

скоростей могут существенно меняться и при неизменной форме струи, так как форма зависит только от отношения средних скоростей, и они определяются формой с точностью до постоянной ($V_1/V_2 = S_1/S_2 = \text{const}$). Поэтому при решении методом итераций сравнение результатов вновь полученного приближения с предыдущим надо производить не по форме, а по скоростям.

Для всех рассматривавшихся винтов при работе их «на месте» замечена тенденция к увеличению сужения струи с уменьшением угла установки лопасти, т. е. при уменьшении коэффициента тяги.

Форма струи хорошо согласуется с экспериментальными результатами, полученными в ЦАГИ А. С. Дьяченко.

Ухудшение характеристик винта при сужении струи менее чем вдвое далеко за винтом легко объяснимо. В уравнении расхода (3.2) замена истинных на средние по азимуту скорости эквивалентна. При подсчете же тяги и мощности такая замена уже не будет справедливой, так как тяга и мощность выражаются через интегралы от квадратов и кубов индуктивных скоростей.

При использовании средних скоростей вместо истинных, ошибка в мощности будет, вообще говоря, существенно больше, чем ошибка в тяге. Например, если скорость меняется по азимуту по гармоническому закону, то при замене истинных скоростей на средние ошибка в мощности в три раза больше, чем ошибка в тяге.

Пользуясь случаем, автор благодарит А. А. Зайцева и А. С. Бравермана за ряд ценных замечаний.

Поступило 10 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1950.
2. Ветчинкин В. П., Поляхов Н. Н. Теория и расчет воздушного гребного винта. М., Оборонгиз, 1940.
3. Майкапар Г. И., Лепилкин А. М., Халезов Д. В. Аэродинамический расчет винтов по лопастной теории. Тр. ЦАГИ, 1940, вып. 529.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Гостехиздат, 1957.
5. Вирада Г. Интегральные уравнения. М., Гостехтеоретиздат, 1933.
6. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956.
7. Миль М. Л., Некрасов А. В., Браверман А. С., Гродко Л. Н., Лейканд М. А. Вертолеты, кн. 1. М., «Машиностроение», 1966.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4. М., Физматгиз, 1963.
9. Келдыш М., Франкль Ф. Строгое обоснование теории винта Жуковского. Матем. сб., 1935, т. 42, вып. 2.

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ОДНОГО ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С КЛИНОМ, ДВИЖУЩИМСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Г. М. АРУТЮНЯН

(Москва)

Исследованы границы применимости одного точного решения задачи бокового взаимодействия плоской ударной волны с клином, движущимся со сверхзвуковой скоростью.

1. В работе [1] был рассмотрен один из допускающих точное аналитическое решение случаев взаимодействия плоской ударной волны с клином, движущимся со сверхзвуковой скоростью. В ней было показано (фиг. 1), что при одинаковой интенсивности набегающего и присоединенного скачков, если угол полураствора клина и число Маха набегающего на него потока связаны соотношением

$$\delta = \arctg \left\{ \frac{M^2(\gamma + 1) \operatorname{tg} 2\omega_0 + [M^4(\gamma + 1)^2 \operatorname{tg}^2 2\omega_0 - 8M^2(\gamma - 1) - 16]^{1/2}}{2M^2(\gamma - 1) + 4} \right\} + 2\omega_0 \quad (1.1)$$

$$\omega_0 = \arctg \sqrt{(\gamma + 1)/(3 - \gamma)}$$

а набегающий на клин скачок параллелен поверхности клина, то взаимодействие набегающего и присоединенного скачков происходит без «преломления», с образовани-

ем области однородного течения (3), где давление определяется из соотношения

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3\gamma - 1)p_2 - (\gamma - 1)p_0}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_0} \quad (1.2)$$

с последующим нормальным отражением падающего скачка от поверхности клина (γ — показатель адиабаты газа).

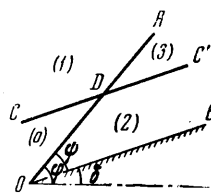
В результате образуется новая область однородного течения (фиг. 2, (4)), где давление находится из соотношения

$$\frac{p_4}{p_3} = \frac{(3\gamma - 1)p_3 - (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_3 + (\gamma + 1)p_2} \quad (1.3)$$

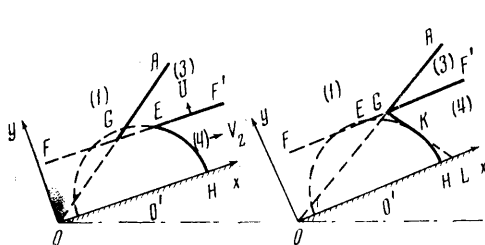
В любой фиксированной точке области (4) давление и другие параметры газа сохраняют свои значения до прихода в эту точку фронта возмущений, обусловленных взаимодействием отраженного скачка с присоединенным (фиг. 2—4). Это будет, очевидно, фронт слабых возмущений, так как характер указанного взаимодействия качественно не отличается от случая, имеющего место при распаде произвольного разрыва, когда одна ударная волна догоняет другую. При этом, как известно [2], в сторону области с большим давлением распространяется волна разрежения. В рассматриваемом случае $p_4 > p_3 > p_1$, следовательно, по области (4) также будет распространяться волна разрежения, а точку пересечения отраженного скачка с присоединенным (на фиг. 2—4 она обозначена G) следует при этом рассматривать как источник слабых возмущений.

Необходимо заметить, что возмущения, связанные с дифракцией падающего скачка около нижней поверхности клина, не влияют на течение у его верхней поверхности (а значит, и на область (4)), ввиду сверхзвукового характера набегающего на клин потока. Таким образом, возмущения, распространяющиеся по области (4), могут вызываться только взаимодействием отраженного скачка с присоединенным.

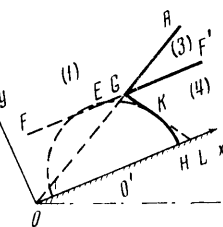
2. Свяжем систему координат с клином так, как это показано на фиг. 2—4, и будем отсчитывать время от момента отражения падающего скачка от поверхности клина.



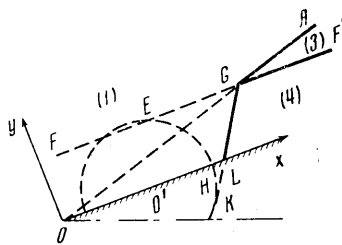
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Для исследования границы области возмущенного течения с областью (4) необходимо иметь в виду, что возмущения, исходящие от острого клина, всегда догоняют отраженный скачок, т. е. линия FF' (фиг. 2—4) всегда пересекает дугу окружности радиуса $c_1 t$ с центром в точке O' , абсцисса которой равна $v_2 t$. (Здесь c_1 — скорость звука в области (4), v_2 — скорость газа в областях (2) и (4).)

Таким образом, линия FF' отраженного скачка одновременно пересекает линию OA присоединенного скачка (точка G) и окружность фронта возмущений, исходящих из начала координат (точка E).

Конкретная форма исследуемой границы зависит от скорости отраженного скачка U , параметров v_2 и c_1 и величины угла ψ , образованного присоединенным скачком с поверхностью клина. Приведенные на фиг. 2—4 три качественно отличающиеся между собой типа таких границ, очевидно, полностью описывают все практически возможные случаи. Рассмотрим их более подробно.

Изображенная на фиг. 2 граница между областями возмущенного течения и (4) будет иметь место в том случае, если

$$x_G < x_E \quad (2.1)$$

Это, очевидно, будет фронт слабых возмущений, исходящих от острия клина, т. е. дуга EH окружности радиуса $c_4 t$ с центром в точке O' . Так как [1]

$$\psi = \varphi - \delta = 2\omega_0$$

то, как легко показать,

$$x_G = Ut \operatorname{ctg} 2\omega_0, \quad x_E = (v_2 + \sqrt{c_4^2 - U^2})t \quad (c_4 > U)$$

Условие (2.1) тогда примет вид

$$U \operatorname{ctg} 2\omega_0 < v_2 + \sqrt{c_4^2 - U^2} \quad (2.2)$$

Воспользовавшись далее уравнением окружности радиуса $c_4 t$ с центром в точке O' и имея в виду, что $x_H = (v_2 + c_4)t$, можно теперь утверждать, что при выполнении условия (2.2) граница области возмущенного течения с областью (4) будет описываться соотношением

$$(x - v_2 t)^2 + y^2 - c_4^2 t^2 = 0 \quad \text{при} \quad x_E \leq x \leq x_H \quad (2.3)$$

Представленный на фиг. 3 случай будет иметь место, если

$$x_E < x_G < x_H \quad (2.4)$$

или, что то же, если

$$v_2 + \sqrt{c_4^2 - U^2} < U \operatorname{ctg} 2\omega_0 < v_2 + c_4 \quad (2.5)$$

Исследуемая граница при этом будет образована огибающей фронтов возмущений, «порождаемых» точкой G , и фронтом возмущений, исходящих от острия клина, т. е. она будет состоять из двух кусков: из отрезка GK касательной, проведенной из точки G к окружности радиуса $c_4 t$ с центром в точке O' , и дуги KH этой окружности. Так как $c_4 > U$, то из (2.5) следует, что

$$U \operatorname{ctg} 2\omega_0 - v_2 > \sqrt{c_4^2 - U^2} > 0 \quad (2.6)$$

Тогда на основании простых геометрических рассуждений можно показать, что

$$x_k = v_2 t + \frac{(c_4^2 - U^2)c_4 t}{c_4 A - UB} \quad (2.7)$$

$$x_L = v_2 t + \frac{(c_4 A - UB)c_4 t}{c_4^2 - U^2} \quad (2.8)$$

$$A = U \operatorname{ctg} 2\omega_0 - v_2, \quad B = \sqrt{(U \operatorname{ctg} 2\omega_0 - v_2)^2 - (c_4^2 - U^2)}$$

Зная координаты точек G и L , можно записать уравнение для рассматриваемой касательной. Воспользовавшись последней, а также выражением (2.3), можно теперь утверждать, что при выполнении условия (2.5) граница области возмущенного течения с областью (4) будет описываться соотношением

$$(c_4^2 - U^2)(x - Ut \operatorname{ctg} 2\omega_0) - (c_4 B - UA)(y - Ut) = 0 \quad (2.9)$$

если $x_G \leq x \leq x_H$, и выражением (2.3), если $x_k \leq x \leq x_H$.

Случай, изображенный на фиг. 4, будет иметь место, если

$$x_G > x_H \quad (2.10)$$

т. е. когда

$$U \operatorname{ctg} 2\omega_0 > v_2 + c_4 \quad (2.11)$$

Границей области возмущенного течения с областью (4) при этом будет только огибающая фронтов возмущений, порождаемых точкой G .

Учитывая, что в рассматриваемом случае

$$A = U \operatorname{ctg} 2\omega_0 - v_2 > c_4 > 0 \quad (2.12)$$

можно теперь утверждать, что при выполнении условия (2.11) граница области возмущенного течения с областью (4) будет описываться соотношением (2.9), справедливым при $x_L \leq x \leq x_G$.

3. Необходимо заметить (см. (2.5)), что при

$$U \operatorname{ctg} 2\omega_0 \rightarrow v_2 + \sqrt{c_4^2 - U^2}$$

все соотношения, полученные для границы области возмущенного течения с областью (4) в случае, изображенном на фиг. 3, переходят в таковые для случая, изображенного на фиг. 2. При

$$U \operatorname{ctg} 2\omega_0 \rightarrow v_2 + c_4$$

имеет место соответствующий переход от случая, изображенного на фиг. 3, к случаю, изображенному на фиг. 4.

Положим теперь в (2.3) и (2.9) $y = 0$. Тогда, учитывая (2.2), (2.5) и (2.11), придем к следующим формулам для времени действия давления p_4 на поверхности клина: при $U \operatorname{ctg} 2\omega_0 < v_2 + c_4$

$$t = \frac{x}{v_2 + c_4} \quad (3.1)$$

при $U \operatorname{ctg} 2\omega_0 > v_2 + c_4$

$$t = \frac{(c_4^2 - U^2)x}{U(c_4^2 \operatorname{ctg} 2\omega_0 - Uv_2 - c_4B)} \quad (3.2)$$

Заметим, что при

$$U \operatorname{ctg} 2\omega_0 \rightarrow v_2 + c_4$$

формула (3.2) переходит в (3.1).

Как и следовало ожидать, время действия давления отражения тем больше, чем больше удалена рассматриваемая точка от острой клина.

Для пользования полученными соотношениями необходимо знать величины U и c_4 .

Используя выражения для скорости скачка и скорости газа за скачком относительно среды, по которой распространяется скачок, и учитывая, что поток в областях (2) и (4) параллелен поверхности клина, можно показать, что

$$U = \left[\frac{(\gamma - 1)p_3 + (\gamma + 1)p_4}{2\rho_3} \right]^{1/2} - \frac{2(p_3 - p_2)}{\sqrt{2\rho_2[(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_3]}} \quad (3.3)$$

где

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_3}{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_3} \quad (3.4)$$

Используя (1.2), (1.3) и (3.4), из (3.3) после ряда преобразований получаем

$$U = \frac{(3 - \gamma)p_0 + 3(\gamma - 1)p_2}{\sqrt{2\rho_2[(\gamma + 1)p_0 + (\gamma - 1)p_2]}} \quad (3.5)$$

Величина c_4 находится из соотношения

$$c_4 = \left(\gamma \frac{p_4}{\rho_4} \right)^{1/2} = \left(\gamma \frac{p_2}{\rho_2} \frac{p_4}{p_3} \frac{p_3}{p_2} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_4}{\rho_3} \frac{\rho_3}{\rho_2} \right)^{-1/2} \quad (3.6)$$

с использованием (1.2), (1.3), (3.4) и выражения, аналогичного (3.4), для ρ_4/ρ_3 . После ряда упрощений в результате получаем

$$c_4 = \left\{ \frac{[(3 - \gamma)p_0 + 3(\gamma - 1)p_2][(2\gamma - 1)p_2 - (\gamma - 1)p_0]}{\rho_2[(\gamma + 1)p_0 + (\gamma - 1)p_2]} \right\}^{1/2} \quad (3.7)$$

Таким образом, величины U и c_4 выражаются только через параметры невозмущенной среды и присоединенного скачка уплотнения. Последние (в том числе v_2) легко могут быть вычислены известным [2] методом теории косых скачков.

Поступило 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Г. М. О взаимодействии ударной волны с клином, движущимся со сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2. М., Гостехтребиздат, 1954.