

О СПОНТАННОЙ КОНДЕНСАЦИИ ПРИ ОБТЕКАНИИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЫПУКЛОГО УГЛА

Р. А. ТКАЛЕНКО

(Москва)

В расширяющихся изэнтропических потоках кривая давления насыщенного пара, как правило, круче изэнтропы, поэтому при обтекании выпуклого угла произойдет рост пересыщения и конденсации. Впервые теорию спонтанной конденсации с газовой динамикой объединил Осватич [1], предложивший систему уравнений для описания течений в сверхзвуковых соплах. Из последующих исследований в этом направлении следует отметить работу Хилла [2], а также В. П. Баханова и М. В. Буйкова [3]. Система уравнений, предложенная в последней работе, является наиболее совершенной и описывает потоки с конденсацией и химическими реакциями.

Обтекание выпуклого угла сверхзвуковым потоком пара исследовалось экспериментально [4]. Там же приведено качественное описание течения в волне разрежения, однако вопрос о течении между последней характеристикой пучка и стенкой остался открытым. Ниже на основании системы уравнений работы [3] исследуется и эта область течения.

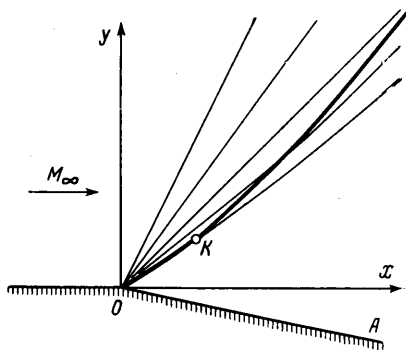
1. Рассмотрим стационарное плоское течение невязкой нетеплопроводной газовой смеси, состоящей из двух компонент, одна из которых может конденсироваться. Конденсация предполагается спонтанной, т. е. в набегающем потоке нет посторонних примесей. Энтальпию h единицы массы будем определять давлением p , суммарной плотностью газа ρ и массовой долей газа β . Пусть x и y — оси прямоугольной системы координат с началом в точке излома O (фиг. 1), u и v — проекции вектора скорости на эти оси.

Выберем в качестве независимых переменных координату x и функцию тока ψ , тогда уравнения сохранения количества движения, энергии, массы и выражение для энтальпии запишутся

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho u}, \quad h = h(\rho, p, \beta)$$



Фиг. 1

Предположим, что образующиеся капли имеют сферическую форму и радиус r . Введем в рассмотрение функцию распределения капель по размерам $f(x, \psi, r)$, отнесенную к единице массы вещества. Если ρ^0 — плотность жидкой частицы, r_* — радиус зародыша критического размера, t — время, I — скорость образования зародышей, $\delta(r)$ — δ -функция, то процесс

конденсации будет описываться уравнением [3]

$$\rho u \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\omega \quad (1.2)$$

$$\omega = \frac{4\pi}{3} \rho^{\circ} r_*^3 I + 4\pi \rho^{\circ} \int_{r_*}^{\infty} r^2 \dot{r}^t dr \quad \left(\dot{r} = \frac{dr}{dt} \right)$$

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{f}) = \frac{I}{\rho} \delta(r - r_*) \quad (1.3)$$

Первый и второй члены, входящие в ω , выражают прирост общей массы конденсированного вещества вследствие образования новых зародышей и роста уже готовых капель; (1.3) обычно называют кинетическим уравнением.

Предполагается, что скорость роста капли не зависит от ее размера, а температура равна температуре газа T . Для скорости образования зародышей используется формула Беккера — Деринга [3], а уравнение роста капель выводится из баланса количества испаряющихся и конденсирующихся молекул [2]. Эти соотношения имеют вид

$$I = \alpha \frac{p_1^2 V^{\circ}}{(kT)^2} \left(\frac{2\sigma}{\pi \mu_1} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{4\pi \sigma r_*^2}{3kT} \right), \quad r_* = \frac{2\sigma V^{\circ}}{kT \ln S}$$

$$S = \frac{p_1}{p_s}, \quad RT = \mu \frac{p}{\rho}, \quad \dot{r} = \alpha \frac{p_s (S - 1)}{(2\pi RT)^{1/2}} \quad (1.4)$$

Здесь индексом 1 отмечены параметры пара, k — постоянная Больцмана, μ — молекулярный вес, R — универсальная газовая постоянная, V° — объем, занимаемый молекулой капли, α — коэффициент конденсации, S — пересыщение, $p_s(T)$ — давление насыщенных паров над плоской поверхностью перехода, σ — поверхностное натяжение капли.

Все ограничения, при которых выводятся уравнения (1.2) — (1.4), очевидно, остаются в силе в настоящем исследовании. Правда, условие квазистационарности

$$\tau_1 \gg \tau_2 \quad (1.5)$$

используемое при выводе формулы Беккера — Деринга, где τ_1 — время создания пересыщения в системе, τ_2 — время установления равновесного (соответствующего заданному пересыщению) распределения докритических зародышей по размерам, заведомо не выполняется в точке излома. Однако в рассматриваемой задаче всегда можно подобрать такую характерную длину l , что (1.5) не будет выполняться только в достаточно малой окрестности этой точки.

Все величины в приведенных уравнениях удобно считать безразмерными. Пусть индекс ∞ относится к параметрам набегающего потока, тогда приведение к безразмерному виду достигается отнесением пространственных координат к l , скоростей — к u_{∞} , плотности — к ρ_{∞} , давления — к $\rho_{\infty} u_{\infty}^2$, энтальпии — к u_{∞}^2 и т. д. В качестве граничного условия берется условие непротекания на стенке.

2. Приведенная система уравнений при сверхзвуковых скоростях ($u^2 + v^2 > c^2$, где c^2 — скорость звука) кроме линий тока имеет два семейства действительных характеристик. Продолевая обычные выкладки, которые необходимы для получения соотношений на характеристиках, и вводя обозначения

$$B^2 = \frac{u^2 + v^2}{2} - 1, \quad c^2 = \frac{\rho h_p}{1 - \rho h_p}, \quad h_p = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_p, \quad h_p = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_p$$

приходим к результату

$$dy = \frac{uv \pm c^2 B}{u^2 - c^2} dx, \quad d\psi = \rho c^2 \frac{v \pm Bu}{u^2 - c^2} dx$$

$$u^2 d\left(\frac{v}{u}\right) \pm \frac{B}{\rho} dp + \frac{v \pm Bu}{u^2 - c^2} \frac{c^2}{\rho} \frac{h_p}{h_p} \omega dx = 0 \quad (2.1)$$

Верхний (нижний) знак соответствует характеристике первого (второго) семейства.

Применение метода характеристик для численных расчетов затруднено в данном случае тем обстоятельством, что кинетическое уравнение для функции распределения зародышей по размерам вводит дополнительную переменную r . Плоское течение около выпуклого угла описывается системой уравнений с тремя независимыми переменными. Однако то обстоятельство, что скорость роста капли (последнее уравнение (1.4)) не зависит от ее размера, позволяет обойти эту трудность.

Введем обозначение

$$\Omega_k = \int_{r_*}^{\infty} r^k f dr \quad (k=0, 1, 2)$$

тогда с учетом (1.4) выражение для ω запишется

$$\omega = \frac{4\pi}{3} \rho^0 r_*^3 I + 4\pi \rho^0 r_* \Omega_2 \quad (2.2)$$

Умножим обе части кинетического уравнения (1.3) на r^k и проинтегрируем по r от r_* до ∞ . После преобразования интегралов по частям, использования известных свойств δ -функции и условия

$$r^2 f(x, \psi, r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

кинетическое уравнение сводится к трем уравнениям в частных производных, в которые r уже не входит как независимая переменная¹

$$u \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} = \frac{I}{\rho} r_*^2 + 2ur_* \Omega_1, \quad u \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} = \frac{I}{\rho}, \quad u \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} = \frac{I}{\rho} r_* + u \dot{\Omega}_0 \quad (2.3)$$

Таким образом, вместо кинетического уравнения можно использовать (2.3) с новым выражением для ω (2.2). Сама функция распределения может быть определена из уравнения (1.3), которое является относительно нее линейным уравнением в частных производных первого порядка. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений [6] имеет вид

$$\frac{dx}{u} = \frac{dr}{\dot{r}} = \frac{\rho df}{I \delta(r - r_*)}$$

Первый интеграл этой системы имеет вид

$$r - Z(x, \psi) = \text{const}, \quad Z(x, \psi) = \int_{x_1}^x r \frac{dx}{u}$$

Здесь x_1 — координата некоторой точки на линии тока, в которой конденсации еще нет, например на начальной характеристике. Используя граничное условие

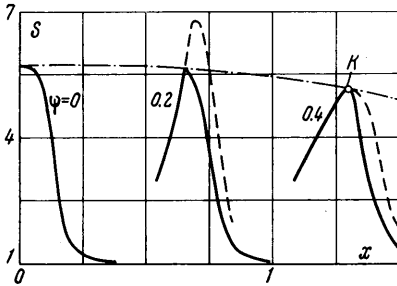
$$f(x_1, \psi, r) = 0$$

¹ Для одномерных задач (1.3) сводится к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям [3].

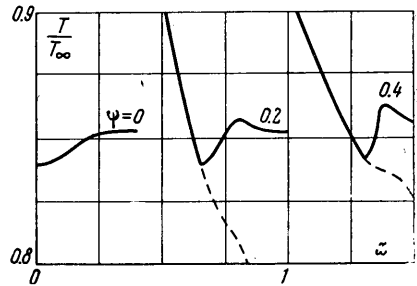
можно получить решение уравнения (1.3)

$$f(x, \psi, r) = \int_{x_1}^x \frac{I}{\rho u} \delta[r - r_* + Z(\xi, \psi) - Z(x, \psi)] d\xi \quad (2.4)$$

Здесь и всюду интегрирование ведется вдоль линии тока, величины под интегралом, аргумент которых не указан, являются известными функциями ψ и ξ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Выражение (2.4) с использованием свойств δ -функции может быть преобразовано к виду, удобному для расчетов. Пусть $\zeta(x, \psi, r)$ — корень уравнения

$$r_*(\zeta, \psi) - Z(\zeta, \psi) = r - Z(x, \psi) \quad (2.5)$$

тогда результат записывается в следующем виде:

$$f(x, \psi, r) = \frac{I(\zeta, \psi)}{\rho(\zeta, \psi) u(\zeta, \psi) [Z'(\zeta, \psi) - r_*'(\zeta, \psi)]} \quad (2.6)$$

Штрихом обозначается частная производная по x .

3. Качественное описание картины сверхзвукового течения около выпуклого угла с возможной спонтанной конденсацией приводится в монографии М. Е. Дейча и Г. А. Филиппова [4]. Однако скачок конденсации исследуется только внутри волны разрежения до точки пересечения его с замыкающей характеристикой (точка K на фиг. 1).

Если бы в потоке конденсации не происходило, то величина пересыщения монотонно возрастала бы вдоль линии тока, так как парциальное давление пара уменьшается медленнее, чем давление насыщения. В действительности вниз по потоку от точки насыщения образуются устойчивые зародыши, которые начинают расти, в результате чего S проходит через максимум. Это падение пересыщения во многих случаях (например, в соплах [1-4]) происходит в узкой зоне и совпадает с передним фронтом скачка конденсации. В рассматриваемой задаче имеет смысл говорить скорее о зоне конденсации, так как по мере удаления от точки излома ширина ее безгранично увеличивается. Поэтому ниже за начало зоны конденсации принимается кривая, которая пересекает линии тока в точках достижения пересыщением максимума.

Система уравнений п. 1 и п. 2 решалась на ЭВМ методом характеристик. Выбиралось $M_\infty = 2$, $T_\infty = 400^\circ \text{K}$, набегающий поток состоял из смеси воздуха и небольшой примеси паров воды (0.3%), которые находились в состоянии насыщения.

На фиг. 2 сплошными линиями представлена зависимость пересыщения от безразмерной координаты x вдоль различных линий тока при обте-

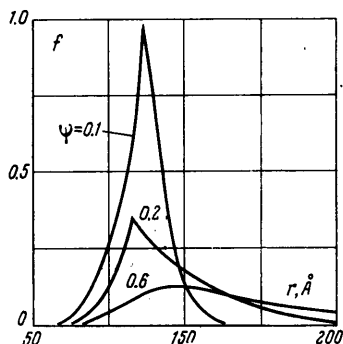
кании угла $\theta = 10^\circ$. Штрих-пунктирная кривая соответствует изменению пересыщения вдоль замыкающей характеристики пучка. В данном расчете точке K приблизительно соответствует линия тока $\psi_k \approx 0.4$. При $\psi > \psi_k$ конденсация начинается (S проходит через максимум) внутри волны разрежения. При переходе через отрезок замыкающей характеристики OK ($\psi \leq \psi_k$) производные по x от параметров вдоль линий тока терпят разрыв, причем, как показывают расчеты, производная от пересыщения меняет знак. Из этого следует, что передний фронт зоны конденсации располагается вдоль участка OK , на котором пересыщение достигает максимума.

Если расширение потока происходит менее интенсивно, чем подвод теплоты конденсации, то возможен рост температуры и давления [4]. В таких случаях минимум температуры лежит ниже по потоку, чем максимум пересыщения, а минимум давления еще дальше. Для $\psi \leq \psi_k$ все три точки совпадают, так как производные от этих параметров терпят разрыв при переходе через OK . Чем больше угол θ , тем ближе к точке излома располагается точка K . На фиг. 2 пунктирными линиями представлено изменение пересыщения при $\theta = 15^\circ$.

Фиг. 3 иллюстрирует зависимость относительной температуры от x вдоль различных линий тока для $\theta = 10^\circ$ (сплошные линии). Пунктиром нанесены кривые, соответствующие обтеканию угла $\theta = 15^\circ$. В этом случае расширение происходит настолько интенсивно, что конденсация не влияет на монотонное поведение кривых.

Наряду с ростом температуры вдоль линий тока вниз по потоку от замыкающей характеристики пучка наблюдался незначительный рост давления, что привело к увеличению наклона характеристик. Однако при выбранном содержании паров воды они не пересекались.

На фиг. 4 приведены функции распределения капель по размерам для различных линий тока (все они отнесены к максимальному значению f для $\psi = 0.1$). Если пересыщение не успевает достигнуть максимума до последней характеристики волны разрежения ($\psi \leq \psi_k$), то df/dr терпит разрыв в верхней точке кривой. В остальных случаях эта точка смещается в сторону меньших r . В соответствии с уравнениями (2.5) и (2.6) функция распределения зависит только от разности $r - Z(x)$, т. е. с ростом x вдоль линии тока сохраняет свой вид, смещаясь в сторону больших r . Этот результат является следствием допущения, что скорость роста частиц не зависит от их размера.



Фиг. 4

Поступило 4 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Oswatitsch K. Kondensationserscheinungen in Überschalldüsen. ZAMM, 1942, vol. 22, No. 1, pp. 1—14.
2. Hill P. G. Condensation of water vapor during supersonic expansion in nozzles. J. Fluid Mech., 1966, vol. 25, pt 3, pp. 593—620.
3. Баханов В. П., Буйков М. В. Кинетика гомогенной квазистационарной конденсации водяного пара при течении в сверхзвуковом сопле. Сб. «Физика аэродисперсных систем», Киев, Изд. Киевск. ун-та, 1970, № 2.
4. Дейч М. Е., Филиппов Г. А. Газодинамика двухфазных сред. М., «Энергия», 1968.
5. Becker R., Doring W. Kinetische Behandlung der Keimbildung in Übersättigten Dämpfen. Ann. Physik, 1935, Bd 24, folge 5, S. 732.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1953.