

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА — ПУАЗЕЙЛЯ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. М. САГАЛАКОВ

(Новосибирск)

В рамках линейной теории исследуется гидродинамическая устойчивость плоского течения Куэтта — Пуазейля вязкой проводящей жидкости в поперечном магнитном поле. Для характерных чисел Гартмана изучен полный спектр малых возмущений. Проведена классификация возмущений согласно поведению их фазовой скорости при больших волновых числах. Получены зависимости критического числа Рейнольдса и критического волнового числа от параметра, характеризующего соотношение между частями потока, заданными движением пластин и градиентом давления. Выяснен характер асимптотических зависимостей при больших числах Гартмана. Приведен пример нейтральной кривой, образованной двумя ветвями нейтральных колебаний.

1. Рассматривается плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости в поперечном магнитном поле, производимое одновременно градиентом давления и относительным движением пластин. Магнитные числа Рейнольдса предполагаются малыми. Задача гидродинамической устойчивости сводится к анализу спектра собственных значений модифицированного уравнения Орра — Зоммерфельда [1]

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi^{II} + \alpha^4\varphi = iaR[(u - c)(\varphi^{II} - \alpha^2\varphi) - u^{II}\varphi] + G^2\varphi^{II} \quad (1.1)$$

с однородными граничными условиями

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\varphi(y)$ — амплитуда функции тока возмущения, α — волновое число, R — число Рейнольдса, u — профиль скорости, $c = X + iY$ — комплексная фазовая скорость возмущения, собственное значение задачи, G — число Гартмана. Отрицательные Y соответствуют затуханию возмущения, положительные — росту. В качестве единицы длины выбрана полуширина канала, за единицу скорости принята сумма скорости потока на оси и скорости верхней пластины $u = 1$.

Из уравнений магнитной гидродинамики нетрудно найти выражение для профиля скорости. Оно имеет вид

$$u = (1 - A) \frac{\operatorname{ch} G - \operatorname{ch} Gy}{\operatorname{ch} G - 1} + A \frac{\operatorname{sh} Gy}{\operatorname{sh} G} \quad (1.3)$$

Здесь A — параметр, характеризующий соотношение между компонентами потока, обусловленными градиентом давления и относительным движением пластин. (При выводе (1.3) использовалось граничное условие для магнитного поля, состоящее в том, что его продольная компонента обращается в нуль на стенках канала — вне жидкости имеется однородное внешнее магнитное поле, перпендикулярное к стенкам.)

Случаи $A = 0$ (течение Гартмана) и $A = 1$ (модифицированное течение Куэтта) изучались в ряде работ [1–3], а также автором данной статьи совместно с В. Н. Штерном (соответствующие результаты будут опубликованы). Предельный случай $G = 0$ изучался в работах [4, 5]. Ниже исследуется общий случай.

2. Когда A , G , R , α фиксированы, решение задачи на собственные значения (1.1), (1.2) дает счетное множество величин $c_n(A, G, \alpha, R)$. При небольших значениях αR для уравнения (1.1) развивается теория возмущений аналогично случаю, исследованному в [6]. Нулевое приближение эквивалентно рассмотрению покоящейся жидкости. После очевидных преобразований получим

$$Y_n = -\frac{\lambda_n}{\alpha R} \quad (2.1)$$

Введем обозначения

$$\delta = \left[\sqrt{\frac{(\lambda_n - G^2)^2}{4} + \alpha^2 G^2} - \left(\alpha^2 + \frac{G^2 - \lambda_n}{2} \right) \right]^{1/2}$$

$$k = \left[\alpha^2 + \frac{G^2 - \lambda_n}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda_n - G^2)^2}{4} + \alpha^2 G^2} \right]^{1/2}$$

Уравнения для нахождения λ_n можно представить в виде

$$\delta \operatorname{tg} \delta = -k \operatorname{th} k, \quad \delta \operatorname{ctg} \delta = k \operatorname{cth} k \quad (2.2)$$

В частном случае малых α из (2.2) нетрудно найти

$$\lambda_n = \kappa_n + G^2, \quad \kappa_n = \frac{\pi^2(n+1)^2}{4} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

Для $n = 2, 4, 6, \dots$, κ_n находится из уравнения $\operatorname{tg} \sqrt{\kappa_n} = \sqrt{\kappa_n}$. Таким образом, при достаточно малых α имеем асимптотическое выражение

$$Y_n = -\frac{\kappa_n + G^2}{\alpha R} \quad (2.3)$$

Собственные значения в (2.3) занумерованы в порядке возрастания $|Y_n|$. Спектральная нумерация при произвольном α будет производиться в соответствии с порядком расположения собственных значений при малых α .

Следующее приближение по αR определяет фазовые скорости X_n . Имея ввиду случай малых α , получаем нулевое приближение по α

$$X_n = \langle \bar{u} \rangle + \frac{(1-A)G \operatorname{sh} G}{\operatorname{ch} G - 1} \left[\frac{2}{\lambda_n} \left(1 + \frac{2G^2}{\kappa_n} \right) - \frac{3}{\kappa_n} - \frac{\lambda_n}{\kappa_n(\lambda_n + 3\kappa_n)} \right] \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.4)$$

$$X_n = \langle u \rangle + \frac{1-A}{\operatorname{ch} G - 1} \left\{ \frac{2G}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{2G^2}{\kappa_n} \right) [(2 + \lambda_n) \operatorname{sh} G - 2G \operatorname{ch} G] + \frac{\lambda_n}{\kappa_n(\lambda_n + 3\kappa_n)} \left(\frac{G \operatorname{sh} G}{\kappa_n} - G \operatorname{sh} G + 4 \operatorname{ch} G \right) - \frac{\operatorname{sh} G}{\kappa_n} \left(3G + \frac{5}{G} \right) + \frac{4 \operatorname{ch} G}{\kappa_n} - \frac{G \operatorname{sh} G}{\kappa_n^2} \right\} \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u \, dy$$

Здесь $\langle u \rangle$ — средняя по сечению канала скорость потока. При больших α асимптотическое выражение для Y_n имеет вид

$$Y_n = -\alpha/R \quad (n \ll \alpha) \quad (2.5)$$

Собственные значения, которым отвечают большие n , при конечных R близки к соответствующим величинам в покоящейся жидкости (см. формулу (2.1)).

Исследование спектра в промежутке между асимптотическими выражениями (2.3), (2.4) и (2.5), т. е. в наиболее интересной области, осуществлялось с помощью численного метода, развитого в работах [7-9]. Контрольные вычисления были выполнены на примере течения Пуазейля и дали хорошее совпадение с численными результатами, полученными в [10]. Численные расчеты проводились на БЭСМ-6. Собственные значения находились с заданной точностью (три значащие цифры).

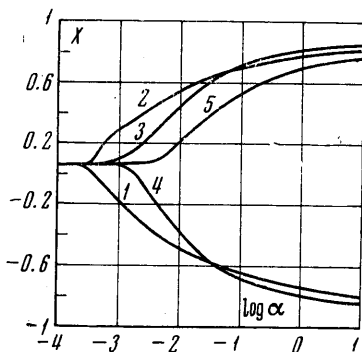
3. Рассмотрим поведение малых возмущений в зависимости от G , A , α при фиксированных числах Рейнольдса. Наиболее общей чертой изученных спектров является четкое разделение возмущений с ростом волнового числа на три класса: верхние и нижние пристенные возмущения с фазовой скоростью, стремящейся соответственно к скорости верхней и нижней стенок, и внутренние возмущения с фазовой скоростью, стремящейся к некоторой характерной скорости потока внутри канала, которой являются максимальная скорость течения внутри канала, или скорость однородного участка потока. При этом амплитуда функции тока возмущения в соответствии со свойствами локальности [10] имеет характерный участок своего изменения либо вблизи стенок канала, либо внутри его.

Чтобы представить себе картину спектров при небольших G , были проведены численные расчеты в случае $G = 3$. Когда A мало по сравнению с единицей, распределение возмущений, которым отвечают спектральные номера от 1 до 5, на пристенные и внутренние оказывается тем же, что и в случае $A = 0$. При этом возмущение с $n = 1$ является нижним пристенным, а возмущение с $n = 4$ — верхним пристенным. Возмущения с $n = 2, 3, 5, \dots$ являются внутренними. Отвечающая им фазовая скорость с ростом α стремится к максимальной скорости потока внутри канала. Следует, однако, подчеркнуть, что распределение возмущений с достаточно большими спектральными номерами может быть существенно отличным от соответствующего распределения при $A = 0$. Действительно, когда $G = 0$, численный анализ показывает, что, начиная с $n = 6$ (в случае $A = 0.15$), распределение возмущений изменяется в сторону увеличения числа пристенных возмущений (об этом, разумеется, имеет смысл говорить, если ограничиться рассмотрением конечного числа спектральных номеров, начиная с $n = 1$). В качестве примера спектра при небольших G опишем более детально конкретный случай $A = 0.14$, $R = 3.5 \cdot 10^5$. При этих параметрах задачи поток неустойчив. Неустойчивость связана с первым собственным значением и наличием критической точки у нижней пластины. (Критическая точка у верхней пластины исчезает при значительно меньших A . В случае небольших G к неустойчивости всегда приводит первое собственное значение.) Асимптотическое поведение зависимостей $X_n(\alpha)$ и $Y_n(\alpha)$ для небольших n начинает нарушаться при $\alpha \sim 10^{-4}$. Происходит перестройка спектра, в итоге второе и третье собственные значения, сливающиеся при $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$, определяют минимальный декремент затухания всюду, за исключением района «опасных» α (т. е. значений α порядка обратного характерного размера системы). В районе максимума зависимостей $Y_{2,3}(\alpha)$ при $\alpha \approx 10^2$ эти собственные значения расслаиваются на небольшом диапазоне изменения α на малую величину и затем вновь сливаются, выходя далее на асимптотическую зависимость (2.5) при $\alpha \approx 3 \cdot 10^2$. Асимптотическое поведение пристенных возмущений становится очевидным при $\alpha \approx 3 \cdot 10^3$, т. е. при значительно больших волновых числах. Зависимость $Y_4(\alpha)$ при $\alpha = 1$ имеет слабый локальный максимум. Значения α , приводящие к неустойчивости, лежат в диапазоне $\alpha = 0.27 \div 0.63$.

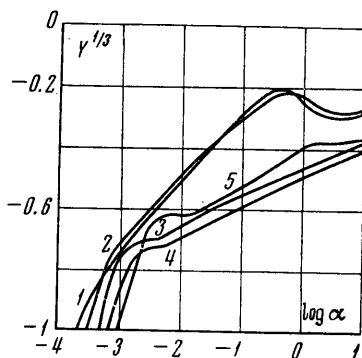
С ростом A в спектре происходят существенные изменения, они, в частности, связаны с исчезновением локального максимума профиля скорости (1.3) внутри канала. При этом в спектре остаются лишь пристенные возмущения. Рассмотрим пример значений параметров $R = 10^5$, $A = 0.75$. В данном случае возмущения со спектральными номерами $n = 2, 3, 5, \dots$ являются верхними пристенными, а возмущения с $n = 1, 4, \dots$ — нижними пристенными. Область применимости асимптотических выражений (2.3), (2.4) заметно увеличивается с ростом n . Так, если для $X_1(\alpha)$ асимптотическое поведение нарушается при $\alpha \approx 4 \cdot 10^{-4}$, то для $X_6(\alpha)$ такой величиной является $\alpha \approx 2.5 \cdot 10^{-3}$. (Это естественное обстоятельство проявляется и в других рассмотренных нами случаях.) Поток при данных параметрах задачи устойчив. Величина $\min_{\alpha, n} |Y_n(\alpha)|$ в районе опасных волновых чисел равна 0.008 и

практически не изменяется при изменении A до 1, когда R фиксировано. Она достигается первым собственным значением. Зависимость $Y_2(\alpha)$ имеет несколько меньшую величину локального максимума при таких α . После выхода из асимптотической области (2.3), (2.4) возмущения существенно перестраиваются в смысле порядка расположения по величине $|Y|$. Например, при $\alpha = 10^{-2}$ собственные значения рас-

положены в порядке возрастания $|Y|$ следующим образом: 2, 1, 5, 6, 4, ... При изменении α этот порядок нарушается, но характерно, что расположение четвертого собственного значения относительно первого, второго, пятого и шестого остается прежним. Отметим, что в спектре наблюдается слияние отдельных собственных значений при малых α . В данном случае сливаются, например, второе и третье собствен-



Фиг. 1



Фиг. 2

ные значения при $\alpha = 7 \cdot 10^{-4}$. Характер этих особенностей в спектре значительно отличается от случая $G = 0$, когда слияниям предшествуют локальные максимумы сближающихся зависимостей в плоскости Y и их резко выраженный излом в самой точке слияния. В данном случае такой локальный максимум отсутствует и излом зависимости $Y_3(\alpha)$ выражен слабо.

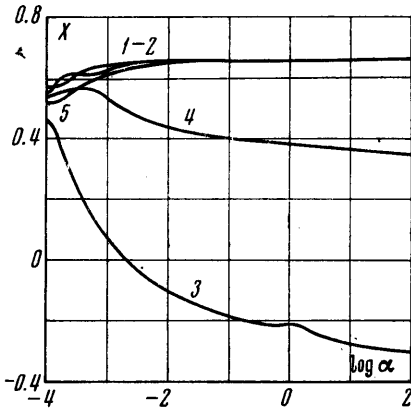
При дальнейшем приближении к модифицированному течению Куэтта спектр претерпевает дальнейшее сложное изменение, однако опыт численных расчетов показывает, что порядок распределения ряда возмущений с небольшими спектральными номерами (во всяком случае до $n = 5$ включительно) на верхние и нижние пристенные возмущения остается прежним. На фиг. 1, 2 представлены зависимости $X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$ для первых пяти спектральных номеров в диапазоне изменения $\alpha = 10^{-4} \div 10$, когда $A = 0.9$, $R = 10^5$. Для данной картины спектра характерно сближение попарно верхних и нижних пристенных собственных значений в плоскости Y . На фиг. 2 это демонстрируют зависимости $Y_1(\alpha)$ и $Y_2(\alpha)$.

Отмеченная тенденция сближения отдельных собственных значений в плоскости Y при приближении A к единице связана со структурой спектра модифицированного течения Куэтта. Когда $A = 1$, в спектре происходят слияния отдельных собственных значений в плоскости Y , отвечающих верхним и нижним пристенным возмущениям, при таких α , когда возникают колебательные возмущения. (В случае $R = 10^5$, $A = 1$ сливаются, например, первое и второе собственные значения при $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$.)

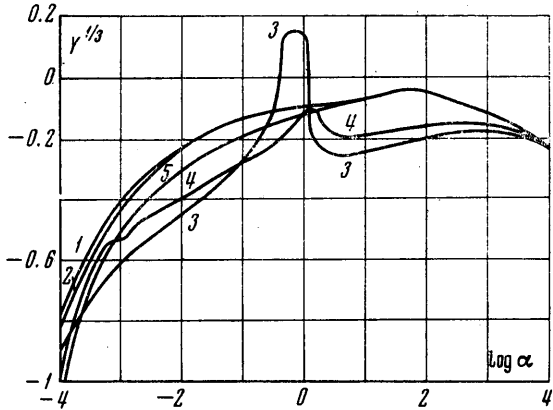
С ростом G картина спектра становится отличной от описанной выше. В качестве примера спектров при «средних» числах Гартмана были проведены численные расчеты для $G = 6$. На фиг. 3, 4 представлены зависимости $X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$ для первых пяти спектральных номеров во всем диапазоне между асимптотическими выражениями, когда $A = 1/3$, $R = 9 \cdot 10^5$. При этих параметрах задачи поток неустойчив, и неустойчивость уже связана с третьим собственным значением. Критическая точка расположена у нижней пластины. Характерной особенностью внутренних возмущений в данном случае является их большая опасность почти во всем диапазоне изменения α , хотя они в рассматриваемых случаях никогда не приводят к неустойчивости. Тенденция к такому расположению внутренних возмущений отмечалась и выше. В спектре обращает на себя внимание четко выделенный локальный максимум $Y_4(\alpha)$, который имеется и в случае $A = 0$. Численные расчеты показывают, однако, что его существование не связано с дополнительной неустойчивостью. Распределение возмущений на пристенные и внутренние для первых пяти спектральных номеров остается тем же, что и при $A = 0$.

Хотя с ростом A профиль скорости (1.3) утрачивает локальный максимум внутри канала, в спектре по-прежнему присутствуют внутренние возмущения, которые связаны с наличием в потоке приближенно плоского пристенного участка скорости. В качестве примера опишем спектр для следующих значений параметров: $A = 0.75$, $R = 3.2 \cdot 10^5$. Пристенными возмущениями при этом являются возмущения, которым отвечают $n = 1, 3, \dots$, а возмущения с $n = 2, 4, 5, \dots$ являются внутренними. Их фазовая скорость достигает величины скорости плоского участка уже при $\alpha \sim 10^{-3}$. Далее фазовая скорость возмущений остается неизменной. Соответствующие чис-

ленные расчеты были проведены до значений $\alpha \sim 1$. Когда $\alpha \gg 1$, устойчивость потока определяется локальными характеристиками профиля скорости [9], поэтому в этой области не следует ожидать существенного изменения в поведении внутренних возмущений, которые в еще большей степени должны отвечать наличию приосевого участка в профиле скорости.



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим случай больших чисел Гартмана. Когда $G \gg 1$, в общем случае имеются три характерные участка изменения u :
приосевая зона

$$u = 1 - A$$

верхняя пристенная зона

$$u = 1 - A - (1 - 2A)e^{G(v-1)}$$

нижняя пристенная зона

$$u = 1 - A - e^{-G(v+1)}$$

Размер пристенных зон порядка G^{-1} . В соответствии со свойствами локальности [9] в спектре должны существовать возмущения, отвечающие таким зонам. Можно в известном смысле говорить о разбиении спектра на спектр однородного потока и пристенных зон.

Хотя соответствующий порядок распределения спектральных номеров становится очевидным сразу за асимптотической областью, собственные значения в значительной мере определяются видом всего профиля вплоть до величин $\alpha \lesssim G$.

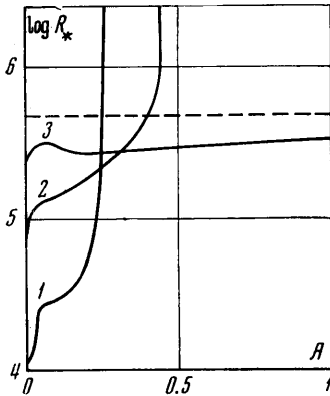
Установлено, что при больших G , $A = 1$ существуют всюду монотонные возмущения в отличие от течения Куэтта в общей гидродинамике. Так, например, проведенные численные расчеты при $G = 10$, $R = 5 \cdot 10^3$ показывают, что таким возмущениям в данном случае будут отвечать, в частности, первый и второй спектральные номера. Слияния отдельных собственных значений и образование колебательных возмущений, типичные для течений с антисимметричным профилем, здесь будут связаны только с пристенными возмущениями.

Нарушение симметрии профиля скорости при изменении A от нуля в (1.3) приводит к тем же следствиям, что и в случае $G = 0$. В частности, при малых α наблюдается слияние отдельных собственных значений.

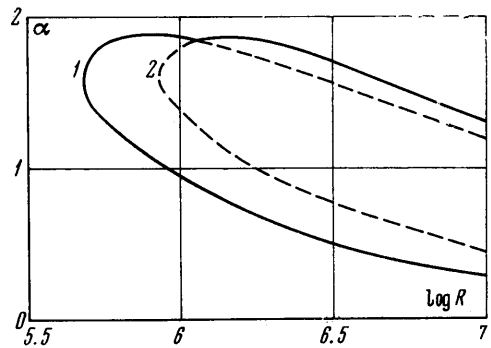
С ростом G спектральный номер неустойчивых возмущений растет, так же как и в случае $A = 0$. Когда числа Рейнольдса сравнительно невелики ($R \sim 10^3$), собственные значения, контролирующие устойчивость потока, всюду расположены существенно ниже, чем некоторые собственные значения, отвечающие приосевой зоне.

4. Ниже преимущественно обращалось внимание на поведение зависимостей $s_n(\alpha)$ при фиксированных остальных параметрах. Были изучены спектры для характерных чисел Гартмана и найдены спектральные номера возмущений, контролирующих устойчивость потока. Чтобы найти критические числа Рейнольдса R_* и построить нейтральные кривые, достаточно проследить за положением локальных максимумов соответствующих зависимостей $Y_n(\alpha)$ при изменении R . Этим целям служит «движение по непрерывности» [7].

На фиг. 5 представлены зависимости $R_*(A)$ для $G = 1$ (кривая 1), $G = 3$ (кривая 2), $G = 6$ (кривая 3). Видно, что с увеличением магнитного поля зона устойчивости вначале сужается. В случае небольших G существует значение A_* , при превышении которого поток всегда устойчив. Когда $G = 1$, A_* практически совпадает с соответствующей величиной в случае $G = 0$. Далее с ростом G величина A_* возрастает; наконец, при некотором G (по-видимому, уже в области неустойчивости модифицированного течения Куэтта) такой величины A_* не существует. Последнее обстоятельство демонстрирует поведение $R_*(A)$ при $G = 6$. Для этой зависимости также характерно существование слабого локального максимума при малых A , сооб-



Фиг. 5



Фиг. 6

разно чему здесь имеется небольшой интервал изменения A , в котором увеличение куэтовой компоненты оказывает слабое дестабилизирующее влияние. Значение R_* в предельных случаях ($A = 0, 1$ и $G = 0$) согласуется с результатами работ [1-4] и расходится с результатами работы [3].

Для соответствующих величин $\alpha_*(A)$ (α_* — критическое волновое число) при $G = 1,3$ характерно монотонное убывание до нуля с ростом A до величины A_* . Уже при небольшой величине куэтовой компоненты ($A_* \sim 0.1$) α_* при $G = 6$ заметно отличается от своего значения при $A = 0$. Однако при дальнейшем увеличении A до единицы α_* изменяется незначительно.

Используя результаты, полученные в [1], найдем, что $R_* = 50\,000 G$ в случае больших G (зависимость Локка). При этом $\alpha_* = 0.16 G$. Отвечающая данной неустойчивости критическая точка лежит у нижней пластины. Таким образом, при достаточно больших G ($G > 15$) R_* практически не зависит от A . На фиг. 5 пунктирной линией нанесена соответствующая асимптотическая зависимость для $G = 10$, которая уже незначительно отличается от расчетной.

Нетрудно, используя результаты Локка и свойства локальности [9], найти условия развития неустойчивости у верхней пластины. Оно будет иметь вид

$$R_* = \frac{50\,000G}{|1 - 2A|} \quad (4.1)$$

т. е. существенно зависеть от A . Когда $A = 1/2$, R_* в (4.1) обращается в бесконечность. Это отвечает тому обстоятельству, что при $A = 1/2$ участок приосевой зоны захватывает и область, связанную с верхней стенкой. Численные расчеты хорошо согласуются с зависимостью (4.1). Критическое волновое число от A по-прежнему не зависит и изменяется по формуле Локка.

Хотя устойчивость потока контролируется нижними пристенными возмущениями, нейтральная кривая в общем случае определяется возмущениями, локализуемыми у обеих стенок (имеются ввиду большие G). На фиг. 6 представлен пример такой нейтральной кривой, построенной для случая $G = 10$, $A = 0.2$. Кривая 1 получена по пятому собственному значению, кривая 2 — по шестому собственному значению, отвечающему верхнему пристенному возмущению. Общая нейтральная кривая, проведенная на фиг. 6 сплошной линией, включает в себя известную область, в которой нижнее пристенное возмущение устойчиво.

В заключение отметим (так же как было замечено при изучении частных случаев $A = 0,1$), что, хотя непосредственным результатом исследования автора было решение задачи устойчивости для конкретного магнитогидродинамического течения, полученные результаты показывают влияние формы профиля на характеристики

гидродинамической устойчивости фактически независимо от принятого в работе способа его формирования.

Автор благодарит М. А. Гольдштика за внимание к работе, В. А. Сапожникова за полезные обсуждения, В. Н. Штерна за помощь в работе и полезные обсуждения.

Поступило 13 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Lock R. C. The stability of the flow of an electrically conducting fluid parallel planes under a transverse magnetic field. Proc. Roy. Soc., 1955, Ser. A, vol. 233, No. 1192.
2. Kakutani T. The hydrodynamic stability of the modified plane Couette flow in the presence of a transverse magnetic field. J. Phys. Soc. Japan, 1964, vol. 19, No. 6, pp. 1041—1047.
3. Павлов К. Б. Об устойчивости плоского течения Куэтта в присутствии магнитного поля. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», Рига, Изд. АН ЛатвССР, 1962.
4. Potter M. C. Stability of plane Couette — Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, p. 3.
5. Hains F. D. Stability of plane Couette — Poiseuille flow. Physics Fluid, 1967, vol. 10, No. 9, p. 2079.
6. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
7. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
8. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Труды II Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости, Новосибирск, «Наука», 1969, стр. 212—220.
9. Сапожников В. А., Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Локальные свойства профиля скорости и гидродинамическая устойчивость. II Республиканская конференция по аэрогидродинамике, теплообмену и массообмену (Аннот. докл.), Киев, 1969.
10. Сапожников В. А., Штерн В. Н. Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля. ПМТФ, 1969, № 4.