

ПЛОСКОЕ ТРАНЗЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ИСКРИВЛЕННЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

И. БИЙБОСУНОВ, Н. КАРЫБЕКОВ

(Фрунзе)

Исследуется пример плоскопараллельного течения, которое имеет зоны до- и сверхзвуковых скоростей, разделенных скачком уплотнения и линией перехода. Фронт ударной волны подходит к линии перехода под прямым углом, выделяя в физической плоскости квадрант, где скорость потока дозвуковая. В остальных трех квадрантах скорость частиц превышает скорость звука, поэтому рассматриваемое течение нельзя использовать для изучения локальных свойств поля скоростей в классической проблеме окончания скачка уплотнения на линии перехода в местной сверхзвуковой зоне.

При построении ударного фронта авторы используют метод возмущений; искомые величины разлагаются в ряд по малому параметру.

Плоскопараллельное околосвуковое течение с прямым скачком уплотнения, построенное в работе [1], есть аналог течения точечного вихря и имеет в качестве линии тока концентрические окружности, причем везде обеспечивается однозначная зависимость вектора скорости от декартовых координат, т. е.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \neq 0$$

Рассмотрим случай течения с искривленным скачком уплотнения, оканчивающимся внутри потока. Функция тока и потенциал скорости в отдельности удовлетворяют уравнениям

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + b(\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{b(\eta)}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

Здесь ψ — функция тока, φ — потенциал скорости, θ — угол наклона скорости, η — функция скорости.

В окрестности значения $\eta = 0$ имеем разложение [1]

$$b(\eta) = b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots + b_m \eta^m$$

На основании этого разложения из первого уравнения системы (1) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \eta \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \eta^2} &= 0, & \eta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} &= -b_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} \\ \eta \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} &= -b_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} - b_1 \eta \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta}, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Решения уравнений (2) выражаются соответственно в виде

$$\psi_0 = \eta f_0(t), \quad \psi_1 = \eta^2 f_1(t), \quad \psi_2 = \eta^3 f_2(t), \dots \quad (t = -\theta^2 / \eta^3) \quad (3)$$

После подстановки решений (3) в уравнения (2) приходим к трем гипергеометрическим уравнениям

$$\begin{aligned} t(1-t)f_0''(t) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}t)f_0'(t) &= 0 & (4) \\ t(1-t)f_1''(t) + \frac{1}{2}f_1'(t) - \frac{2}{9}f_1(t) &= \frac{1}{9}b_0[f_0(t) - 3tf_0'(t)] \\ t(1-t)f_2''(t) + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}t)f_2'(t) - \frac{2}{9}f_2(t) &= \frac{2}{9}b_0[f_{01}(t) - \frac{3}{2}tf_{01}'(t)] - \\ &- \frac{1}{9}b_0^2[f_0(t) - \frac{3}{2}tf_0'(t)] + \frac{1}{9}b_{11}[f_0(t) - 3tf_0'(t)] \end{aligned}$$

Согласно С. В. Фальковичу [3], решениями уравнения (4) будут

$$f_0(t) = A_0F(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, t) + B_0t^{1/2}F(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{3}{2}, t) \quad (5)$$

$$f_1(t) = A_1F(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, t) + B_1t^{1/2}F(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{2}, t) - \frac{1}{2}b_0f_0(t)$$

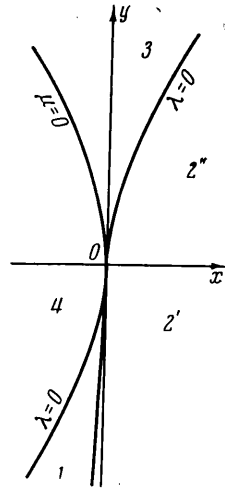
$$\begin{aligned} f_2(t) &= A_2F(-1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, t) + \\ &+ B_2t^{1/2}F(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{2}, t) - \\ &- \frac{1}{2}b_0f_{01}(t) + \\ &+ (A+Bt)f_0(t) + 3Bt(1-t)f_0'(t) \end{aligned}$$

Здесь

$$A = \frac{5b_0^2 - 2b_1}{24}, \quad B = \frac{b_0^2 + 2b_1}{18}$$

$$b_0 = -\frac{2\kappa + 5}{5(\kappa + 1)^{1/3}}, \quad b_1 = \frac{46\kappa^2 + 105\kappa + 125}{175(\kappa + 1)^{2/3}}$$

$$f_{01}(t) = A_1F(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, t) + B_1t^{1/2}F(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{2}, t).$$



Фиг. 1

Здесь $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ — произвольные постоянные. Функцию тока будем искать в следующем виде (фиг. 1) [1, 4]:

в области 1 ($\eta < 0$)

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -(\frac{3}{2})^{2/3}\rho^{2/3}(z-1)^{1/3}[\alpha_{01} + \beta_{01}(z^{-1}-1)^{-1/2}(z-1)^{-5/6}F_0(z)] + \\ &+ (\frac{3}{2})^{1/3}\rho^{1/3}(z-1)^{2/3}\{\alpha_{11}F_1(z) + \beta_{11}(z^{-1}-1)^{-1/2}(z-1)^{-3/2}F_2(z) - \\ &- \frac{1}{2}b_0[\alpha_{01} + \beta_{01}(z^{-1}-1)^{-1/2}(z-1)^{-5/6}F_0(z)]\} - \\ &- (\frac{3}{2})^2\rho^2(z-1)\{\frac{7}{9}\alpha_{21}[1 + \frac{4}{7}(z-1)^{-1} - 1] + \beta_{21}(z^{-1}-1)^{1/2} \times \\ &\times (z-1)^{-13/6}F_3(z) - \frac{1}{2}b_0[\alpha_{11}F_1(z) + \beta_{11}(z^{-1}-1)^{-1/2}(z-1)^{-3/2}F_2(z)] + \\ &+ [A - B(z^{-1}-1)^{-1}][\alpha_{01} + \beta_{01}(z^{-1}-1)^{-1/2}(z-1)^{-5/6}F_0(z)] + \\ &+ \frac{3}{2}B(z^{-1}-1)^{-1}(z-1)\beta_{01}[(z^{-1}-1)^{1/2}F_4(z) + \frac{1}{9}(z^{-1}-1)^{-1/2}F_5(z)]\} \end{aligned} \quad (6)$$

в области 2' ($\eta > 0$) и в области 2'' ($\eta < 0$)

$$\begin{aligned} \psi_2 &= (\frac{2}{3})^{2/3}\rho^{2/3}(z-1)^{1/3}[1 + \varepsilon(z^{-1}-1)^{-1/2}(z-1)^{-5/6}F_0(z)] + \\ &+ (\frac{3}{2})^{3/2}\rho^{4/3}(z-1)^{2/3}\{F_1(z) + \varepsilon_1(z^{-1}-1)^{-1/2}(z-1)^{-3/2}F_2(z) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2}b_0[1 + \varepsilon(z^{-1} - 1)^{-1/2}(z - 1)^{-5/6}F_0(z)] + \\
& + (\frac{3}{2})^2(z - 1)\rho^2\{\frac{7}{3}[1 + \frac{4}{7}(z - 1)^{-1}] + \varepsilon_2(z^{-1} - 1)^{-1/2}(z - 1)^{-13/6}F_3(z) - \\
& - \frac{1}{2}b_0[F_1(z) + \varepsilon_1(z^{-1} - 1)^{-1/2}(z - 1)^{-3/2}F_2(z)] + \quad (7) \\
& + [A - B(z^{-1} - 1)^{-1}][1 + \varepsilon(z^{-1} - 1)^{-1/2}(z - 1)^{-5/6}F_0(z)] + \\
& + \frac{3}{2}B(z^{-1} - 1)^{-1}(z - 1)^{-1}\varepsilon[(z^{-1} - 1)^{1/2}F_4(z) + \frac{1}{9}(z^{-1} - 1)^{-1/2}F_5(z)]\}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
z &= \theta^2 / \rho^2, \quad \rho = \sqrt[7]{\theta^2 + \frac{4}{9}\eta^3} \\
F_0(z) &= F[1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, (1 - z^{-1})^{-1}], \quad F_1(z) = F[-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, (1 - z^{-1})^{-1}] \\
F_2(z) &= F[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, (1 - z^{-1})^{-1}], \quad F_3(z) = F[2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, (1 - z^{-1})^{-1}] \\
F_4(z) &= F[\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{3}{2}, (1 - z^{-1})^{-1}], \quad F_5(z) = F[\frac{3}{2}, \frac{7}{6}, \frac{5}{2}, (1 - z^{-1})^{-1}]
\end{aligned}$$

в области 3 ($\eta < 0$)

вблизи характеристики $\lambda = 0$ функция тока приближается к ней слева, т. е. ($\rho^2 \rightarrow -0$, $z \rightarrow -\infty$), поэтому

$$\begin{aligned}
\psi_3 &= (\frac{3}{2})^{2/3}(-\rho^2)^{1/3}\alpha_{03}(1 - z)^{1/3} + \\
& + (\frac{3}{2})^{4/3}(-\rho^2)^{2/3}(1 - z)^{2/3}[\alpha_{13}F_1(z) - \frac{1}{2}b_0\alpha_{03}] - \\
& - (\frac{3}{2})^2\rho^2(1 - z)\{\frac{7}{3}\alpha_{23}[1 - \frac{4}{7}(1 - z)^{-1}] - \\
& - \frac{1}{2}b_0\alpha_{13}F_1(z) + [A + B(1 - z^{-1})^{-1}]\alpha_{03}\} \quad (8)
\end{aligned}$$

вблизи характеристики $\mu = 0$ функция тока выражается в следующем виде ($\rho^2 \rightarrow +0$, $z \rightarrow +\infty$):

$$\begin{aligned}
\psi_3 &= (\frac{3}{2})^{2/3}\rho^{2/3}(z - 1)^{1/3}\alpha_{03} + (\frac{3}{2})^{4/3}\rho^{4/3}(z - 1)^{2/3}[\alpha_{13}F_1(z) - \frac{1}{2}b_0\alpha_{03}] + \quad (9) \\
& + (\frac{3}{2})^2\rho^2(z - 1)\{\frac{7}{3}\alpha_{23}[1 + \frac{4}{7}(z - 1)^{-1}] - \frac{1}{2}b_0\alpha_{13}F_1(z) + \\
& + \alpha_{03}[A - B(z^{-1} - 1)^{-1}]\}
\end{aligned}$$

в области 4 ($\eta < 0$)

$$\begin{aligned}
\psi_4 &= D_0\alpha_{04}(\mu - \lambda)^{2/3} \int_{m-1}^m z^{-1/6}(1 - z)^{-1/6} dz + (\frac{3}{2})^{4/3}(-\rho^2)^{2/3}(1 - z)^{2/3} \times \\
& \times [\alpha_{14}F_1(z) - \frac{1}{2}b_0\alpha_{04}] + (\frac{3}{4})^2(\mu - \lambda)^2\{\alpha_{24}D_1[m^{13/6}F(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{19}{6}, m) - \\
& - (m - 1)^{13/6}F(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{19}{6}, m - 1)] - \frac{1}{2}b_0\alpha_{14}D_2[m^{3/2}F(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{2}, m) - \\
& - (m - 1)^{3/2}F(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{2}, m - 1)] + \alpha_{04}D_3[m^{5/6}F(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{11}{6}, m) - \\
& - (m - 1)^{5/6}F(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{11}{6}, m - 1)]\} \quad (10) \\
m &= -\frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad D_0 = (\frac{3}{4})^{2/3} \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma^2(\frac{5}{6})}, \quad D_1 = \frac{7}{3} \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{7}{3})}{\Gamma(\frac{19}{6})\Gamma(\frac{13}{6})} \\
D_2 &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{7}{6})} \frac{\Gamma(\frac{5}{3})\Gamma(\frac{7}{3})}{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}, \quad D_3 = (A + B) \frac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{11}{6})\Gamma(\frac{5}{6})}
\end{aligned}$$

Здесь λ , μ — характеристические координаты.

Постоянные коэффициенты α_{k3} , α_{k4} , α_{k1} ($k = 0, 1, 2$), входящие в уравнения (6) — (10), определяются следующими условиями: при прохождении через характеристики функция тока должна меняться непрерывно, т. е.

$$\begin{aligned} \lim_{\rho^2 \rightarrow +0} \psi_2 &= \lim_{\rho^2 \rightarrow -0} \psi_3 \quad \text{на характеристике } \lambda = 0 \\ \lim_{\rho^2 \rightarrow +0} \psi_3 &= \lim_{\rho^2 \rightarrow -0} \psi_4 \quad \text{на характеристике } \mu = 0 \\ \lim_{\rho^2 \rightarrow -0} \psi_4 &= \lim_{\rho^2 \rightarrow +0} \psi_1 \quad \text{на характеристике } \lambda = 0 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\alpha_{01} = \alpha_{03} = \alpha_{04} = 1, \quad \alpha_{11} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = 1, \quad \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = 1 \quad (11)$$

Легко убедиться, что потенциал скорости из уравнений (1) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -c(-\eta_1)^{3/2} [{}^2/3 \alpha_{01} t^{1/2} F(0, {}^2/3, {}^3/2, t) + \beta_{01} m^{5/2} F(-{}^1/6, {}^7/6, {}^{11}/6, m) + \\ &+ c(-\eta_1)^{5/2} \{ {}^4/3 \alpha_{11} t^{1/2} F({}^1/3, -{}^1/3, {}^3/2, t) + {}^3/5 \beta_{11} F(-{}^1/6, -{}^5/6, {}^1/2, t) - \\ &- {}^3/10 b_0 (1-t) [f_0^{(0)}(t) - 2t f_0^{(0)'}(t)] \} - c(-\eta_1)^{7/2} \{ 2\alpha_{21} t^{1/2} F(0, -{}^2/3, {}^3/2, t) + \\ &+ {}^3/7 \beta_{21} F(-{}^1/2, -{}^7/6, {}^1/2, t) - {}^1/14 b_0 [5(1 - {}^1/2 t) f_{01}^{(0)}(t) - \\ &- 3t(1-t) f_{01}^{(0)'}(t)] + {}^1/8 (b_0 + 2b_1) f_0^{(0)}(t) \} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= c\eta_2^{5/2} [{}^2/3 (-t)^{1/2} F(0, {}^2/3, {}^3/2, t) + \epsilon F(-{}^1/2, {}^1/6, {}^1/2, t)] + \\ &+ c\eta_2^{5/2} \{ -{}^4/3 (-t)^{1/2} F({}^1/3, -{}^1/3, {}^3/2, t) + {}^3/5 \epsilon_1 F(-{}^1/6, -{}^5/6, {}^1/2, t) - \\ &- {}^3/10 b_0 (1-t) [f_0^{(0)}(t) - 2t f_0^{(0)'}(t)] \} + c\eta_2^{7/2} \{ 2(-t)^{1/2} F(0, -{}^2/3, {}^3/2, t) - \\ &- {}^3/7 \epsilon_2 F(-{}^1/2, -{}^7/6, {}^1/2, t) - {}^1/14 b_0 [5(1 - {}^1/2 t) f_{01}^{(0)}(t) - \\ &- 3t(1-t) f_{01}^{(0)'}(t)] + {}^1/8 (b_0 + 2b_1) f_0^{(0)}(t) \} \quad (13) \end{aligned}$$

В газе Чаплыгина для данного течения краевыми условиями являются [5]

$$\psi_1(\theta_1, \eta_1) = \psi_2(\theta_2, \eta_2) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_1 \lambda_2 - 1) &= 2\lambda_1 \lambda_2 [\sin {}^1/2(\theta_2 - \theta_1)]^2 \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \\ &+ 2 - 4\kappa(\kappa + 1)^{-1} \lambda_1 \lambda_2 [\cos {}^1/2(\theta_2 - \theta_1)]^2 \} \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\psi_1} = \frac{d\varphi_2}{d\psi_2} &= \left[\frac{(1 - h^2 \lambda_1^2)^{-1(\kappa-1)}}{\lambda_2} + \frac{(1 - h^2 \lambda_2^2)^{-1(\kappa-1)}}{\lambda_1} \right] \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \\ \left(\lambda_1 &= \frac{W_1}{a_*}, \quad \lambda_2 = \frac{W_2}{a_*} \right) \quad (16) \end{aligned}$$

Индексы 1, 2 обозначают совпадающие точки на сверхзвуковой и дозвуковой сторонах скачка уплотнения.

Разлагая в ряд величин λ , λ^{-1} по степеням η и после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 &= \pm (\eta_2 - \eta_1) \sqrt{-{}^1/2(\eta_2 + \eta_1) [1 + {}^1/12(\eta_2 - \eta_1)^2 {}^1/2(\eta_2 + \eta_1) + \\ &+ {}^1/80(\eta_2 - \eta_1)^4 {}^1/4(\eta_2 + \eta_1)^2 + \dots]} \quad (17) \end{aligned}$$

$$d\varphi_1 / d\psi_1 = \pm c\sqrt{-^{1/2}(\eta_2 + \eta_1)} [1 + c_1(\eta_2 + \eta_1) + c_2(\eta_2^2 + \eta_1^2) + c_3(\eta_2^3 + \eta_1^3) + c_4\eta_1\eta_2 + c_5\eta_1\eta_2(\eta_2 + \eta_1) + \dots] \quad (18)$$

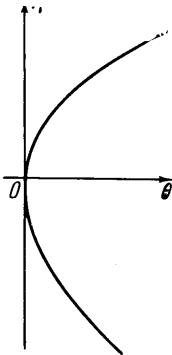
$$d\varphi_2 / d\psi_2 = \pm c\sqrt{-^{1/2}(\eta_2 + \eta_1)} [1 + c_1(\eta_2 + \eta_1) + c_2(\eta_2^2 + \eta_1^2) + c_3(\eta_2^3 + \eta_1^3) + c_4\eta_1\eta_2 + c_5\eta_1\eta_2(\eta_2 + \eta_1) + \dots] \quad (19)$$

Здесь $c = [^{1/2}(\kappa + 1)]^{1/(\kappa-1)}(\kappa + 1)^{1/2}$

$$c_1 = \frac{5 + 2\kappa}{10(\kappa + 1)^{1/3}}, \quad c_3 = -\frac{1120\kappa^3 + 7350\kappa^2 + 12775\kappa + 7875}{6300(\kappa + 1)}$$

$$c_2 = \frac{40\kappa^2 + 175\kappa + 200}{700(\kappa + 1)^{2/3}}, \quad c_4 = \frac{17\kappa^2 + 35\kappa + 50}{175(\kappa + 1)^{2/3}}$$

$$c_5 = -\frac{2560\kappa^3 + 6750\kappa^2 + 9475\kappa + 10125}{6300(\kappa + 1)}$$



Фиг. 2

Скачок уплотнения в плоскости $\theta\eta$ отображается в виде двух кривых соответственно на сверхзвуковой и дозвуковой сторонах (фиг. 2).

$$\theta_1 = ^2/3[k_{01}(-\eta_1)^{3/2} + k_{11}(-\eta_1)^{5/2} + k_{21}(-\eta_1)^{7/2}] \quad (20)$$

$$\theta_2 = ^2/3(k_{02}\eta_2^{3/2} + k_{21}\eta_2^{5/2} + k_{22}\eta_2^{7/2})$$

Кроме того, предположим, что

$$-\eta_1 / \eta_2 = k_0 \quad (21)$$

На основании формул (6), (7) и (12), (13) и, учитывая выражения (11), (20), (21), из уравнений (14), (17), (18), (19) по методу неопределенных коэффициентов получим следующие системы уравнений относительно неизвестных (в формулах (17) — (19) ограничимся первым знаком, т. е. знаком плюс, и для воздуха берем $\kappa = 1.4$)

$$k_0(1 - \varepsilon k_{02} + ^{1/18}\varepsilon k_{02}^3) = 1 - 2^{-5/6}\beta_{01}F(^{1/6}, ^{5/6}, ^{11/6}, ^{1/2}) + ^2^{-5/6}\beta_{01}D_1 k_{01} - 2^{-5/6}\beta_{01}\bar{D}_2 k_{01}^2$$

$$k_{02}k_0^{3/2} - k_{01} = ^3/2\sqrt{2}(1 + k_0)(1 - k_0)^{1/2}$$

$$k_0^{1/2}(k_{02} - ^3/2\varepsilon - ^{1/18}\varepsilon k_{02}^2) = ^{1/2}\sqrt{2}(1 - k_0)^{1/2}(-1 + \varepsilon k_{02} - ^{1/18}\varepsilon k_{02}^3)$$

$$\alpha_{01}k_{01} + 3 \cdot 2^{-11/6}\beta_{01}F(-^{1/6}, ^{7/6}, ^{11/6}, ^{1/2}) + 3 \cdot 2^{-11/6}\bar{D}_3\beta_{01}k_{01} +$$

$$+ 3 \cdot 2^{-11/6}\bar{D}_4\beta_{01}k_{01}^2 = ^{1/2}\sqrt{2}(1 - k_0)^{1/2}[1 - 2^{-5/6}\beta_{01}F(^{1/6}, ^{5/6}, ^{11/6}, ^{1/2}) - 2^{-5/6}\bar{D}_1\beta_{01}]$$

Здесь

$$\bar{D}_3 = -0.91850, \quad \bar{D}_2 = 0, \quad \bar{D}_3 = -0.67095, \quad \bar{D}_4 = 0.15300$$

Для решения этой системы уравнений величины k_0 , k_{01} , k_{02} , β_{01} разложим в ряд по ε

$$k_{01} = \gamma_{01}\varepsilon + \gamma_{11}\varepsilon^2 + \gamma_{21}\varepsilon^3 + \dots, \quad k_{02} = \gamma_{02}\varepsilon + \gamma_{12}\varepsilon^2 + \gamma_{22}\varepsilon^3 + \dots$$

$$k_0 = 1 - \gamma_1\varepsilon^2 - \gamma_2\varepsilon^3 - \gamma_3\varepsilon^4 + \dots, \quad \beta_{01} = \nu_{01}\varepsilon^2 + \nu_{11}\varepsilon^3 + \nu_{21}\varepsilon^4 + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_{01} &= -0.3, & \gamma_{11} &= 1.1273, & \gamma_{21} &= -1.31100 \\ \gamma_{02} &= -1.2, & \gamma_{12} &= 0.2818, & \gamma_{22} &= 0.09480 \\ \gamma_1 &= 0.4242, & \gamma_2 &= 0.3382, & \gamma_3 &= 0.01270 \\ v_{01} &= -1.7835, & v_{11} &= 1.5751, & v_{21} &= 1.51560 \end{aligned}$$

или, считая $\varepsilon = -0,1$, имеем [4]

$$k_{01} = 0.04258, \quad k_{02} = 0.12272, \quad k_0 = 0.99852, \quad \beta_{01} = -0.01962 \quad (22)$$

Учитывая соотношения (22), аналогично предыдущему получим

$$\begin{aligned} 0.09945k_{12} + 0.00892k_{11} - 0.12269\varepsilon_1 + 0.04258\beta_{11} + 0.01258 &= 0 \\ k_{11} - 0.99604k_{12} &= 0 \\ 1.42019k_{12} + 2.09331\varepsilon_1 - 0.82182 &= 0 \\ 1.42861k_{11} - 2.12840\beta_{11} - 0.05460 &= 0 \\ 0.09931k_{22} + 0.12115\varepsilon_2 + 0.00892k_{21} - 0.04258\beta_{21} - 0.07970 &= 0 \\ k_{21} - 0.99457k_{22} &= 0 \\ 1.42088k_{22} - 2.06126\varepsilon_2 + 0.66928 &= 0 \\ 1.42898k_{21} + 2.12056\beta_{21} - 0.74363 &= 0 \end{aligned}$$

Решая эти системы уравнений, находим

$$\begin{aligned} k_{12} &= 0.16661, & k_{22} &= 0.25010, & k_{11} &= 0.16595, & k_{21} &= 0.24874 \\ \varepsilon_1 &= 0.27956, & \varepsilon_2 &= 0.49709, & \beta_{11} &= 0.08613, & \beta_{21} &= 0.18306 \end{aligned} \quad (23)$$

Из уравнений (20) согласно выражениям (22), (23) имеем

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0.02839(-\eta_1)^{3/2} + 0.11063(-\eta_1)^{5/2} + 0.16558(-\eta_1)^{7/2} \\ \theta_2 &= 0.08181\eta_2^{3/2} + 0.11072\eta_2^{5/2} + 0.16673\eta_2^{7/2} \end{aligned} \quad (24)$$

Найдем теперь функцию тока и потенциал скорости в зависимости от η на скачке

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 = \psi_2 = -1.01226\eta_2 + 1.60075\eta_2^2 - 1.77964\eta_2^3 \\ \varphi &= \varphi_1 = \varphi_2 = -0.03893\eta_2^{3/2} + 0.16441\eta_2^{5/2} - 0.22522\eta_2^{7/2} \end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая уравнения (24), (25), на основании известных формул Чаплыгина определяем декартовы координаты скачка уплотнения

$$\begin{aligned} a_* x &= -0.03893\eta_2^{3/2} + 0.19919\eta_2^{5/2} - 0.26275\eta_2^{7/2} + 0.07171\eta_2^{9/2} \\ a_* y &= -1.59583\eta_2 + 2.52358\eta_2^2 - 3.16336\eta_2^3 + 0.91165\eta_2^4 - 1.31022\eta_2^5 \end{aligned}$$

Графическое изображение искривленного скачка уплотнения в физической плоскости дано на фиг. 1.

Авторы благодарны С. В. Фальковичу за обсуждение результатов работы.

Поступило 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

- Бийбосунов И., Карыбеков Н. Решение уравнения Чаплыгина в плоскопараллельном околзвучковом течении с прямым скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
- Фалькович С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
- Фалькович С. В. Околзвучковые плоские течения газа с особыми точками на звуковой линии. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
- Бийбосунов И. Пример плоскопараллельного околзвучкового течения газа с искривленным скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения с функцией тока вида $\psi_{2/3} = \rho^{2/3} f_{2/3}(\theta/R)$. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 5.
- Франкль Ф. И. Обтекание профиля дозвуковым потоком с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся искривленным скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.