

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВИНТА В ОСЕВОМ РЕЖИМЕ

М. М. БАРШАЙ

(Москва)

Рассматривается аэродинамический расчет винта на режимах висения и вертикального взлета, основанного на нелинейной вихревой схеме, т. е. форма свободной вихревой поверхности определяется в процессе счета.

В п. 2 принимается модель винта, в которой поверхность свободных вихрей получают из совокупности винтовых вихревых линий, шаг которых меняется по радиусу и зависит от индуктивной скорости на данном радиусе лопасти в плоскости вращения винта, а не задается заранее, как это принято в линейной вихревой схеме [1-3]. В п. 3 предполагается, что вихревые линии имеют переменный шаг не только по радиусу, но и по вертикальной координате и учитывается сужение струи за винтом. Уточняются суммарные характеристики винта и распределение нагрузки по радиусу лопасти.

1. Основные предположения. При определении индуктивных скоростей жидкость принимается идеальной и несжимаемой. Элемент лопасти при определении аэродинамических сил, действующих на него, рассматривается как элемент крыла в поступательном полете, расположенный под углом атаки, равным эффективному углу атаки сечения лопасти. Профильное сопротивление каждого элемента лопасти определяется, после того как найдены индуктивные скорости и углы атаки в соответствующих сечениях лопасти. Зависимости коэффициентов подъемной силы и профильного сопротивления C_y и C_x от аэродинамического угла атаки α и числа Маха M взяты по продумкам профилей, пересчитанных на крыло бесконечного удлинения.

2. Расчет по схеме с винтовыми вихревыми линиями переменного шага по радиусу. Рассматривается система координат, жестко связанная с лопастью. Предполагается, что все лопасти лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси y . Ось x совпадает с осью лопасти, ось z перпендикулярна плоскости xy .

В этой системе уравнения свободных вихревых поверхностей, состоящих из совокупности винтовых вихревых линий, шаг которых определяется индуктивной скоростью в точке схода вихря с лопасти, имеют вид

$$X = \rho_0 \cos(\theta + \Delta\psi_n), \quad Y = V_y(\rho_0)\theta, \quad Z = \rho_0 \sin(\theta + \Delta\psi_n) \quad (2.1)$$

Здесь и далее все уравнения записываются в безразмерной форме, линейные размеры отнесены к радиусу лопасти R , скорости — к скорости конца лопасти ωR , циркуляция — к ωR^2 , при этом $\theta = \omega t$, t — время, ω — угловая скорость вращения лопасти, ρ_0 — радиус схода вихря с лопасти, V_y — вертикальная составляющая индуктивной скорости, $\Delta\psi_n = 2\pi(n-1)k^{-1}$ — угол между первой лопастью и лопастью с номером n , k — число лопастей.

Если интенсивность вихря, сходящего с лопасти на радиусе ρ_0 , равна $d\Gamma/d\rho_0$, то выражение для вертикальной составляющей индуктивной скорости на несущей линии в точке $x = r$ определится по формуле Био-Савара [4]

$$V_y(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \int_{\rho_0}^1 \frac{d\Gamma}{d\rho_0} d\rho_0 \int_0^\infty \frac{-\rho_0^2 + \rho_0 r \cos(\theta + \Delta\psi_n)}{[\rho_0^2 + r^2 - 2\rho_0 r \cos(\theta + \Delta\psi_n) + \theta^2 V_y^2(\rho_0)]^{3/2}} d\theta. \quad (2.2)$$

Величина циркуляции в каждом сечении

$$\Gamma = 1/2 C_y b W \quad (2.3)$$

Здесь W — скорость потока, набегающего на элемент лопасти, b — хорда лопасти в этом сечении.

Коэффициент C_y зависит от угла атаки и, следовательно, от V_y . Кроме того, V_y входит в знаменатель подинтегрального выражения равенства (2.2). Таким образом, равенство (2.2) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение относительно V_y .

Вихревая пелена заменяется конечным числом вихревых винтовых нитей. Индуктивные скорости определяются в точках посредине между точками схода вихрей. Полученная система нелинейных уравнений решается методом сложной итерации [5, 6].

Расчеты показали, что влияние вихревой пелены, расположенной на расстоянии, большем радиуса лопасти, от плоскости вращения винта, на индуктивные скорости на диске винта пренебрежимо мало, поэтому бесконечный предел интегрирования по θ можно заменить на конечный, ограничиваясь 5—6 витками.

На фиг. 1 показана поляра несущего винта вертолета МИ-6 (висение, $\omega R = 220$ м/сек), полученная по указанной методике (кривая 3); кривой 2 показана поляра, полученная по импульсной теории [7], кривой 1 — поляра, полученная на осно-

вании линейной вихревой схемы, предложенной М. Н. Тищенко. В линейной вихревой схеме шаг винтовых вихревых линий зависел от приближенного значения средних по диску индуктивных скоростей и задавался заранее. Следует отметить, что результаты импульсной теории подправлялись введением коэффициента «концевых потерь». Указанная поправка может составлять для винтов с большим заполнением при больших углах установок лопастей до 20% тяги. На том же графике отмечены кружками результаты летных испытаний. При построении экспериментальных точек использовалась методика приведения к стандартным условиям. Мощность, потребляемая несущим винтом, определялась замером крутящего момента на валу несущего винта.

Сравнение кривых 1, 2 и 3 показывает, что учет переменности шага вихревых винтовых линий, сошедших с разных радиусов, приближает расчетные результаты к экспериментальным.

3. Расчет с учетом сжатия струи за винтом. Используется та же система координат, что и в п. 2. В этой системе параметрические уравнения вихревой пелены имеют вид

$$\begin{aligned} X &= \rho(\theta, \rho_0) \cos(\theta + \Delta\psi_n), \\ Y &= \int_0^\theta (V_y)_0(\tau, \rho_0) d\tau, \quad (3.1) \\ Z &= \rho(\theta, \rho_0) \sin(\theta + \Delta\psi_n) \end{aligned}$$

Здесь ρ — расстояние от точки на вихревой поверхности до оси винта, $(V_y)_0$ — вертикальная составляющая средней по азимуту индуктивной скорости.

Вихревая пелена, описываемая уравнениями (3.1), состоит из вихревых поверхностей, число которых равно числу лопастей винта. Вихревая поверхность состоит из совокупности вихревых винтообразных линий, шаг которых зависит от вертикальной координаты и радиуса, т. е. перенос вихрей предполагается происходящим в поле средних по времени скоростей. Обтекание сечения лопасти рассматривается с учетом истинных скоростей. При определении формы вихревых нитей учитывается сужение струи за винтом. Примерный вид вихревой поверхности показан на фиг. 2.

Расстояние от любой точки на вихревой линии, сошедшей с лопасти на радиусе ρ_0 , до оси винта определяется из уравнения расхода

$$\int_0^{\rho_0} (V_y)_0(0, \rho_0') \rho_0' d\rho_0' = \int_0^{\rho(\rho_0, Y)} (V_y)_0(Y, \rho') \rho' d\rho' \quad (3.2)$$

В равенстве (3.2) используются средние по азимуту индуктивные скорости, которые считаются известными; $\rho(\rho_0, Y)$ — функция, подлежащая определению.

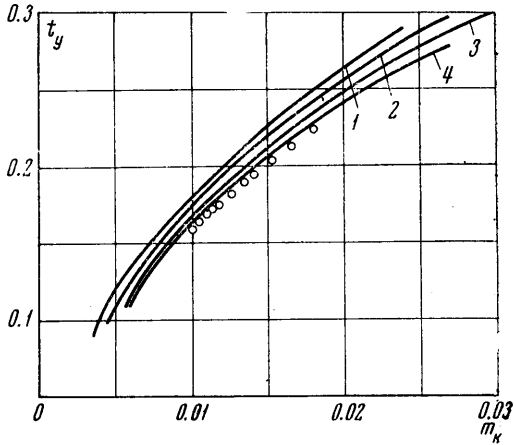
По формуле Био-Савара определяется истинная индуктивная скорость в произвольной точке пространства $(r \cos \psi; y, r \sin \psi)$

$$V_y(r; \psi, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \int_{\rho_1}^1 \int_0^\infty \frac{d\Gamma}{d\rho_0} \int_0^\infty \frac{H(Y, \psi)}{G(Y; \psi, r)} \frac{dY}{(V_y)_0} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} H(Y, \psi) &= -\rho^2 + \rho r \cos(\theta + \Delta\psi_n - \psi) + r(V_y)_0 \sin(\theta + \Delta\psi_n - \psi) \rho r / \partial Y \\ G(Y; \psi, r) &= [\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta + \Delta\psi_n - \psi) + (y - Y)^2]^{3/2}, \quad \rho = \rho(Y, \rho_0) \end{aligned}$$

В равенстве (3.3) использовались очевидные соотношения

$$d\theta = \frac{dY}{(V_y)_0}, \quad \int_0^\theta (V_y)_0 d\tau = Y, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial Y} \frac{dY}{d\theta} = \frac{\partial \rho}{\partial Y} (V_y)_0$$



Фиг. 1

Если положить в равенстве (3.3) величины ψ и y равными нулю, получим выражение для истинной индуктивной скорости на несущей линии

$$V_y = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \int_{\rho_1}^1 \frac{d\Gamma}{d\rho_0} d\rho_0 \int_0^\infty \frac{H(Y, 0)}{G(Y, 0, 0)} \frac{dY}{(V_y)_0} \quad (3.4)$$

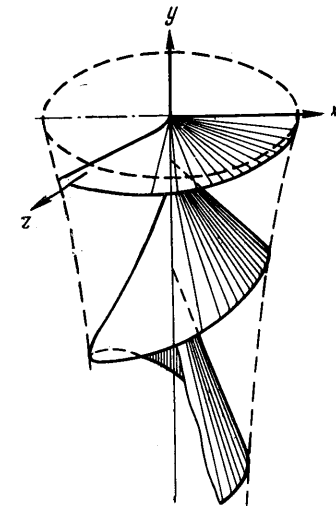
Распределение циркуляции определяется из уравнения связи (2.3), причем при определении угла атаки сечения лопасти используются истинные индуктивные скорости.

Уравнения (3.2) и (3.4) образуют замкнутую систему, если известны средние по азимуту индуктивные скорости. Последние определяются интегрированием по ψ выражения (3.3). Интеграл по ψ сводится к полным эллиптическим интегралам первого и второго рода. Для этого используются замены

$$\begin{aligned} \rho^2 + r^2 + (y - Y)^2 &= a, & 2\rho r &= b, \\ r^2 - \rho^2 + (y - Y)^2 &= c, & \psi - (\theta + \Delta\psi_n) &= \varphi \\ \gamma &= \arcsin \left[\frac{(a + b)(1 - \cos \varphi)}{2(a - b \cos \varphi)} \right]^{1/2} & (0 \leq \varphi \leq \pi), \\ \gamma &= \varphi - \pi & (\pi \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражение для средней по азимуту индуктивной скорости примет вид

$$\begin{aligned} (V_y)_0 &= \frac{k}{8\pi^2} \int_{\rho_1}^1 \frac{d\Gamma}{d\rho_0} d\rho_0 \int_0^\infty \frac{2}{(\rho + r)^2 + (y - Y)^2} \times \\ &\times \left[\frac{r^2 - \rho^2 + (y - Y)^2}{(\rho - r)^2 + (y - Y)^2} E(k_0) - F(k_0) \right] \frac{dY}{(V_y)_0} \\ k_0 &= \left[\frac{4\rho r}{(\rho + r)^2 + (y - Y)^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.6)$$



Фиг. 2

Член, содержащий $\partial\rho/\partial Y$, в выражении (3.6) отсутствует, так как интеграл по ψ в пределах от 0 до 2π от нечетной функции равен нулю.

Можно показать, что присоединенные вихри не влияют на средние индуктивные скорости, а также на значение истинных скоростей на несущей линии.

Как и в п. 2, вихревая пелена предполагается состоящей из конечного числа дискретных вихревых нитей. Истинные скорости подсчитываются посредине между точками схода вихрей. Аналогично выбираются радиусы для подсчета средних по азимуту скоростей как в плоскости вращения винта, так и за ней.

Если в равенстве (3.2) внести переменную ρ под знак дифференциала и интеграл заменить суммой, то равенство (3.2) примет вид

$$\sum_{i=1}^m V_{i0} \Delta(\rho_{i0})^2 = \sum_{i=1}^m V_{ij} \Delta(\rho_{ij})^2, \quad (\Delta(\rho_{ij})^2 = \rho_{ij}^2 - \rho_{i-1j}) \quad (3.7)$$

Здесь первый индекс указывает номер радиуса (или кольцевой струйки), а второй номер — номер сечения струи плоскостью $y = \text{const}$.

Так как уравнение (3.2) справедливо для струи любого радиуса, то равенство (3.7) справедливо для любого числа слагаемых.

При последовательном применении этого равенства для одного, двух и т. д. слагаемых и сокращении равных членов определяется расстояние от оси струи любой вихревой нити в заданном сечении струи. Например, расстояние от оси вихревой нити с номером $i + 1$ в сечении с номером j определяется равенством

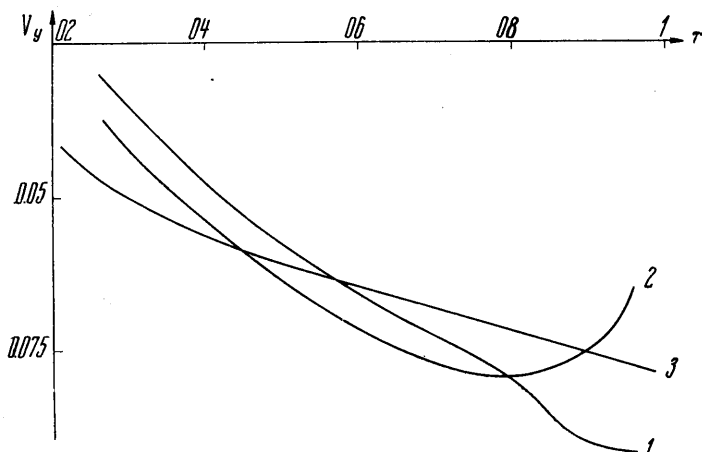
$$\rho_{i+1j} = \left[(\rho_{i+10}^2 - \rho_{i0}^2) \frac{V_{i+1,0}}{V_{i+1j}} + \rho_{ij}^2 \right]^{1/2}$$

Полученная система решалась методом сложной итерации: определялись средние скорости и форма струи, затем — мгновенные скорости; после этого проводилось сравнение средних и мгновенных скоростей, их коррекция, и процесс повторялся.

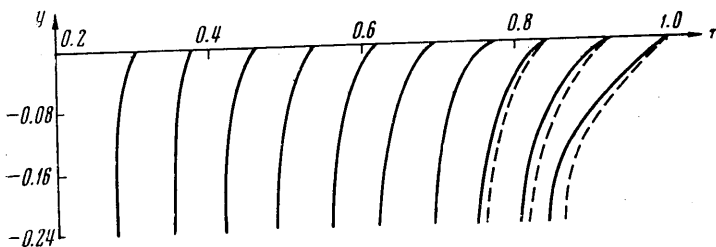
Для определения формы струи подсчитывались средние по азимуту индуктивные скорости в пяти расчетных сечениях с интервалом $\Delta y = 0.08$ между ними, причем в каждом сечении эти скорости определялись на 11 радиусах. Считалось, что на расстоянии, большем $0.32R$, струя принимает цилиндрическую форму. Значения эллиптических интегралов были затабулированы и брались из таблиц с последующей интерполяцией. Для эллиптических интегралов первого рода, имеющих особенность при $k_0 = 1$, для $k_0 \geq 0.95$ использовалось их представление в виде [8]

$$F(k_0) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + k_n)$$

На фиг. 1 кривой 4 показана поляра, полученная по методике с учетом сжатия струи за винтом. Результаты расчетов хорошо согласуются с летными испытаниями. Разница в индуктивной мощности на рабочих режимах по сравнению с импульсной теорией, подправленной на «концевые потери», составляет около 14%. Кроме того, введение коэффициента концевых потерь искажает картину распределения нагрузки по радиусу лопасти.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 представлен график распределения истинных и средних по азимуту индуктивных скоростей (кривые 1 и 2). Кривая 3 на том же графике соответствует распределению индуктивных скоростей, полученных по импульсной теории (несущий винт вертолета МИ-6, $t_v = 0.155$, $\omega R = 220$ м/сек). Здесь t_v — безразмерный коэффициент тяги винта.

На фиг. 4 показаны формы струй для двух винтов вертолета МИ-6 на рабочих режимах: сплошной линией — для несущего винта (пять лопастей, прямоугольных в плане, крутка 6° , угол установки 12° , заполнение 0.091), пунктиром — для хвостового винта (четыре трапециевидные лопасти, угол установки 17.5° , крутка 2° , заполнение 0.202). Несмотря на указанные различия и разные профили при $r > 0.869$, формы струй близки.

Однако при работе винта «на месте» индуктивные скорости очень чувствительны даже к незначительным изменениям формы струи. Значения средних и истинных

скоростей могут существенно меняться и при неизменной форме струи, так как форма зависит только от отношения средних скоростей, и они определяются формой с точностью до постоянной ($V_1/V_2 = S_1/S_2 = \text{const}$). Поэтому при решении методом итераций сравнение результатов вновь полученного приближения с предыдущим надо производить не по форме, а по скоростям.

Для всех рассматривавшихся винтов при работе их «на месте» замечена тенденция к увеличению сужения струи с уменьшением угла установки лопасти, т. е. при уменьшении коэффициента тяги.

Форма струи хорошо согласуется с экспериментальными результатами, полученными в ЦАГИ А. С. Дьяченко.

Ухудшение характеристик винта при сужении струи менее чем вдвое далеко за винтом легко объяснимо. В уравнении расхода (3.2) замена истинных на средние по азимуту скорости эквивалентна. При подсчете же тяги и мощности такая замена уже не будет справедливой, так как тяга и мощность выражаются через интегралы от квадратов и кубов индуктивных скоростей.

При использовании средних скоростей вместо истинных, ошибка в мощности будет, вообще говоря, существенно больше, чем ошибка в тяге. Например, если скорость меняется по азимуту по гармоническому закону, то при замене истинных скоростей на средние ошибка в мощности в три раза больше, чем ошибка в тяге.

Пользуясь случаем, автор благодарит А. А. Зайцева и А. С. Бравермана за ряд ценных замечаний.

Поступило 10 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1950.
2. Ветчинкин В. П., Поляхов Н. Н. Теория и расчет воздушного гребного винта. М., Оборонгиз, 1940.
3. Майкапар Г. И., Лепилкин А. М., Халезов Д. В. Аэродинамический расчет винтов по лопастной теории. Тр. ЦАГИ, 1940, вып. 529.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Гостехиздат, 1957.
5. Вирада Г. Интегральные уравнения. М., Гостехтеоретиздат, 1933.
6. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956.
7. Миль М. Л., Некрасов А. В., Браверман А. С., Гродко Л. Н., Лейканд М. А. Вертолеты, кн. 1. М., «Машиностроение», 1966.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4. М., Физматгиз, 1963.
9. Келдыш М., Франкль Ф. Строгое обоснование теории винта Жуковского. Матем. сб., 1935, т. 42, вып. 2.

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ОДНОГО ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С КЛИНОМ, ДВИЖУЩИМСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Г. М. АРУТЮНЯН

(Москва)

Исследованы границы применимости одного точного решения задачи бокового взаимодействия плоской ударной волны с клином, движущимся со сверхзвуковой скоростью.

1. В работе [1] был рассмотрен один из допускающих точное аналитическое решение случаев взаимодействия плоской ударной волны с клином, движущимся со сверхзвуковой скоростью. В ней было показано (фиг. 1), что при одинаковой интенсивности набегающего и присоединенного скачков, если угол полураствора клина и число Маха набегающего на него потока связаны соотношением

$$\delta = \arctg \left\{ \frac{M^2(\gamma + 1) \operatorname{tg} 2\omega_0 + [M^4(\gamma + 1)^2 \operatorname{tg}^2 2\omega_0 - 8M^2(\gamma - 1) - 16]^{1/2}}{2M^2(\gamma - 1) + 4} \right\} + 2\omega_0 \quad (1.1)$$

$$\omega_0 = \arctg \sqrt{(\gamma + 1)/(3 - \gamma)}$$

а набегающий на клин скачок параллелен поверхности клина, то взаимодействие набегающего и присоединенного скачков происходит без «преломления», с образовани-