ОБТЕКАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗВЕЗДНОГО КОНТУРА

В. В. ПАК

(*Донецк*)

Рассматривается обтекание произвольного (замкнутого или разомкнутого) звездного контура. Разыскивается выражение для комплексного потенциала на плоскости вспомогательного переменного, являющегося функцией скорости и построенного таким образом, чтобы заданный контур при отображении на вспомогательную плоскость переходил в ось абсцисс. Функция, отображающая вспомогательную плоскость на плоскость искомого течения, получается путем интегрирования.

Рассмотрим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ произвольный замкнутый криволинейный контур L, имеющий хотя бы одну внутреннюю звездную точку z_0. Не уменьшая общности, можно положить, что $z_0 = 0$, благодаря чему кривую L можно задать уравнением

$$z = \rho(\theta) e^{i\theta} \tag{1}$$

Предположим, что функция $\rho(\theta)$ на L аналитична. Тогда уравнение (1) можно представить следующим образом:

$$z = \exp\left[\int (i + \operatorname{ctg}\sigma)\, d\theta + A\right] \qquad \left(\operatorname{ctg}\sigma = \frac{d\rho}{\rho\, d\theta},\ A = \mathrm{const}\right) \tag{2}$$

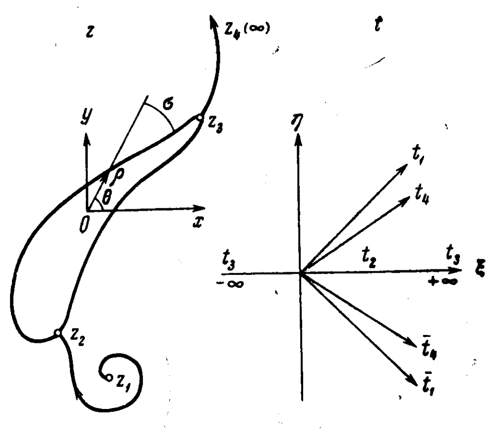
В некоторой точке z_1, лежащей вне профиля, поместим вихреисточник с интенсивностью $Q + i\Gamma_1$, а в бесконечно удаленной точке — вихре-сток $Q - i\Gamma_2$. Разность циркуляций $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ равна циркуляции скорости вокруг контура L

$$\Gamma = \int_L \bar{V}\, dz \tag{3}$$

Введем вспомогательную переменную

$$t = \frac{dz}{dw}\,\frac{z - z_2}{z - z_1}\, e^{-i(\theta+\sigma+\alpha)}$$

$$\alpha = \arg\frac{z - z_2}{z - z_1} \tag{4}$$



Фиг. 1

Здесь z_2 — передняя критическая точка на профиле, в которой скорость обращается в нуль.

Нетрудно видеть, что при таком задании t профиль L на плоскости этой переменной переходит в ось абсцисс, причем задней критической точке z_3 соответствует бесконечно удаленная точка t_3, а все течение на плоскости z отображается на полуплоскость t (фиг. 1).

Действительно, на L имеем

$$t = \frac{1}{|V|} e^{i(\theta+\sigma)} \left|\frac{z - z_2}{z - z_1}\right| e^{i\alpha} e^{-i(\theta+\sigma+\alpha)} = \operatorname{Re} t, \qquad \operatorname{Im} t = 0$$

Продолжая течение через ось абсцисс на всю плоскость, необходимо кроме логарифмических особенностей в точках t_1 и t_4 добавить такие же особенности в сопряженных точках $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_4$ с интенсивностями $Q - i\Gamma_1$ и $-Q + i\Gamma_2$ соответственно. Никаких других особенностей в плоскости t нет. Поэтому выражение для комплексного потенциала будет иметь вид

$$w = \frac{Q + i\Gamma_1}{2\pi} \ln(t - t_1) - \frac{Q + i\Gamma_2}{2\pi} \ln(t - t_4) +$$

$$+ \frac{Q - i\Gamma_1}{2\pi} \ln(t - \bar{t}_1) + \frac{-Q + i\Gamma_2}{2\pi} \ln(t - \bar{t}_4) \tag{5}$$

На параметры, входящие в уравнение (5), наложены две связи, вытекающие из условия, что в точках z_2 и z_3 происходит раздвоение и слияние линии тока, оконтуривающей профиль. Поэтому в соответствующих им точках t_2 и t_3 производная $dw / dt = 0$.

Зная выражение для $w(t)$, нетрудно определить и функцию, отображающую полуплоскость t на внешность контура L в плоскости z. Применяя известный в теории струй идеальной жидкости прием [1], интегрируем уравнение (4); получим

$$\int \frac{z - z_2}{z - z_1} e^{-i(\theta+\sigma+\alpha)} dz = C + \int \frac{dw}{dt} t\, dt \tag{6}$$

Учитывая, что

$$dz = e^{i\theta}(d\rho + i\rho d\theta).$$

и обозначая

$$\frac{z - z_2}{z - z_1} = \mathrm{R}e^{i\alpha} \tag{7}$$

окончательно получаем

$$\int e^{-i\sigma} R(d\rho + i\rho\, d\theta) = C + \int \frac{dw}{dt} t\, dt \tag{8}$$

Здесь C — постоянная интегрирования.

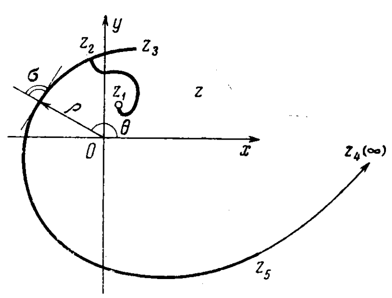
Скорость течения на плоскости z найдется из соотношения

$$\bar{V}(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt}\frac{dt}{dz} \tag{9}$$

При обтекании тонкой дужки, на одной из острых кромок которой (точка z_3 на фиг. 2) скорость становится бесконечной, вместо вспомогательной плоскости t более удобно пользоваться плоскостью переменной ζ, построенной следующим образом:

$$\zeta = \frac{dw}{dz}(z - z_1) e^{i(\sigma+\theta-\alpha)} \qquad (\alpha = \arg(z - z_1)) \tag{10}$$

При этом картина течения в плоскости ζ полностью совпадает с течением в плоскости t, благодаря чему уравнение (5) сохраняется, только в нем, естественно, t заменяется на ζ, и условие $dw / dt = 0$ будет иметь место для точек ζ_2 и ζ_5. Кроме того, точка ζ_2 расположится в начале координат.



Фиг. 2

Вместо уравнения (6) в рассматриваемом случае будем иметь

$$\int \frac{e^{-i\sigma}}{R}(d\rho + i\rho\, d\theta) = C + \int \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{11}$$

где

$$R = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1) + \rho_1^2} \tag{12}$$

Рассмотренные способы построения вспомогательных переменных для замкнутого контура t и разомкнутого контура ζ легко обобщаются в случае обтекания профиля потоком от любого числа особенностей и соответствующего им числа точек на профиле, где скорость обращается в нуль или бесконечность.

Используя известные в теории решеток [2] методы, полученное решение может быть обобщено и на решетку произвольных профилей.

Характерной особенностью рассматриваемого метода является то, что отображающая функция, получаемая с его помощью, жестко связана с принятой схемой течения. В известных методах [3] отображение произвольной области на каноническую не зависит от вида течения, и отображающая функция, когда ее удается получить, справедлива для любого течения. Именно отказ от произвола в выборе течения в рассматриваемом случае позволил весьма простым способом при не очень обременительных ограничениях, налагаемых на форму контура, получить решение задачи в замкнутой форме.

В качестве примера рассмотрим обтекание дужки кривой второго порядка, которую, как известно, можно задать уравнением

$$\rho = \frac{a}{1 + \varepsilon\cos\theta} \tag{13}$$

где a — фокальный параметр, ε — эксцентриситет. Для простоты примем, что вихреисточник расположен в точке $z_1 = 0$.

По формулам (2) и (13) находим

$$\sigma = \sigma(\theta) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\varepsilon \sin \theta} \tag{14}$$

Обозначая правую часть формулы (11) через $\Phi(\zeta)$, для рассматриваемого примера будем иметь

$$e^{-i\sigma} \ln \rho + i \int e^{-i\sigma(\theta)}\, d\theta = C + \Phi(\zeta) \tag{15}$$

Отсюда, учитывая формулу (14), окончательно получаем

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon \sin \theta}{\sqrt{(1+\varepsilon^2) + 2\varepsilon \cos \theta}} \ln \rho + (1+\varepsilon) E\left(\frac{\theta}{2}, \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right) + (1-\varepsilon) F\left(\frac{\theta}{2}, \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right) - \\ - \frac{i}{\sqrt{(1+\varepsilon^2) + 2\varepsilon \cos \theta}} [(1 + \varepsilon \cos \theta) \ln \rho + 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \theta] = C + \Phi(\zeta)\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь F и E — эллиптические интегралы первого и второго рода.

Полагая в этой формуле $\varepsilon = 0$, получаем обтекание дуги окружности, $\varepsilon < 1$ — эллипса, $\varepsilon = 1$ — параболы, $\varepsilon > 1$ — гиперболы.

Постоянная интегрирования C может быть найдена путем сопоставления точек ζ_3 и z_3.

В качестве второго примера рассмотрим обтекание дуги логарифмической спирали потоком от вихреисточника, расположенного не в центре кривой ($z_1 \neq 0$). Для логарифмической спирали $\sigma = \text{const}$, поэтому из формулы (11) сразу получаем выражение для отображающей функции

$$\begin{gathered} e^{i\sigma} \Big\{ \ln {}^1/_2 [\sqrt{\rho^2 - 2\rho_1 \cos(\theta - \theta_1) + \rho_1{}^2} + \rho - \rho_1 \cos(\theta - \theta_1)] + \\ + \frac{2i\rho}{\rho + \rho_1} F\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}, \frac{2\sqrt{\rho_1 \rho}}{\rho_1 + \rho}\right)\Big\} = C + \Phi(\zeta) \end{gathered} \tag{17}$$

В частном случае, когда $z_1 = 0$, отображающая функция принимает весьма простой вид

$$e^{-i\sigma} \ln z = C + \Phi(\zeta) \tag{18}$$

Если в двух последних формулах положить $\sigma = {}^1/_2\pi$, то получим обтекание дуги окружности, при $\sigma = 0$ — отрезка прямой, проходящей через начало координат.

Поступило 20 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
2. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
3. Лаврентьев М. А., Шабат В. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.

СВЕРХЗВУКОВОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ С ПОДВОДОМ ТЕПЛА И ОТКЛОНЕНИЕМ ПОТОКА

В. С. САДОВСКИЙ, Г. И. ТАГАНОВ

(*Москва*)

При большой сверхзвуковой скорости потока секундная масса воздуха, участвующая в создании тяги, становится сравнимой с секундной массой воздуха, отклоняемого вниз крылом. Рассматривается некоторый предельный случай наметившейся уже тенденции к объединению процессов создания тяги и подъемной силы. В силу ряда свойств соответствующего ему пространственного течения с подводом тепла и отклонением потока действующие на тело аэродинамические силы определяются из одномерных уравнений газовой динамики, хотя нахождение формы тела связано с построением двух течений, близких к осесимметричным.