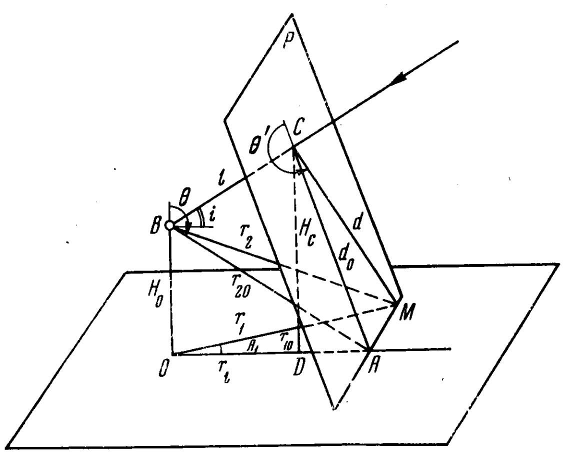
# РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

**В. А. БРОНШТЭН**

(*Москва*)

Дано приближенное решение задачи о распространении сильной цилиндрической волны в неоднородной экспоненциальной атмосфере, пригодное при любом угле наклона оси волны к вертикали. Для решения использован метод, изложенный в [4]. Результаты сравниваются с аналогичным решением для сферической волны, полученным авторами работы [4]. Метод пригоден при отношении давлений в ударной волне $p_2 / p_1 > 40$ или при отношении скорости ударной волны к звуковой $D / a > 6$. Решение может быть использовано при расчете воздушных волн, возникающих при влете в атмосферу крупных метеоритов.




Фиг. 1

Задача о распространении сильной цилиндрической волны в неоднородной атмосфере может возникнуть, например, при изучении системы воздушных волн, возникающих при вторжении в земную атмосферу крупных метеоритов. Такая задача, но без учета неоднородности атмосферы по высоте, была рассмотрена в 1956 г. К. П. Станюковичем [1]. Распространение сильных сферических волн в неоднородной экспоненциальной атмосфере рассматривалось А. С. Компанейцем [2], Э. И. Андрианкиным и др. [3], Д. Лаумбахом и Р. Пробстейном [4]. Развитый в работе [4] приближенный метод дает хорошее согласие с точными решениями для однородной атмосферы и с экспериментальными данными. Поэтому было решено применить его для случая распространения сильной цилиндрической волны в неоднородной экспоненциальной атмосфере.

В данном анализе в соответствии с [4] делаются следующие предположения:

1) волна считается сильной, т. е. противодавлением можно пренебречь; как ясно из [5], это соответствует условию $p_2 / p_1 > 40$;

2) газ считается совершенным с показателем адиабаты $\gamma$;

3) гравитационными, магнитными эффектами, действием ветра, излучением и теплопереносом в ударной волне пренебрегаем;

4) атмосфера считается холодной с $p_1 = 0$ и распределением плотности по барометрической формуле

$$\rho = \rho_0 e^{-H/H^*} \tag{1}$$

где $H^*$ — шкала высот для данного уровня $H$, $\rho_0$ — плотность на уровне $H = 0$.

Пусть в атмосферу влетает космическое тело по прямолинейной траектории под углом $i$ к горизонту и заканчивает свое движение на высоте $H_0$ над поверхностью Земли. В большинстве случаев $H_0 = 0$ (удар метеорита о Землю, сопровождаемый точечным взрывом [1]), но в случае, например, Тунгусского метеорита $H_0 = 5 \div 10$ *км*. Будем считать для общности, что $H_0 > 0$.

Величины $H_0$, $i$ полностью задают положение траектории метеорита относительно земной поверхности (азимут проекции траектории для данной задачи роли не играет). Высота произвольной точки $C$ траектории (фиг. 1) равна

$$H_C = H_0 + l \sin i = H_0 + r_l \operatorname{tg} i \tag{2}$$

где $l$ — расстояние $BC$ от конечной точки траектории [1], $r_l$ — расстояние $OD$ на земной поверхности от проекции точки $B$ (эпицентра точечного взрыва) до проекции точки $C$.

[1] Здесь не рассматривается концевой эффект, который в изучаемом случае вторжения метеорита пренебрежимо мал по сравнению с действием взрыва в атмосфере или при ударе о Землю.

Проведем через точку $C$ плоскость $P$, перпендикулярную траектории (оси взрыва) $BC$ и отметим точку $A$ ее пересечения с проекцией траектории, а также произвольную точку $M$ на линии пересечения плоскости $P$ с земной поверхностью. Тогда, обозначая $CM = d$, $CA = d_0$, $OM = r_1$, $OA = r_{10}$, $BM = r_{20}$, $\angle AOM = A_1$ и вводя угол $\theta$ направления $CM$ с $CA$, получаем следующие очевидные геометрические соотношения:

$$r_{10} = H_0 \operatorname{tg} i + l \sec i, \qquad r_1 = r_{10} \sec A_1 = (r_{10}^2 + d^2 \operatorname{cosec}^2 \theta)^{1/2}$$
$$l = r_{10} \cos i - H_0 \sin i, \qquad d_0 = r_{10} \sin i + H_0 \cos i, \qquad d = d_0 \sec \theta,$$
$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{d_0}{r_{10}} \operatorname{cosec} \theta \tag{3}$$

Используя закон плоских сечений, будем рассматривать распространение цилиндрической волны от элементарного отрезка траектории около точки $C$ в плоскости $P$. Введем энергию цилиндрического взрыва на единицу длины $E_l$ (которая может быть, вообще говоря, функцией $l$) и эффективную шкалу высот $\Delta$

$$\Delta = H^* \sec i \tag{4}$$

Обозначим расстояние от оси точки фронта ударной волны в позиционном угле $\theta$ через $R$, расстояние произвольной точки за фронтом — через $r$ и введем лагранжеву координату этой точки $r_0$, определяющую положение некоторой частицы в момент взрыва ($t = 0$). Тогда аналогично соотношениям для сферического взрыва, приводимым в [4], будем иметь

уравнение неразрывности

$$\rho \frac{\partial r}{\partial r_0} = \rho_0 \frac{r_0}{r} \tag{5}$$

уравнение движения

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho_0 r_0} \frac{\partial p}{\partial r_0} = 0 \tag{6}$$

уравнение энергии [6]

$$\frac{E_l}{2\pi} = \int\limits_0^R \frac{p}{\gamma - 1} r\, dr + \int\limits_0^R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 \rho_0 r_0\, dr_0 \tag{7}$$

Первый интеграл в правой части (7) выражает внутреннюю энергию, а второй — кинетическую энергию. При оценке этих интегралов полагаем, что на фронте волны $r_0 = R$, а за фронтом $r_0 = 0$, т. е. что вся масса воздуха движется вперед непосредственно за фронтом волны. Введем безразмерный параметр длины

$$\eta = R \frac{\cos \theta}{\Delta} \tag{8}$$

Очевидно, что при $0 \leqslant \theta < {}^1/_2\pi$ (движение вверх) $\eta > 0$, а при ${}^1/_2\pi < \theta \leqslant \pi$ (движение вниз) $\eta < 0$. При $\theta = {}^1/_2\pi$ $\eta = 0$ и имеем частный случай однородной атмосферы.

Разлагая $r(r_0, t)$ в ряд Тейлора по степеням $(r_0 - R)$ и учитывая приведенные выше предположения, а также то, что

$$\left.\frac{\partial r}{\partial r_0}\right|_R = \left.\frac{\rho_0 r_0}{\rho r}\right|_R = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{9}$$

методом, подробно изложенным в [4], получаем следующее уравнение энергии:

$$\frac{E_l}{2\pi\rho_c} \left(\frac{\cos \theta}{\Delta}\right)^4 = \varphi(\eta)\ddot{\eta} + \psi(\eta)\dot{\eta}^2 \tag{10}$$

Здесь $\dot{\eta}$, $\ddot{\eta}$ — производные $\eta$ по времени и введены вспомогательные функции

$$\varphi(\eta) = \frac{2(2\gamma - 1)}{(\gamma - 1)(\gamma + 1)^2} \eta \left[1 - e^{-\eta}(\eta + 1)\right] \tag{11}$$

$$\psi(\eta) = \frac{\eta^2 e^{-\eta}}{(\gamma - 1)(\gamma + 1)} + \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} + 2 - \eta\right] \frac{\gamma - 1}{2(2\gamma - 1)} \frac{\varphi(\eta)}{\eta} \tag{12}$$

Введем безразмерное время

$$t^* = t\left[\frac{E_l|\cos^4\theta|}{2\pi\rho_c\Delta^4}\right]^{1/2} \tag{13}$$

и обозначим производные $\eta$ по $t^*$ через $\eta'$ и $\eta''$. Тогда вместо (10) получим

$$\varphi(\eta)\eta'' + \psi(\eta)\eta'^2 = \pm 1 \tag{14}$$

Это уравнение разрешается относительно квадрата производной $\eta'$, т. е. квадрата безразмерной скорости ударной волны

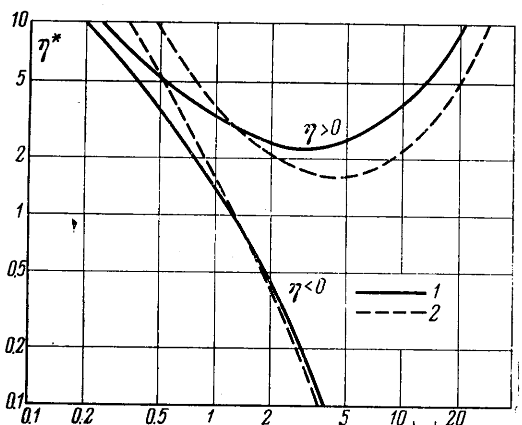
$$\eta'^2 = \pm 2e^{-2\Psi(\eta)}\int\limits_0^\eta e^{2\Psi(y)}\frac{dy}{\varphi(y)} \tag{15}$$

где верхний знак соответствует движению волны вверх ($\theta < {}^1/_2\pi$), а нижний — движению вниз ($\theta > {}^1/_2\pi$), и введено обозначение

$$\Psi(\eta) = \int\limits_a^\eta \frac{\psi(y)}{\varphi(y)}dy \tag{16}$$

причем $a$ — условный нуль, выбираемый с таким расчетом, чтобы при $\eta \to 0$ решение стремилось к решению для однородной атмосферы, т. е. $\Psi(a) = 0$. Тогда будем иметь

$$\Psi(\eta) = \frac{\gamma+1}{2(2\gamma-1)}\ln[1-e^{-\eta}(\eta+1)] + \frac{(2\gamma+1)(\gamma-1)}{(2\gamma-1)(\gamma+1)}\ln\eta - \frac{\gamma-1}{2(2\gamma-1)}\eta \tag{17}$$




Фиг. 2

Найдем также подынтегральную функцию

$$F(y) = e^{2\Psi(y)}\frac{1}{\varphi(y)} = k_1[1-e^{-y}(y+1)]^{2k_2-1}y^{2k_3-1}e^{-2k_4y} \tag{18}$$

где обозначено

$$k_1 = \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{2(2\gamma-1)}, \quad k_2 = \frac{\gamma+1}{2(2\gamma-1)}$$
$$k_3 = \frac{(2\gamma+1)(\gamma-1)}{(2\gamma-1)(\gamma+1)}, \quad k_4 = \frac{\gamma-1}{2(2\gamma-1)} \tag{19}$$

В случае $\gamma = 1.4$ коэффициенты $k_n$ примут значения

$$k_1 = {}^{16}/_{25}, \quad k_2 = {}^2/_3, \quad k_3 = {}^{19}/_{54}, \quad k_4 = {}^1/_9, \quad 2k_2 - 1 = {}^1/_3, \quad 2k_3 - 1 = -{}^8/_{27}$$
$$2k_4 = {}^2/_9$$

При малых $y$ ($y \leqslant 0.05$) в этом случае $F(y)$ хорошо представляется функцией

$$F(y) = 0.51y^{0.37} \tag{20}$$

а сомножители в формуле (15) представятся так:

$$F_1(\eta) = e^{-2\Psi(\eta)} \approx 2.52\eta^{-3.37}$$
$$F_2(\eta) = \int\limits_0^\eta F(y)dy \approx 0.374\eta^{1.37} \tag{21}$$

Отсюда для малых $\eta$ ($\eta \leqslant 0.05$)

$$\eta' = 1.37\eta^{-1} \tag{22}$$

Расчет значений безразмерной скорости $\eta'$ показал (фиг. 2, кривые *1*) такой же качественный ход ее в функции безразмерного расстояния $\eta$, что и в случае сферической волны (кривые *2*). Скорость волны, уходящей вверх ($\eta > 0$), достигает минимума примерно на $\eta = 3$, после чего начинает возрастать из-за уменьшения плотности атмосферы с высотой. Скорость волны, идущей вниз, прогрессивно убывает. Однако неучет противодавления позволяет применять данное решение лишь к сильным волнам.

Переход от безразмерной скорости ударной волны $\eta'$ к размерной скорости $D$ производится по формуле

$$D = \eta' \left[\frac{E_l}{2\pi\rho_c}\right]^{1/2} \frac{|\cos\theta|}{\Delta} \tag{23}$$

Безразмерное время $t^*$ прохождения волной расстояния $\eta$ определяется интегралом

$$t^* = \int_0^\eta \frac{dy}{\eta'} \tag{24}$$

где $y$ — переменная интегрирования. Переход к размерному времени производится по формуле (13).

Рассмотрим теперь частный случай $\theta = {}^1/_2\pi$, соответствующий решению для однородной атмосферы. При этом $\cos\theta = 0$, $\Delta = \infty$, $\eta = 0$ и решение удобнее представить в размерных координатах. Вместо уравнения энергии (10) будем иметь

$$R^{\cdot\cdot} + \frac{\gamma(3\gamma+1)}{(2\gamma-1)(\gamma+1)}\frac{R^{\cdot 2}}{R} = \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{2(2\gamma-1)}\frac{E_l}{\pi\rho_c}\frac{1}{R^3} \tag{25}$$

Интегрирование (25) дает

$$D \equiv R^{\cdot} = \left[\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{2}\frac{E_l}{\pi\rho_c}\right]^{1/2}\frac{1}{R} \tag{26}$$

а интегрируя (26), получаем

$$R = \left[2(\gamma-1)(\gamma+1)\frac{E_l}{\pi\rho_c}\right]^{1/4} t^{1/2} \tag{27}$$

Как уже было сказано, данное решение применимо при $p_2 / p_1 > 40$, чему приближенно соответствует $D / a > b$ ($a$ — скорость звука). Соответствующее условие для $\eta'$ вытекает из формулы (23).

Всесоюзное астрономо-геодезическое общество

Поступило 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Система воздушных ударных волн при полете и взрыве метеоритов. Метеоритика, 1956, вып. 14, стр. 62—69.
2. Компанеец А. С. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере. Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 5, стр. 1001—1004.
3. Андрианкин Э. И., Коган А. М., Компанеец А. С., Крайнов В. П. Распространение сильного взрыва в неоднородной атмосфере. ПМТФ, 1962, № 6, стр. 3—7.
4. Laumbach D. D., Probstein R. F. A point explosion in a cold exponential atmosphere. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, pt 1, pp. 53—75.
5. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 5. М., «Наука», 1965.