьма простой вид

$$e^{-i\sigma} \ln z = C + \Phi(\zeta) \quad (18)$$

Если в двух последних формулах положить $\sigma = 1/2\pi$, то получим обтекание дуги окружности, при $\sigma = 0$ — отрезка прямой, проходящей через начало координат.

Поступило 20 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
2. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
3. Лаврентьев М. А., Шабат В. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.

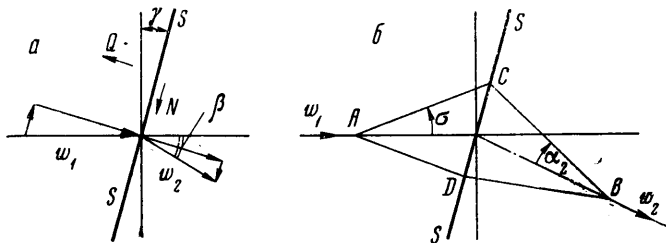
СВЕРХЗВУКОВОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ С ПОДВОДОМ ТЕПЛА И ОТКЛОНЕНИЕМ ПОТОКА

В. С. САДОВСКИЙ, Г. И. ТАГАНОВ

(Москва)

При большой сверхзвуковой скорости потока секундная масса воздуха, участвующая в создании тяги, становится сравнимой с секундной массой воздуха, отклоняемого вниз крылом. Рассматривается некоторый предельный случай наметившейся уже тенденции к объединению процессов создания тяги и подъемной силы. В силу ряда свойств соответствующего ему пространственного течения с подводом тепла и отклонением потока действующие на тело аэродинамические силы определяются из одномерных уравнений газовой динамики, хотя нахождение формы тела связано с построением двух течений, близких к осесимметричным.

1. Пусть в сверхзвуковом потоке совершенного невязкого газа имеется некоторая плоская поверхность сильного разрыва, такая, что на ней параметры терпят разрыв, а газ подвергается воздействию распределенных сил и нагреванию. По обе стороны поверхности разрыва параметры газа постоянны. Углы наклона γ поверхности разрыва S и отклоненного ею потока β , а также направления сил N и Q , взятых на единицу площади поверхности, показаны на фиг. 1, а. Для нахождения



Фиг. 1

параметров газа за поверхностью сильного разрыва воспользуемся законами сохранения массы и изменения импульса вдоль и по нормали к ней, а также уравнением состояния газа

$$\begin{aligned} \rho_1 w_1 \cos \gamma &= \rho_s w_s \cos (\beta - \gamma) \\ \rho_s w_s^2 \cos (\beta - \gamma) \sin (\beta - \gamma) + \rho_1 w_1^2 \cos \gamma \sin \gamma &= N_s \\ \rho_s w_s^2 \cos^2 (\beta - \gamma) - \rho_1 w_1^2 \cos^2 \gamma &= p_1 - p_s - Q_s, \quad p = \rho RT \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь p , ρ , T , w — давление, плотность, температура и скорость газа, R — газовая постоянная, индексы 1 и s относятся к параметрам течения слева и справа от поверхности S . Отношение полных температур θ_s и давлений v_s по обе стороны поверхности задано

$$p_{0s} = v_s p_{01}, \quad T_{0s} = \theta_s T_{01} \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем индекс нуль относится к параметрам торможения. Система уравнений (1.1), (1.2) дает возможность определить давление, плотность, скорость и температуру за поверхностью разрыва, а также силы N_s и Q_s при заданных значениях величин M_1 , β , γ , θ_s , v_s .

Элементарные преобразования системы приводят к следующему уравнению для определения скорости:

$$\begin{aligned} q(\lambda_s) &= q(\lambda_1) \frac{\sqrt{\theta_s} \cos \gamma}{v_s \cos (\beta - \gamma)}, \\ q(\lambda) &= \frac{(\kappa + 1)^{\kappa'}}{2} \lambda \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{\kappa'} \quad \left(\kappa' = \frac{1}{\kappa - 1} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $q(\lambda)$ — известная газодинамическая функция приведенной скорости λ , а κ — отношение удельных теплоемкостей. Параметры за поверхностью разрыва определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{p_s}{p_1} &= v \left(\frac{f(M_1)}{f(M_s)} \right)^{\kappa \kappa'}, & \frac{\rho_s}{\rho_1} &= \frac{v_s}{\theta_s} \left(\frac{f(M_1)}{f(M_s)} \right)^{\kappa'} \\ \frac{T_s}{T_1} &= \theta_s \frac{f(M_1)}{f(M_s)}, & f(M) &= 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для величины распределенных сил, действующих на газ на поверхности разрыва, имеем

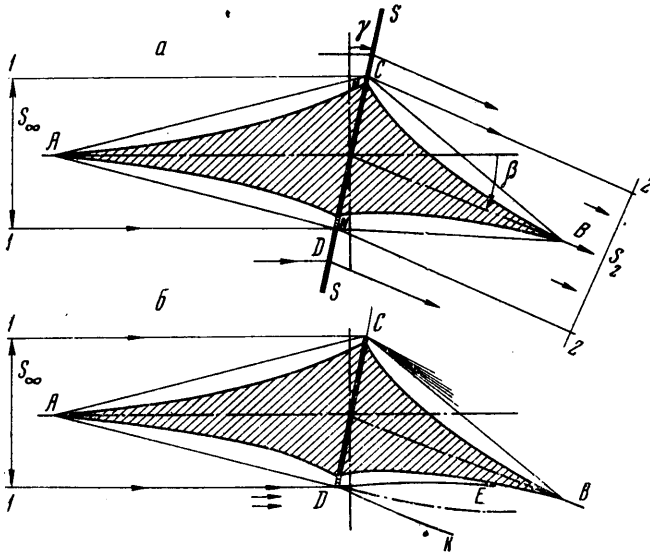
$$\begin{aligned} N_s &= q_1 \left(1 + \frac{\rho_1 \operatorname{tg} (\beta - \gamma)}{\rho_s \operatorname{tg} \gamma} \right) \sin 2\gamma \\ Q_s &= q_1 \left[\frac{1 - p_s/p_1}{1/2 \kappa M_1^2} + 2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_s} \right) \cos^2 \gamma \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из свойств функции $q(\lambda)$ следует, что в зависимости от значений величин M_1 , β , γ , θ_s , v_s уравнение (1.3) имеет либо два решения ($M_s < 1$ и $M_s > 1$), либо одно ($M_s = 1$), либо вовсе не имеет решений.

Отметим, что при $\theta_s = \nu_s = 1$ и $\beta = 2\gamma$ соотношения (1.3) — (1.5) дают известное [1] сверхзвуковое решение

$$M_s = M_1, \quad p_s = p_1, \quad \rho_s = \rho_1, \quad T_s = T_1, \quad Q_s = 0, \quad N_s = \rho_1 w_1^2 \sin \beta$$

т. е. обобщенная поверхность сильного разрыва отклоняет поток, не изменяя его параметров, на угол $\beta = 2\gamma$.



Фиг. 2

2. Используя полученные выше результаты, можно построить некоторое вырожденное пространственное сверхзвуковое течение газа с подводом тепла и отклонением потока около сложного тела конечного объема.

Пусть в сверхзвуковом потоке газа имеется плоская поверхность сильного разрыва рассмотренного выше типа. Независимые параметры M_1 , β , γ , θ_s и ν_s выбраны так, что существует сверхзвуковое решение системы (1.1), (1.2), определяемое соотношениями (1.3) — (1.5), которое и рассматривается в дальнейшем.

Осуществим следующее построение (фиг. 1, б). Из точек C и D на обобщенной поверхности сильного разрыва в плоскости симметрии течения под некоторыми углами σ и $\alpha_2 = \arcsin M_s^{-1}$ (угол Маха) к векторам скорости w_1 и w_2 проведем прямые и из точек их пересечения A и B опишем около w_1 и w_2 конические поверхности вращения с полууглами при вершинах конусов σ и α_2 . Пересечение этих поверхностей плоскостью SS дает два эллипса, у которых по построению одна ось CD является общей. Рассмотрение геометрической пространственной картины показывает, что для совпадения двух других осей необходимо выполнение соотношения

$$\frac{\cos 2\sigma + \cos 2\gamma}{1 + \cos 2\sigma} = \frac{\cos 2\alpha_2 + \cos 2(\beta - \gamma)}{1 + \cos 2\alpha_2} \quad (2.1)$$

В дальнейшем угол наклона поверхности разрыва γ выбирается так, что это соотношение выполняется. Совпадение двух эллипсов означает, что поверхности CAD и CBD образуют замкнутую поверхность, которую можно рассматривать в качестве контрольной.

«Вырежем» из контрольной поверхности первоначальное течение и поместим в нее некоторое тело (фиг. 2, а), удовлетворяющее следующим требованиям:

- а) передняя его часть MAN вызывает присоединенный скачок уплотнения, являющийся конической поверхностью, которую и примем за поверхность CAD ;
- б) центральная часть тела (эллиптическое кольцо $CM-ND$ в плоскости S) представляет собой некоторую вырожденную решетку профилей и осуществляет поворот сжатого передней частью тела газа на некоторый угол. Кроме того, в решетке газ нагревается до температуры T_{02} , причем $\theta_2 = \theta_s$, т. е.

$$T_{02} = \theta_2 T_{01} = \theta_s T_{01}$$

Подвод тепла и поворот потока осуществляется с некоторым коэффициентом восстановления полного давления v_3 , одинаковым для всех линий тока. Поток по обе стороны решетки остается сверхзвуковым;

в) кормовая часть тела MBN организует расширение до площади S_2 и числа Маха M_2 и выравнивание параметров отклоненного телом на угол $\beta = \beta_s$ потока, так что параметры течения на внутренней стороне обратного конуса Маха постоянны и имеют в дальнейшем индекс 2.

Итак, по построению слева и справа поверхности CAD течения срачиваются условиями на скачке уплотнения. Однако условия срачивания течений по обе стороны конуса Маха, вообще говоря, не выполняются.

Обозначим коэффициент восстановления полного давления в скачке уплотнения CAD через v и пусть скачок и решетка профилей выбраны так, что $v_2 = v v_3 = v_s$, т. е.

$$p_{02} = v_s p_{01} \quad (2.3)$$

Докажем следующее утверждение: если тело, помещенное внутрь контрольной поверхности $ACBDA$, удовлетворяет требованиям (а) — (б), угол γ выбран из соотношения (2.1), газ по обе стороны контрольной поверхности описывается одним уравнением состояния и выполняются условия (2.2), (2.3), то сложное пространственное течение внутри CBD склеивается непрерывным образом на поверхности обратного конуса Маха с одномерным течением за обобщенной поверхностью сильного разрыва. Для определения действующих на тело аэродинамических сил достаточно умножить выражения (1.5) для силы N_s и Q_s на величину площади эллипса $C-D$.

Обозначим величину сил, действующих на газ со стороны тела в направлениях вдоль и по нормали к поверхности S и отнесенных к величине площади эллипса $C-D$, через N_2 и Q_2 , а при составлении уравнений движения будем брать внешнюю сторону скачка уплотнения CAD и внутреннюю сторону конуса Маха CBD .

Легко видеть, что в этом случае уравнения сохранения массы и количества движения в направлениях вдоль и нормально плоскости S в точности совпадают с соотношениями (1.1), в которых индекс s следует заменить на 2. Кроме того, $\theta_2 = \theta_{s_2}$, $v_2 = v_s$ и $p = \rho RT$. Таким образом, для обоих течений полные системы уравнений движения и начальные параметры газа (с индексом 1) совпадают. Утверждение доказано, так как в обоих случаях берется сверхзвуковое решение.

Итак, в присутствии обобщенной поверхности сильного разрыва S аэродинамические силы, действующие на рассматриваемое пространственное тело, определяются из одномерных уравнений движения, причем характерным для решения является то, что при варьировании параметров в широком диапазоне ($M_1 \geq 2.5$, $30^\circ \geq \beta > 0$, $\sigma = 14.4^\circ$; $0.3 \leq v_s \leq 1$; $1.3 \geq \theta_s \geq 1$) с точностью до 1% выполняется соотношение $\gamma = 1/2 \beta$, которое, как известно [1], является точным при $v_s = \theta_s = 1$. Давление же в отклоненном потоке оказывается больше, чем в невозмущенном.

Соотношения (1.5), вытекающие из одномерных уравнений, могут быть использованы для определения значения аэродинамических сил, действующих на изолированное пространственное тело.

При этом взаимодействие невозмущенного и отклоненного потоков на границе решетки приведет лишь к небольшому изменению аэродинамических сил, вычисленных по соотношениям (1.5) и площади эллипса $C-D$, так как возмущения попадут лишь на ту часть кормовой части тела, вклад которой в создание общей силы незначителен (фиг. 2, б).

3. Оценим эффективность создания аэродинамических сил рассматриваемым телом, отличающимся тем, что одна и та же масса газа, к которой подводится тепло, участвует в создании как подъемной силы, так и силы тяги, т. е. рассматривается предельный случай наметившейся уже тенденции к включению двигателя в процесс создания подъемной силы. Действующие на тело силы определяются соотношениями (1.5) и площадью S_0 эллипса $C-D$. Спроектировав силы на направления вдоль и по нормали к набегающему потоку и отнеся их к величине скоростного напора невозмущенного потока q_1 и площади $S_1 = S_0 \cos \gamma$, для коэффициентов подъемной и тангенциальной сил получаем

$$c_y = \frac{N \cos \gamma - Q \sin \gamma}{q_1 \cos \gamma}, \quad c_x = \frac{N \sin \gamma + Q \cos \gamma}{q_1 \cos \gamma} \quad (3.1)$$

Необходимо отметить, что c_x является коэффициентом сопротивления лишь при отсутствии подвода тепла к газу ($\theta_2 = 1$). В случае $\theta_2 > 1$ аэродинамическое сопротивление и силу тяги данного тела разделить невозможно.

Случай отсутствия тангенциальной составляющей аэродинамической силы соответствует установившемуся движению весомого тела в атмосфере. Отсутствие тангенциальной силы приводит к соотношению

$$N \sin \gamma + Q \cos \gamma = 0 \quad (3.2)$$

которое уменьшает число независимых параметров на единицу. Условие (3.2) совместно с (1.3) и (2.1) определяет величины угла γ , числа Маха M_2 и θ_2 при заданных M_1, β, ν_2 .

Известно, что установившееся горизонтальное движение летательного аппарата в атмосфере с постоянной температурой определяется формулой Бреге

$$L = a \ln \frac{G_0}{G}, \quad a = \frac{k w_1}{c_e} \quad (3.3)$$

Здесь L — максимальная дальность полета, G_0 и G — начальный и конечный веса аппарата, k — его аэродинамическое качество, c_e — удельный расход топлива, a — коэффициент Бреге. В силу отмеченной выше особенности (сопротивление рассматриваемого тела и его тягу невозможно разделить) в данном случае нельзя использовать такие понятия, как аэродинамическое качество и удельный расход топлива. Однако формула (3.3) по-прежнему определяет движение, так как коэффициент a можно выразить через величины, имеющие вполне определенный смысл и для рассматриваемого предельного случая.

Действительно, уравнение энергии для газа, к которому подводится количество тепла

$$Q = \frac{\eta c_e P}{g} \text{ от полного сгорания топлива } m,$$

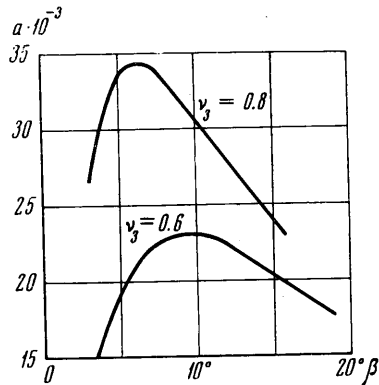
дает

$$c_p T_{01} + \frac{Q}{\rho_1 w_1 S_1} = c_p T_{02} \quad (3.4)$$

Здесь P — сила тяги, η — теплотворная способность топлива, g — ускорение свободного падения, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Используя соотношение $k = c_p q_1 S_1 / P$ и (3.4), получаем, что

$$a = \frac{M_1^2}{2 + (\kappa - 1) M_1^2} \frac{\kappa \eta R c_p}{c_p g (\theta_2 - 1)} \quad (3.5)$$

Таким образом, коэффициент Бреге определяется величинами c_p и θ_2 , которые находятся решением системы (1.3), (2.1) и (3.2) и соотношениями (1.4). Были проведены расчеты величины a для $\eta = 42.9 \cdot 10^6$ Дж/кг, при различных значениях чисел Маха M_1 , угла отклонения потока β , потерь полного давления в головном скачке уплотнения ν и решетке профилей ν_2 . На фиг. 3 приведена зависимость коэффициента a (в км) от угла β при $M_1 = 6$, $\nu = 0.935$ для $\nu_2 = 0.8$ и 0.6 .



Фиг. 3

Поступило 20 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Таганов Г. И. О сопротивлении, связанном с созданием подъемной силы при сверхзвуковой скорости потока. ПММ, 1956, вып. 3.

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ВАН ДРИЙСТА ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕНА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

Н. П. Снегова

(Ленинград)

Исследуется возможность применения формулы Ван Дрейста для расчета теплообмена при больших числах Прандтля.

В исследованиях процесса теплообмена в пристеночной области турбулентного течения вначале использовалась двухслойная теория [1, 2].

Карману [3, 4] принадлежит заслуга создания первой трехслойной теории теплообмена, частично учитывающей взаимодействие молекулярного и молярного обмена в потоке. Однако вследствие пренебрежения турбулентными пульсациями в вязком подслое эта теория дает удовлетворительные результаты лишь до чисел Прандтля,