

О ЗАТУХАЮЩИХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАЗА, ОБТЕКАЮЩЕГО РЕШЕТКУ ПЛАСТИН

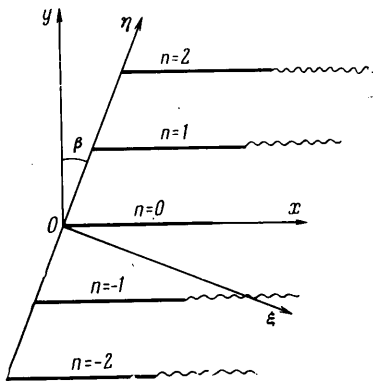
В. Б. КУРЗИН

(Новосибирск)

Решается задача о собственных колебаниях газа, обтекающего решетку пластин, при условии Жуковского — Чаплыгина о конечности скорости у задних кромках профилей. В этом случае часть энергии колеблющегося газа расходуется на образование вихревого следа. Соответствующие собственные значения задачи будут комплексными и, следовательно, собственные колебания газа — затухающими.

Проводится сравнение результатов расчета с результатами экспериментального исследования акустического резонанса при обтекании решетки пластин, полученных Паркером [2].

1. Рассматриваемая задача математически сводится к определению нетривиального решения уравнения для амплитуды φ нестационарной составляющей потенциала скорости потока φ'



Фиг. 1

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2kMi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k^2 \varphi = 0 \quad (1.1)$$

при условии ограниченности решения в бесконечном удалении за и перед решеткой (фиг. 1)

$$\varphi < \infty \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

при однородном условии непротекания газа через пластины

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = nh \cos \beta.$$

$$nh \sin \beta < x < nh \sin \beta + 2$$

и при условии Жуковского — Чаплыгина о неразрывности давления в задних кромках профилей.

В выражениях (1.1) — (1.3)

$$\varphi' = \varphi(x, y) e^{i\omega t}, \quad M = U/a, \quad k = \omega c/a \quad (1.4)$$

Здесь x, y — безразмерные координаты, отнесенные к полухорде профиля пластины c ; ω — частота колебаний газа; U — скорость невозмущенного потока вдоль оси x ; a — скорость звука в невозмущенном потоке; ρ — угол выноса решетки; h — шаг решетки, отнесенный к c .

Решение поставленной задачи может быть представлено рядом Фурье: слева от решетки ($\xi < 0$)

$$\varphi_1 = \exp\left(i\mu \frac{\eta}{h}\right) \sum_{n=-\infty} a_n \exp\left[(i\lambda_{1n} + \lambda_{2n})\xi + i2n\pi \frac{\eta}{h}\right] \quad (1.5)$$

в области справа от решетки ($\xi > 2 \cos \beta$)

$$\psi_2 = \exp\left(i\mu \frac{\eta}{h}\right) \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_n \exp\left[(i\lambda_{1n} - \lambda_{2n})\xi + i2n\pi \frac{\eta}{h}\right] + \varphi^* \quad (1.6)$$

в области, заключенной между двумя соседними пластинами и линиями, соединяющим их передние и задние кромки

$$\varphi_0 = \exp \frac{ikMx}{1-M^2} \sum_{m=0}^{\infty} [c_m e^{\lambda_m(x-2)} + d_m e^{-\lambda_m x}] \cos\left(\frac{m\pi y}{h \cos \beta}\right) \quad (1.7)$$

В выражениях (15)–(1.7)

$$\xi = x \cos \beta - y \sin \beta, \quad \eta = x \sin \beta + y \cos \beta$$

$$\lambda_{1n} = \frac{M \cos \beta}{1 - M^2 \cos^2 \beta} \left[k + \frac{2n\pi + \mu}{h} M \sin \beta \right] \quad (1.8)$$

$$\lambda_{2n} = \frac{1}{1 - M^2 \cos^2 \beta} \left[\left(\frac{2n\pi + \mu}{h} \right)^2 (1 - M^2) - 2k \frac{2n\pi + \mu}{h} M \sin \beta - k^2 \right]^{1/2}$$

$$\lambda_m = \frac{1}{1 - M^2} \left[\left(\frac{m\pi}{h \cos \beta} \right)^2 (1 - M^2) - k^2 \right]^{1/2}$$

где μ — сдвиг фаз между колебаниями в соседних каналах.

Функция φ^* в выражении (1.6) будет характеризовать возмущения, вызванные вихревым следом за решеткой. Для определения общего вида этой функции воспользуемся приемом, примененным в работе [1]. Следуя этому приему, представим функцию φ^* в виде

$$\varphi^* = \left(p_n \exp\left(-\frac{ky}{M}\right) + q_n \exp\left(\frac{ky}{M}\right) \right) \exp\left(-\frac{ikx}{M}\right) \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) во всей плоскости течения удовлетворяет уравнению (1.1) и уравнению Лагранжа при $|\xi| \rightarrow \infty$. Функция φ^* позволяет учесть разрыв функции потенциала скорости на вихревых следах путем задания различных значений константам p_n и q_n для разных полос, ограниченных линиями разрыва скоростей. Если на эту функцию наложить условие периодичности по оси η и условие непрерывности нормальной составляющей скорости на следах, то выражение (1.9) будет содержать лишь одну произвольную константу p_0

$$\varphi^* = p_0 \left[p_n' \exp\left(-\frac{ky}{M}\right) + C q_n' \exp\left(\frac{ky}{M}\right) \right] \exp\left(-\frac{ik(x-2)}{M}\right)$$

$$C = \frac{1 - p_{-1}'}{1 - q_{-1}'} \quad (1.10)$$

$$p_n' = \exp\left[n \left(i\mu + \frac{kh}{M} e^{i\beta} \right) \right], \quad q_n' = \exp\left[n \left(i\mu - \frac{kh}{M} e^{-i\beta} \right) \right]$$

Склеивая функции (1.5)–(1.7) и их нормальные производные на линиях $\xi = 0$ и $\xi = 2 \cos \beta$, придем к соотношениям, из которых получим бесконечную систему алгебраических уравнений для определения неизвестных констант c_m , d_m и p_0 . Ее замыкает условие неразрывности давления в задних кромках профилей.

Выпишем такую систему для случая решетки без выноса ($\beta = 0$), анализ решения которой приведен в следующем пункте

$$\sum_{m=0}^{\infty} [c_m(\lambda_{2n} - \lambda_m)e^{-2\lambda_m} + d_m(\lambda_{2n} + \lambda_m)]g_{nm} = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} [c_m(\lambda_{2n} + \lambda_m) + d_m(\lambda_{2n} - \lambda_m)e^{-2\lambda_m}]g_{nm} + p_0G_n = 0$$

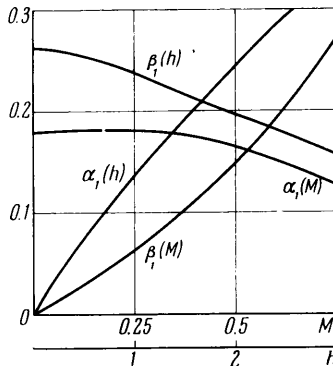
$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[c_m \left(\frac{ik}{M(1-M^2)} + \lambda_m \right) + d_m \left(\frac{ik}{M(1-M^2)} - \lambda_m \right) e^{-2\lambda_m} \right] = 0$$

($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

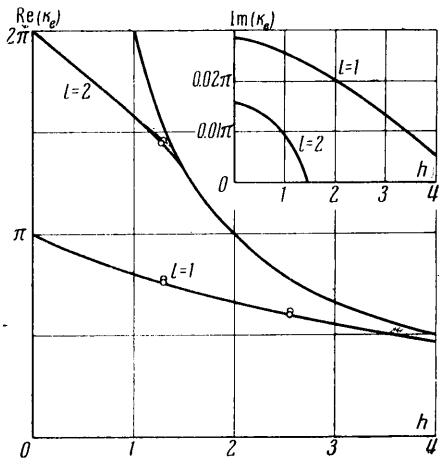
Здесь

$$g_{nm} = \frac{1}{(2n\pi + \mu)^2 - (m\pi)^2}, \quad G_n = \frac{ik/M(1-M^2) - \lambda_{2n}}{(2n\pi + \mu)^2 + (kh/M)^2}$$

Следует отметить, что аналогичная система была получена ранее в работе [2], где собственные колебания определялись без учета вихревого следа. В отличие от работы [2] уравнения системы (1.11) содержат дополнительный член с константой p_0 . Кроме того, система (1.11) содержит уравнение, выражающее условие Жуковского — Чаплыгина в задних краях профилей.



Фиг. 2



Фиг. 3

2. Бесконечная система алгебраических уравнений (1.11) была решена методом редукции. При этом она была усечена до 39 уравнений. Безразмерная собственная частота колебаний газа

$$k_l = (1 - M^2)\pi l(1 - \alpha_l + i\beta_l) / 2 \quad (l=1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

находилась путем варьирования параметров α_l и β_l из условия обращения в нуль определителя усеченной системы. Соответствующие значения параметра α_l определяют поправку l -й собственной частоты на открытый конец, значения β_l — величину потери энергии свободно колеблющегося газа на образование вихревого следа.

Зависимости значений параметров α_l и β_l от параметра h при $\mu = \pi$, $M = 0.7$ и от параметра M при $\mu = \pi$, $h = 1$ приведены на фиг. 2. Анализ-

руя эти зависимости, прежде всего следует отметить, что значения параметра α_1 в рассматриваемом случае практически совпадают с соответствующими значениями этого параметра, рассчитанными без учета вихревых следов [2]. Далее, расчет показывает, что β_1 стремится к нулю при M , стремящемся к нулю. Отсюда следует, что затухающие свободные колебания газа имеют предельный переход при $M \rightarrow 0$ к незатухающим собственным колебаниям, рассмотренным в работе [2].

На фиг. 3 представлена зависимость параметра k_l ($l=1, 2$) от параметра h при $\mu = \pi$, $M = 0.1$. Расчет показал, что с ростом h значение $\text{Re}(k_l)$ и $\text{Im}(k_l)$ падает. При некотором значении $h = h_*$ мнимая часть параметра k_l стремится к нулю, и происходит плавный переход рассматриваемых собственных колебаний в собственные колебания газа во всей плоскости, определяемых условием $\lambda_{2n} = 0$ [2]. Физически это означает, что с ростом шага решетки все больший объем газа окружающего пространства вовлекается в процесс собственных колебаний газа в межпрофильном канале, и при $h \geq h_*$ эти колебания распространяются до бесконечности за и перед решеткой.

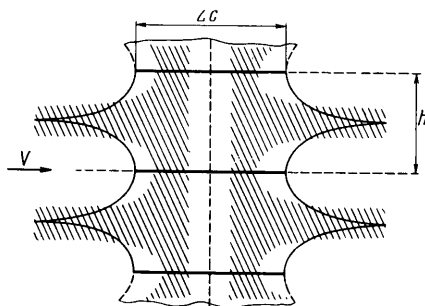
Таким образом, исходя из результатов расчета и некоторых физических представлений, может быть определена область существования собственных колебаний газа в межпрофильном канале. При фиксированных значениях μ и M эта область ограничивается осями координат ($k=0$, $h=0$) и кривой $\lambda_{2n} = 0$. В рассматриваемом случае кривая $\lambda_{20} = 0$, нанесенная на фигуре, представляет собой гиперболу $kh = \sqrt{1 - M^2} = \sqrt{0.99}$.

Следует отметить, что зависимость параметра $\text{Re}(k_l)$ от h_l для $l \neq 1$ может быть определена приближенно из соответствующей зависимости для $l = 1$ по формулам

$$\text{Re}(k_l) = \frac{1}{2} (1 - M^2) \pi (l - \alpha_1), \quad h_l = \frac{h_1 (1 - \alpha_1)}{l - \alpha_1} \quad (2.2)$$

Действительно, вынесем из под знака радикала в выражении (1.8) для λ_{2n} и λ_m параметр $\text{Re}(k)$ и потребуем выполнения условия $h \text{Re}(k) = h_1 \text{Re}(k_1)$. Тогда, если пренебречь в системе (1.11) членами, содержащими множитель $\exp(-2\lambda_m)$ при $m \neq 0$, минор элемента из правого нижнего угла определителя этой системы обратится в нуль при $k = \text{Re}(k_1) + n\pi(1 - M^2)$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Учитывая тот факт, что $\text{Re}(k_l)$ в рассматриваемом случае равна значению приведенной собственной частоты без учета вихревого следа, получаем соотношение (2.2). На фиг. 3 кривая, рассчитанная по формуле (2.2), нанесена пунктиром.

Отметим, что выбор расчетных параметров решетки и потока сделан в соответствии с результатами экспериментального исследования Паркера [3]. Результаты эксперимента нанесены на фиг. 4 точками и практически совпадают с результатами расчета. Паркером было отмечено, что наиболее интенсивные и устойчивые колебания газа наблюдаются в случае $M \simeq 0.1$, $h = 1.29$, $k = 1.45 \pi$ ($l = 2$). Последний факт также согласуется с результатами расчета, так как этому режиму соответствует минимальное значение $\text{Im}(k_l)$ и, следовательно, минимальные потери энергии собственных колебаний газа на образование вихревого следа.



Фиг. 4

На фиг. 4, заимствованной у Паркера [3], штриховыми линиями обозначена область интенсивных колебаний газа на режиме резонанса, замеченная в эксперименте для случая $M = 0.1$, $h = 1.29$, $k = 0.76л$. Сплошными линиями нанесены линии пучностей возмущений за и перед решеткой, просчитанные ранее при выполнении работы [2] для случая $M = 0$, $h = 1.2$, $k_1 = 0.76л$. Из сравнения этих результатов видно, что косвенно расчет согласуется с экспериментом и по характеру собственных функций.

В заключение отметим, что большинство авторов, исследовавших акустический резонанс при обтекании решеток, указывает лишь на собственные колебания газа, частоты которых определяются соотношением $\lambda_{2n} = 0$ [2]. Так, и Паркер в работе [4] пытается объяснить свои экспериментальные результаты с помощью этих соотношений. Однако специальное исследование, проведенное в данной работе и в работе [2], показало существование собственных колебаний газа в межпрофильном канале такого же типа, как в открытых резонаторах. Сравнение последних результатов с экспериментом Паркера подтверждает правильность предположений, заложенных в теоретическую модель.

Поступило 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Курзин В. Б. Решение задачи о неустановившемся обтекании решетки телесных профилей методом склеивания. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
2. Курзин В. Б. О собственных колебаниях газа, обтекающего решетку пластин. ПМТФ, 1969, № 5.
3. Parker R. Resonance effects in wake shedding from parallel plates: some experimental observations. J. Sound and Vibration, 1966, vol. 4, No. 1.
4. Parker R. Resonance effects in wake shedding from parallel plates: calculation of resonant frequencies. J. Sound and Vibration, 1967, vol. 5, No. 2.